

УДК 532.51; 532.59
DOI: 10.15372/PMTF202215180

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНЕЙНОГО И НЕЛИНЕЙНОГО РЕЖИМОВ АТТРАКТОРОВ ИНЕРЦИОННЫХ ВОЛН ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРЕ С НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫМИ ТОРЦАМИ

С. В. Субботин, М. А. Ширяева

Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, Пермь, Россия
E-mails: subbotin_sv@pspu.ru, shiryaeva_ma@pspu.ru

Экспериментально исследуется движение жидкости в неравномерно вращающемся (либрирующем) цилиндре, торцы которого симметрично наклонены относительно плоскости поперечного сечения. Вследствие либраций в полости поддерживаются инерционные волны, которые при определенных частотах фокусируются на замкнутой траектории, называемой волновым аттрактором. Скорость пульсационного течения немонотонно меняется с изменением частоты и достигает максимального значения, когда аттрактор принимает форму квадрата. С увеличением амплитуды колебаний в полости пороговым образом возникают новые очаги завихренности, соответствующие инерционным волнам, частота которых отличается от частоты либраций. Выполнен фурье-анализ возмущений в надкритическом режиме и показано, что в спектре помимо основной частоты присутствуют две дополнительные гармоники, удовлетворяющие условию триадного резонанса.

Ключевые слова: вращение, либрации, инерционные волны, аттрактор инерционных волн, триадный резонанс

Введение. Сила Кориолиса во вращающейся жидкости обеспечивает существование инерционных волн [1]. Эти поперечные волны характеризуются необычным дисперсионным соотношением, согласно которому направление распространения энергии и фазы определяется только частотой. В равномерно вращающейся жидкости наличие вязкости приводит к диссипации инерционных волн, поэтому для их поддержания необходима внешняя подкачка энергии. Одним из способов возбуждения инерционных волн являются так называемые либрации — гармонические изменения скорости вращения системы [2, 3]. Интерес к их исследованию обусловлен астро- и геофизическими приложениями, поскольку скорость вращения многих планетарных тел непостоянна [4]. Распространяясь от источника, волны образуют систему расходящихся (сходящихся) конусообразных свободных сдвиговых слоев [5]. В то же время в замкнутых полостях инерционные волны могут испытывать пространственный резонанс, возбуждая собственные невязкие моды в виде стоячих волн, соответствующие данной геометрии полости [6, 7].

Отражение инерционных волн от границ полости не соответствует законам геометрической оптики: согласно дисперсионному соотношению отраженный луч должен сохра-

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ (код проекта МК-1779.2021.1.1) и Правительства Пермского края (грант для ведущей научной школы С-26/1191).

© Субботин С. В., Ширяева М. А., 2023

нять направление относительно оси вращения. Вследствие этого волны с определенными частотами способны фокусироваться на траекториях, представляющих собой предельные циклы, называемые волновыми аттракторами [8–11]. Например, в экспериментах [9, 12] кювета представляла собой вращающуюся призму с основанием в виде прямоугольной трапеции, при этом положение центра масс кюветы не совпадало с осью вращения. Колебания скорости вращения приводили к фокусировке инерционных волн на замкнутую траекторию, имеющую форму квадрата, опирающегося на основание призмы. В работе [10] использовалась круговая форма кюветы [12]. Внешняя граница полости была образована прямым цилиндром, внутренняя — усеченным конусом. В настоящей работе рассматривается либрирующий цилиндр, торцы которого наклонены параллельно друг другу. Как показывают результаты экспериментов, такая геометрия также обеспечивает возможность фокусировки волн в аттрактор, который в нелинейном режиме может выступать в качестве источника дочерних волн. В линейном режиме возмущения диссипируются вследствие вязкости, однако при больших значениях закачиваемой энергии возможны каскадные процессы по сценарию триадных взаимодействий [11, 13–18]. Неустойчивость триадного резонанса проявляется в виде распада основной волны на две субгармоники, распространяющиеся в противоположных направлениях. При этом для волновых векторов и волновых чисел выполняется принцип линейной суперпозиции. Триадный резонанс также проявляется в невращающейся стратифицированной по плотности жидкости [19, 20].

Целью настоящей работы является экспериментальное исследование линейного и нелинейного режимов аттрактора инерционных волн в неравномерно вращающемся цилиндре с использованием для фокусировки волн неосесимметричных торцевых стенок.

Экспериментальная установка и методика эксперимента. Кювета представляет собой плексигласовый цилиндр длиной $L = 77,0$ мм с круговым сечением радиусом $R = 26,0$ мм. Торцевые стенки цилиндра расположены параллельно под углом наклона $\alpha = 23^\circ$ относительно плоскости поперечного сечения (рис. 1). Такое положение торцов обеспечивают две прозрачные вставки в виде усеченных цилиндров, диаметр которых соответствует внутреннему диаметру полости. Кювета закреплена в шарикоподшипниках вертикальных опор и вращается вокруг горизонтальной оси. В качестве одной опоры используется подшипник большого внутреннего диаметра, что позволяет изучать азимутальное поле скорости. Для минимизации оптических искажений со стороны боковой поверхности цилиндра помещен в плексигласовый параллелепипед, запол-

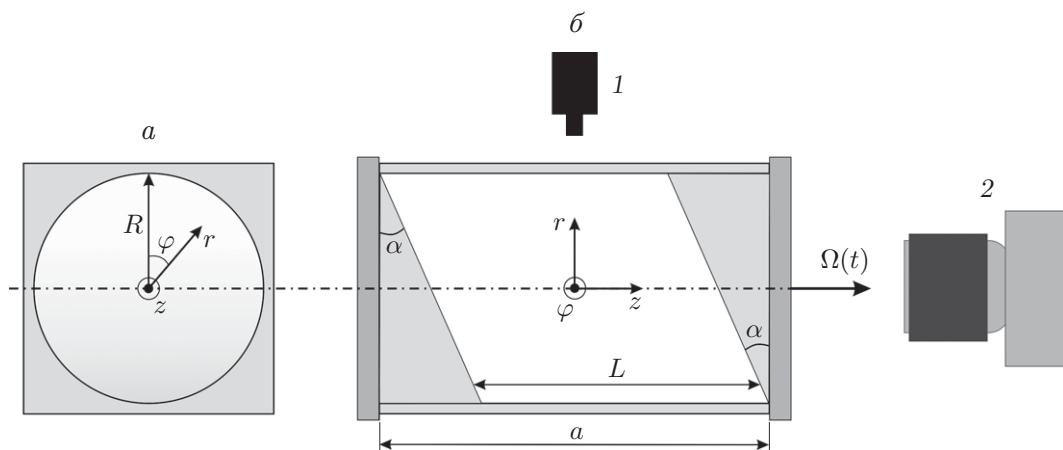


Рис. 1. Схема экспериментальной установки:

a — вид вдоль оси вращения, b — вид сбоку; 1 — лазер, 2 — камера

ненный рабочей жидкостью — водным раствором глицерина с кинематической вязкостью $\nu = 2 \cdot 10^{-6} \div 10^{-5}$ м²/с. Для вращения кюветы используется шаговый двигатель FL86STH118-6004A с драйвером SMD-9.0 и источником постоянного тока Mastech HY5005E. Драйвер делит основной шаг двигателя (1,8°) до значения 0,45°. Сигнал для управления вращением двигателя задается генератором модуля Zet 210 Sigma USB, подключенного к компьютеру. Для точной передачи вращения от двигателя кювете используется муфта SJCA-30C.

В лабораторной системе отсчета вращение кюветы задается законом

$$\Omega(t) = \Omega_0[1 + \varepsilon \sin(\Omega_{lib}t)],$$

где Ω_0 — средняя угловая скорость вращения; Ω_{lib} — угловая частота либраций. Амплитуда модуляции скорости определяется по формуле $\varepsilon = \Delta\psi/\sigma$, где $\Delta\psi$ — угловая амплитуда вращательных колебаний; $\sigma = \Omega_{lib}/\Omega_0$ — безразмерная частота. Во всех экспериментах средняя скорость вращения полости является постоянной и принимает значение $\Omega_0 = 62,8$ с⁻¹, в то время как частота либраций меняется в диапазоне $\Omega_{lib} = 56,5 \div 75,4$ с⁻¹, что соответствует безразмерным частотам $\sigma = 0,9 \div 1,2$. Такой выбор обусловлен фокусировкой инерционных волн в аттракторе (1,1) [21, 22]. Значения Ω_0 и Ω_{lib} поддерживаются с точностью до 0,1 с⁻¹. Амплитуда либраций принимает значения $\varepsilon = 0 \div 0,16$, число Экмана меняется в диапазоне $Ek = \nu/(\Omega_0 R^2) = 4,7 \cdot 10^{-5} \div 2,4 \cdot 10^{-4}$.

Эксперименты проводятся следующим образом. Сначала кювета приводится в равномерное вращение со скоростью Ω_0 . После установления твердотельного режима вращения при фиксированной частоте Ω_{lib} плавно устанавливается амплитуда ε . Движение жидкости исследуется с помощью PIV-метода (particle image velocimetry), для чего в жидкость добавляются полиамидные частицы размером $d \approx 20$ мкм, обладающие практически нейтральной плавучестью. Жидкость освещается световым ножом толщиной 2 мм, создаваемым непрерывным лазером KLM-532/h-1000. Видеорегистрация осуществляется с помощью неподвижной в лабораторной системе отсчета скоростной камеры Optronis CamRecord CL600x2. Для изучения азимутального поля скорости съемка ведется со стороны торца с частотой 360 кадр/с и разрешением 800 × 800 пикселей. Время экспозиции во всех экспериментах составляет 0,3 мс, что является достаточным для получения отчетливых изображений частиц-трассеров в каждом кадре. Для перехода в систему отсчета, вращающуюся со скоростью $f_0 = \Omega_0/(2\pi) = 10$ об/с, вся последовательность кадров поворачивается относительно оси вращения с шагом 10°. Кросскорреляционная обработка поля скорости осуществляется в программе PIVlab [23].

Осевое поле скорости исследуется как в наклонном (проходящем через большую и меньшую диагонали цилиндра), так и в прямоугольном (перпендикулярном наклонному сечению) сечениях полости. Для этого видеосъемка ведется с частотой 40 кадр/с и разрешением 1000 × 600 пикселей, а фазы вращения и съемки подбираются таким образом, что через каждые 10 кадров среднее положение грани кюветы перпендикулярно оптической оси камеры. Для расчета поля скорости выбираются пары кадров с интервалом времени, кратным периоду среднего вращения $nT_0 = n/f_0$ (n — целое число). В такой последовательности изображений отклонение вектора нормали боковой грани от оптической оси происходит по закону $\psi = \Delta\psi \cos(\Omega_{lib}t)$. Оценки показывают, что угол поворота между двумя последовательными кадрами мал: $\delta\psi < 2^\circ$, а частицы визуализатора даже на периферии полости остаются в плоскости светового ножа. Более подробное описание методики изучения пульсационного поля скорости во вращающейся полости прямоугольной формы представлено в работах [22, 24]. Результаты экспериментов приводятся в цилиндрической системе координат (r, φ, z) с началом отсчета в центре полости; угол φ отсчитывается от острого угла наклонного осевого сечения (см. рис. 1).

Аттракторы инерционных волн. В случае если частота либраций Ω_{lib} не превышает удвоенную скорость вращения Ω_0 , в полости распространяются инерционные волны. Эти волны возникают в зонах соединения наклонных торцевых стенок и боковой границы, образуя в жидкости совокупность конусообразных свободных сдвиговых слоев [5]. Поскольку торцы полости не являются осесимметричными, характеристические конусы смещены с оси вращения. Таким образом, возмущение, распространяющееся от каждого торца, является азимутально-неоднородным и имеет волновое число $m = 1$. Инерционные волны подчиняются дисперсионному соотношению, согласно которому направление распространения энергии возмущений удовлетворяет условию $\sigma/2 = \pm \sin \theta$ (θ — угол относительно оси вращения) [1]. Таким образом, для монохроматической волны величина угла θ является фиксированной, в том числе при отражении волн от границ полости.

Фокусировка волн. Эксперименты показывают, что в диапазоне частот $\sigma = 0,9 \div 1,2$ инерционные волны фокусируются на замкнутой траектории в виде параллелепипеда (рис. 2). Фокусировка наблюдается в фазах $\Omega_{lib}t = 0$ и $\Omega_{lib}t = \pi$, т. е. когда угол поворота полости достигает амплитудного значения $\Delta\psi$. Смена знака ускорения полости приводит к изменению направления волн. Следует отметить, что фокусировка наблюдается только в наклонном сечении полости (см. рис. 2, а), а в прямоугольном сечении (см. рис. 2, б) волновая энергия в основном сконцентрирована вблизи углов. Азимутальное поле скорости на расстоянии $z/L = 0$ представляет собой пару вихрей, соответствующих двум волнам, проходящим через поперечное сечение (см. рис. 2, в). В линейном режиме (при

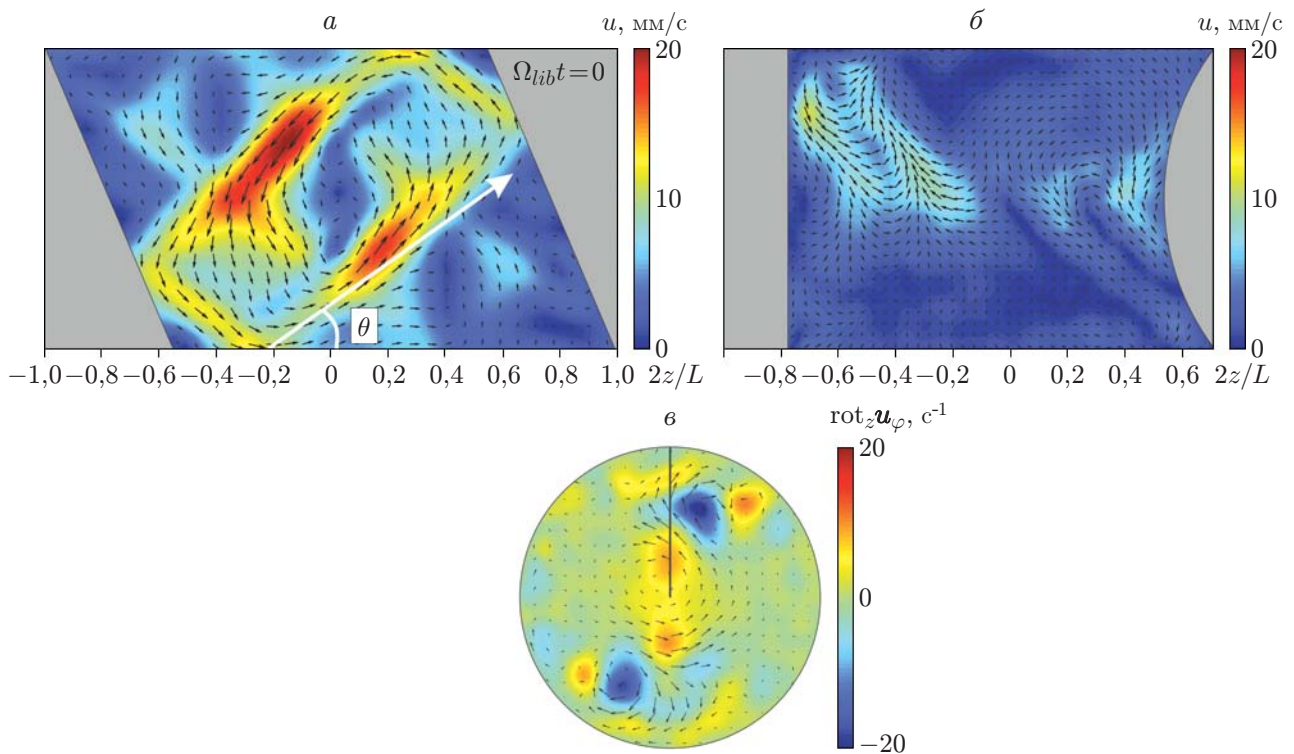


Рис. 2. Мгновенные поля скорости при $\Omega_{lib}t = 0$, $\sigma = 1,16$, $\varepsilon = 0,05$, $Ek = 1,4 \cdot 10^{-4}$ в наклонном $\varphi = 0$ (а) и прямоугольном $\varphi = \pi/2$ (б) сечениях, а также мгновенное азимутальное поле скорости на расстоянии $2z/L = 0$ при $\Omega_{lib}t = 0$, $\sigma = 1,15$, $\varepsilon = 0,06$, $Ek = 4,7 \cdot 10^{-5}$ (в):

белая стрелка — теоретически рассчитанное направление групповой скорости волн [1]; черная вертикальная линия — направление отсчета угла φ

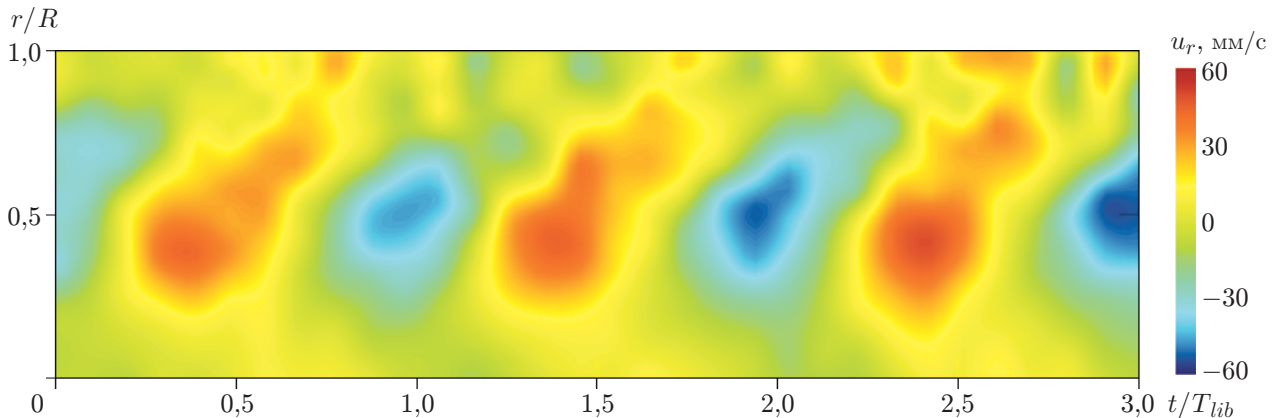


Рис. 3. Пространственно-временное распределение радиальной компоненты скорости u_r в поперечном сечении $2z/L = 0$ вдоль оси $\varphi = 0$ при $\sigma = 1,15$, $\varepsilon = 0,06$, $Ek = 4,7 \cdot 10^{-5}$ (см. рис. 2,б)

малых значениях амплитуды ε) за период либраций вихри сносятся к периферии полости и затухают, а на их месте возникают вихри противоположной закрутки. В то же время наблюдения показывают, что отдельные частицы жидкости совершают антициклоническое вращение по круговой траектории. Это подтверждается периодичностью распределения радиальной компоненты скорости u_r во времени (рис. 3). В отличие от рассматриваемой задачи осесимметричные волны образуют систему азимутальных сдвиговых слоев в форме колец, при этом колебания жидкости на фиксированном расстоянии от оси вращения происходят в одной фазе [5, 25]. Заметим, что центры завихренностей на рис. 2,б располагаются несимметрично относительно линии $\varphi = 0$, что свидетельствует о наклоне плоскости волнового аттрактора относительно осевого сечения.

Для верификации результатов экспериментов используется двумерная невязкая лучевая модель, описывающая эволюцию волн в наклонном сечении после серии отражений. Результаты анализа показывают, что в выбранном диапазоне частот замкнутая траектория представляет собой волновой аттрактор (1,1) [22]. Независимо от начального положения точки излучения после серии отражений (≈ 10) от стенок инерционная волна фокусируется на траектории, представляющей собой предельный цикл. Конечная толщина ветвей аттрактора, наблюдаемого в эксперименте, обусловлена балансом геометрической фокусировки и вязкой диссипации. Изменение частоты либраций приводит к изменению соотношения ветвей аттрактора. Так, при $\sigma \approx 1$ поперечный размер аттрактора увеличивается и он принимает форму квадрата.

Сравнение результатов экспериментов с данными, полученными с использованием лучевой теории, показывает, что значения угла θ незначительно различаются. Так, при частоте $\sigma = 1,16$ волны должны распространяться под углом $\theta = 35^\circ$. Однако экспериментально наблюдаемая пространственно-волновая картина соответствует более высокой частоте $\sigma = 1,29$, поэтому формы аттрактора, полученные экспериментально и теоретически, различаются. Вероятно, это обусловлено влиянием нелинейных эффектов, например осредненного дифференциального вращения жидкости, которое не рассматривается в данной работе.

Скорость пульсационного течения. Для характеристики динамического отклика жидкости на возмущения, вносимые либрациями, используется осредненная по пространству (в осевом сечении) пульсационная скорость

$$u = \frac{1}{S} \sum \sqrt{u_r^2 + u_z^2} \Delta s. \quad (1)$$

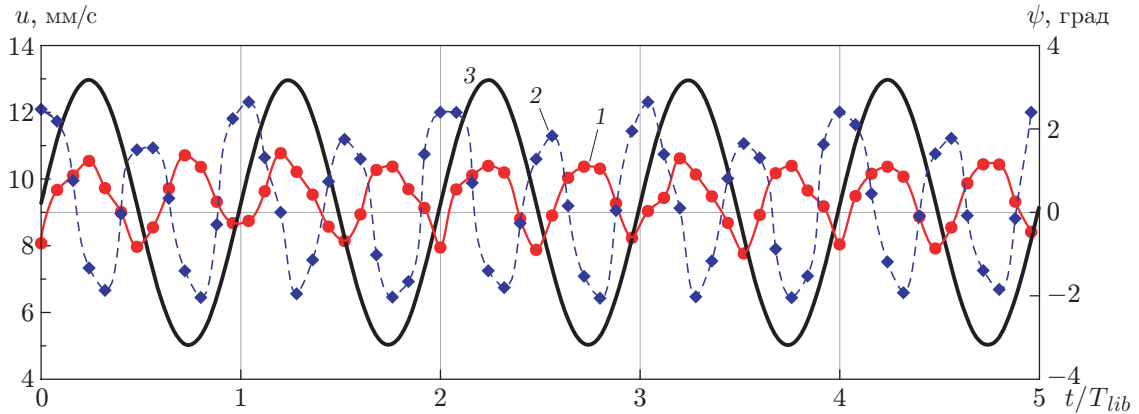


Рис. 4. Зависимости осредненной по пространству пульсационной компоненты скорости в наклонном (1) и прямоугольном (2) сечениях полости при $\sigma = 1,08$, $\varepsilon = 0,06$, $Ek = 1,4 \cdot 10^{-4}$, а также либрационной компоненты угловой координаты полости ψ (3) от времени

Здесь u_r , u_z — радиальная и осевая компоненты скорости; S — площадь сечения; Δs — площадь, определяемая шагом векторного поля. Типичные временные зависимости $u(t)$ в двух взаимно перпендикулярных плоскостях представлены на рис. 4. Обе зависимости являются гармоническими и смещены по фазе относительно друг друга на $\pi/2$. Несмотря на то что амплитуды пульсационного движения различаются, значения осредненных по периоду либраций скоростей $\langle u \rangle = \frac{1}{T_{lib}} \int_{T_{lib}} u dt$ близки. За один период T_{lib} скорость u два-

жды достигает максимального и минимального значений, что обусловлено периодическим разрушением и возникновением аттрактора. На рис. 4 видно, что скорость пульсационного течения в наклонном сечении достигает максимального значения в фазах либраций $\Omega_{lib}t = 0$ и $\Omega_{lib}t = \pi$, т. е. в моменты времени, когда угол поворота полости достигает амплитудного значения $\Delta\psi$. Именно в этих фазах либраций кинетическая энергия инерционных волн локализована вдоль замкнутой траектории (см. рис. 2, а).

В линейном режиме интенсивность пульсационного движения жидкости при фиксированной частоте σ пропорциональна амплитуде либраций: $\langle u \rangle \sim \varepsilon = \Delta\varphi \Omega_{lib}/\Omega_0$ [21]. Поэтому для сравнения результатов, полученных при различных значениях частот и амплитуд либраций, скорость $\langle u \rangle$ нормируется на амплитуду скорости колебаний вблизи боковой границы полости $\Delta\varphi \Omega_{lib}R$. Изменение безразмерной скорости жидкости $V = \langle u \rangle / (\Delta\varphi \Omega_{lib}R)$ в диапазоне частот $\sigma = 0,9 \div 1,2$ представлено на рис. 5. Видно, что зависимость имеет немонотонный характер с отчетливо выраженным экстремумом при $\sigma = 0,98$. Причем с увеличением числа Экмана Ek положение экстремума не меняется, в то время как средняя скорость пульсационного движения уменьшается. Следует отметить, что экстремуму соответствует практически квадратная форма аттрактора. При увеличении σ аттрактор сжимается в поперечном направлении и ориентируется вдоль меньшей диагонали сечения (см. рис. 2, а) и, наоборот, при уменьшении σ аттрактор вытягивается вдоль большей диагонали. Аналогичная зависимость интенсивности пульсационного течения от частоты наблюдается во вращающихся полостях различной конфигурации, например в либрирующем кубе [6] или осциллирующем сферическом слое [24]. При этом резонансный отклик связывался не с аттрактором инерционных волн, а с возбуждением одной из собственных частот вращающейся жидкости — инерционных мод, которые представляют собой крупномасштабные осциллирующие структуры.

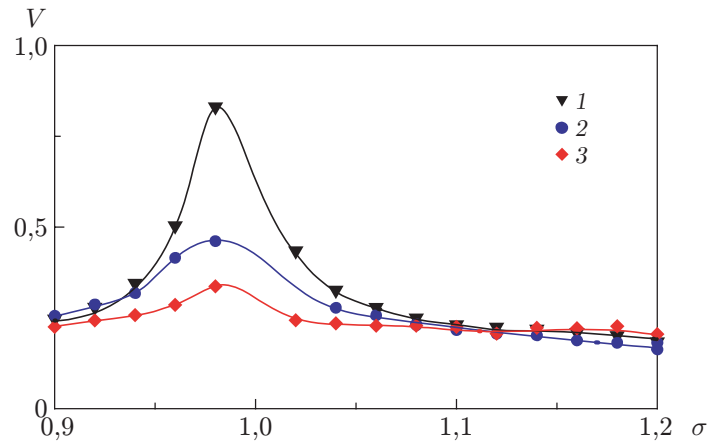


Рис. 5. Зависимость безразмерной скорости пульсационного течения в осевом сечении полости от безразмерной частоты либраций σ при различных значениях числа Экмана:

1 — $Ek = 7,1 \cdot 10^{-5}$, 2 — $Ek = 1,2 \cdot 10^{-4}$, 3 — $Ek = 2,4 \cdot 10^{-4}$

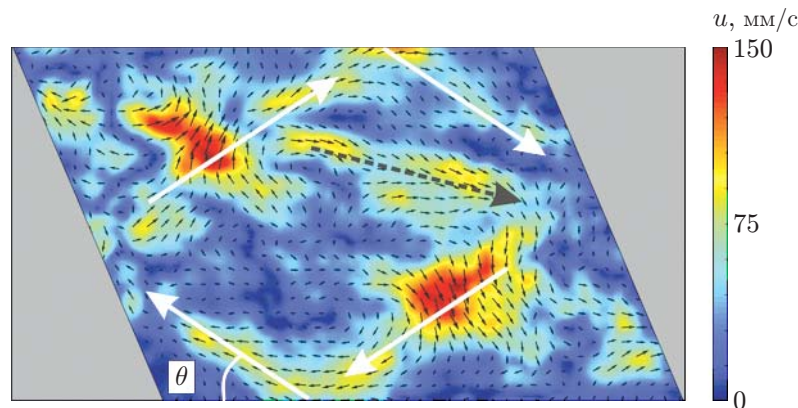


Рис. 6. Мгновенное поле скорости в надкритическом режиме при $\sigma = 1,10$, $\varepsilon = 0,10$, $\Omega_{lib}t = \pi$, $Ek = 4,7 \cdot 10^{-5}$:

сплошные стрелки — теоретически предсказанное направление групповой скорости волн; штриховая стрелка — новое направление, не существующее в линейном режиме

Нелинейный режим. При увеличении амплитуды либраций ε пульсационное течение пороговым образом теряет устойчивость, что проявляется в наблюдаемом визуальном разрушении ветвей аттрактора инерционных волн. В осевом сечении полости можно наблюдать дополнительные волновые лучи, направление которых отличается от задаваемых основной частотой σ . Так, в надкритическом режиме при $\sigma = 1,10$ на фоне основной траектории аттрактора (сплошные стрелки на рис. 6) появляются вторичные волны, распространяющиеся под углом к оси вращения (штриховая стрелка), приблизительно равным 20° , и соответствующие частоте $\sigma = 0,7$. В поперечном сечении движение жидкости становится неупорядоченным, причем вследствие возбуждения вторичных волн вблизи боковой стенки полости развиваются новые очаги азимутальной завихренности. Непосредственно момент возникновения неустойчивости характеризуется “вспышкой”, сопровождающейся сильным перемешиванием жидкости. Через некоторое время ($\approx 10T_{lib}$) при неизменных параметрах либраций амплитуда спонтанных колебаний затухает, а в азимутальном потоке устанавливается квазистационарная вихревая система. Несмотря на

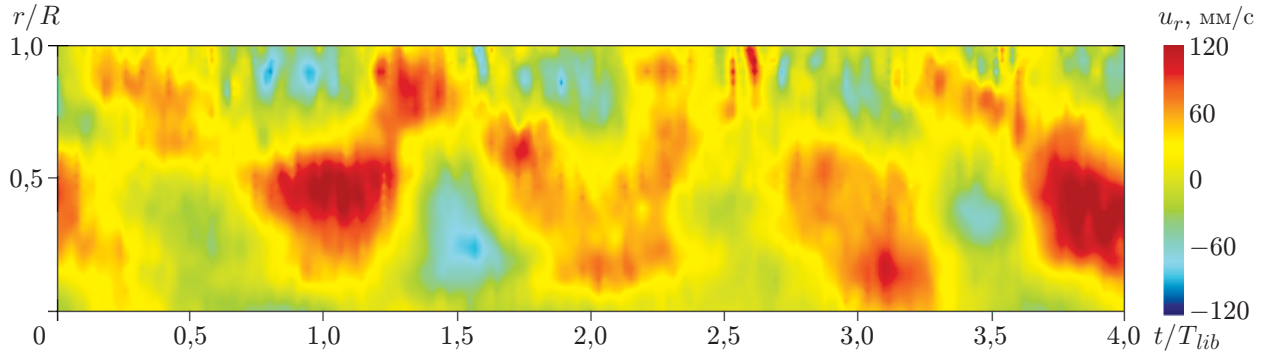


Рис. 7. Пространственно-временное распределение скорости u_r в поперечном сечении $z/L = 0$ вдоль оси $\varphi = 0$ при $\sigma = 0,96$, $\varepsilon = 0,14$, $Ek = 4,7 \cdot 10^{-5}$

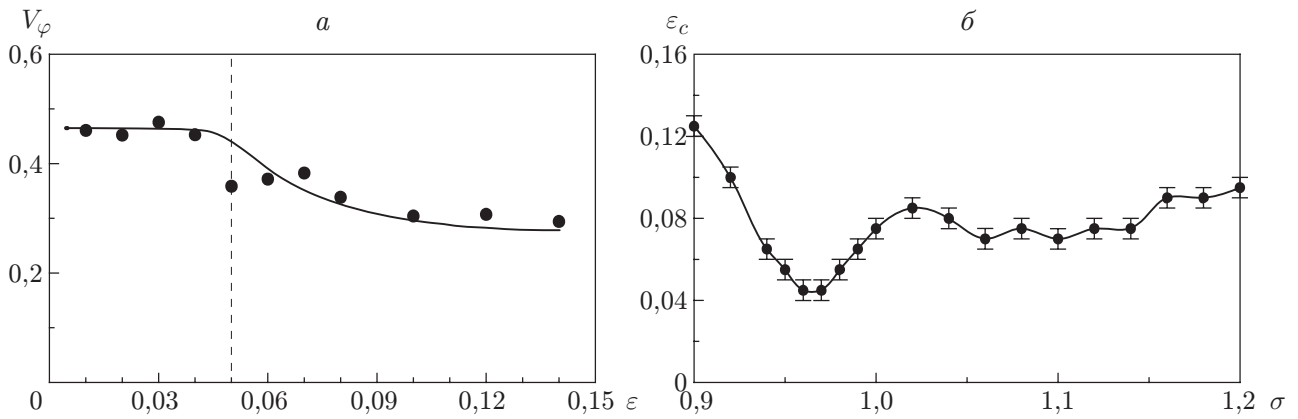


Рис. 8. Зависимость безразмерной азимутальной скорости от амплитуды либраций при $\sigma = 0,96$ (а) и критические значения амплитуды либраций ε_c в случае потери устойчивости азимутального течения при $Ek = 4,7 \cdot 10^{-5}$ (б): вертикальная штриховая линия — порог неустойчивости; сплошные линии — сглаживающие кривые; вертикальные отрезки — погрешность измерений

то что вихри возникают и разрушаются в течение периода либраций, их среднее число и среднее азимутальное положение со временем не меняются. На рис. 7 представлено распределение радиальной компоненты скорости u_r в надкритическом режиме вдоль оси $\varphi = 0$. В отличие от линейного режима (см. рис. 3) на профиле скорости наблюдаются частые краткосрочные флуктуации, вызванные перемещением надкритических структур. В целом структура глобального пульсационного течения периодически воспроизводится, что свидетельствует о преобладании волн, основная частота которых совпадает с частотой либрационного воздействия.

С увеличением амплитуды либраций измерения скорости в осевом сечении полости затруднены вследствие появления существенной азимутальной составляющей потока. Поэтому далее анализируется мгновенное азимутальное течение. По аналогии с (1) для интегральной характеристики азимутальной скорости вводится средняя скорость пульсаций

$$\langle v \rangle = \frac{1}{T_{lib}} \int_{T_{lib}} v dt$$

по всему поперечному сечению ($v = \frac{1}{S} \sum \sqrt{u_r^2 + u_\varphi^2} \Delta s$). На рис. 8,а приведена зависи-

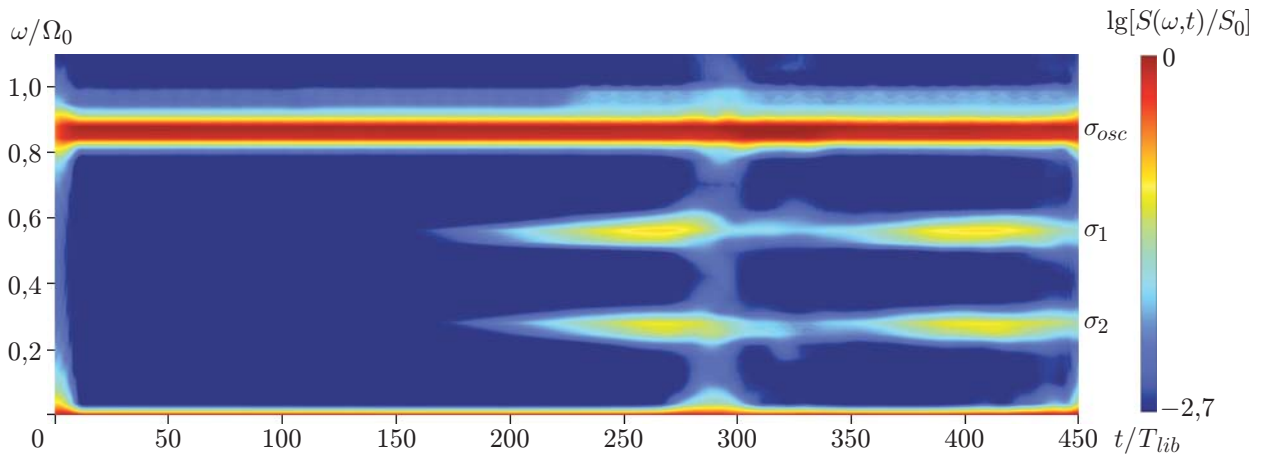


Рис. 9. Частотно-временная диаграмма азимутальной скорости в сечении $2z/L = 0$ при $\sigma = 0,90$, $\varepsilon = 0,14$, $Ek = 5,2 \cdot 10^{-5}$

мость безразмерной скорости $V_\varphi = \langle v \rangle / (\Delta\varphi \Omega_{lib} R)$ от амплитуды либраций. В области малых ($\varepsilon < 0,05$) амплитуд значение параметра V_φ практически не меняется, что свидетельствует о линейном режиме аттрактора, в котором присутствует только одна частота. При постепенном увеличении ε скорость быстро уменьшается, что свидетельствует о нарушении линейной зависимости и развитии неустойчивости в виде дополнительных гармоник. Следует отметить, что результаты определения порога путем измерения интегральной скорости PIV-методом согласуются с визуальными наблюдениями “вспышки”.

Результаты измерений порогов при фиксированном значении числа Экмана $Ek = 4,7 \cdot 10^{-5}$ показывают, что критическое значение амплитуды ε_c немонотонно меняется с изменением частоты σ (рис. 8,б). При этом минимальное значение $\varepsilon \approx 0,05$ соответствует диапазону частот $\sigma = 0,96 \div 0,97$, что хорошо согласуется с результатами измерений пульсационной скорости V , которая имеет экстремум при $\sigma = 0,98$ (см. рис. 5). В диапазоне частот $\sigma = 1,02 \div 1,20$ порог неустойчивости практически не меняется и принимает значение $\varepsilon_c \approx 0,08$. При уменьшении амплитуды либраций скорость пульсационного течения также уменьшается, вторичные волны постепенно исчезают и зависимость вновь приобретает линейный характер. Аналогичным образом резонансное возбуждение инерционных мод во вращающемся сферическом слое с колеблющимся ядром оказывает сильное дестабилизирующее воздействие на осредненное азимутальное течение [26]. Резонансные колебания жидкости создают наиболее благоприятные условия для развития неустойчивости в виде вытянутой вдоль оси вращения системы валов.

Спектральный анализ возмущений. Для определения механизма генерации вторичных волн проводился фурье-анализ мгновенного азимутального поля скорости. Для этого использовалась методика, применявшаяся для анализа неустойчивости волнового аттрактора во вращающемся кольцевом слое с наклонным дном [11], а также течения, возбуждаемого ядром, колеблющимся во вращающейся сферической полости [26]. На рис. 9 приведена спектрограмма азимутальной скорости при частоте $\sigma = 0,90$, рассчитанная по формуле [27]

$$S(\omega, t) = \left\langle \left| \int_{-\infty}^{+\infty} u_\varphi(\tau) e^{-i\omega\tau} h(t - \tau) d\tau \right|^2 \right\rangle_{(r,\varphi)} \quad (2)$$

($h(t)$ — окно Хэмминга). Начало отсчета времени соответствует моменту включения либраций, обработка осуществлялась при $0 \leq r/R \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Шкала характеризует

величину $\lg [S(\omega, t)/S_0]$, где S_0 — осредненный по времени спектр на частоте Ω_{lib} . Видно, что наиболее сильный отклик соответствует частоте либраций $\sigma_{osc} = \sigma$, значение которой не меняется в течение всего времени эксперимента. Также в спектре присутствуют две дополнительные частоты ($\sigma_1 = 0,6$, $\sigma_2 = 0,3$), сумма которых равна частоте $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$. Это позволяет предположить, что пусковым механизмом генерации вторичных волн является триадный резонанс [19, 20], когда фокусировка волн в аттракторе приводит к возникновению каскада энергии по сценарию триадных взаимодействий (волновая турбулентность [28]). Остановка каскада обусловлена диссипацией энергии вторичных волн вследствие вязкости. Спектрограммы, полученные при различных значениях частоты либраций, показывают, что значения частот σ_1 и σ_2 могут меняться, при этом их сумма всегда остается равной частоте воздействия σ . Следует отметить, что при заданной амплитуде ε неустойчивость возникает не мгновенно, а через несколько периодов либраций. Так, при $\sigma = 0,90$ субгармоники триадного резонанса проявляются только при $t/T_{lib} > 170$ с момента начала эксперимента. После окончания “вспышки” ($t/T_{lib} > 300$) интенсивность дочерних волн существенно ослабевает. Следующая “вспышка” происходит при $t/T_{lib} > 370$.

Триадный резонанс во вращающейся цилиндрической полости выявлен в работе [13], автор которой обнаружил возникновение так называемого резонансного коллапса вблизи резонансной частоты инерционной моды. Позднее экспериментальным путем было показано, что в прецессирующем цилиндре неустойчивость действительно удовлетворяет условию триадного резонанса в виде двух инерционных мод и основной резонансной моды с азимутальным волновым числом $1 = m_2 - m_1$ [29]. Исследования этого механизма получили развитие в работах [14, 15, 30, 31]. Неустойчивость волновых аттракторов по сценарию триадных взаимодействий достаточно часто наблюдается в стратифицированной или вращающейся жидкости [11, 16, 17, 19, 20]. Дочерние волны распространяются в противоположных направлениях, а сумма их волновых векторов соответствует волновому вектору аттрактора: $\mathbf{k}_{osc} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$. Можно предположить, что в настоящих экспериментах дочерние волны с частотами σ_1 и σ_2 также будут удовлетворять этому условию, проверка которого является предметом дальнейших исследований.

Закключение. В работе экспериментально исследовано пульсационное течение в неравномерно вращающейся цилиндрической полости с неосесимметричными торцами. Периодические вариации скорости вращения (либрации) возбуждают внутреннее волновое движение, которое при определенных частотах фокусируется на замкнутой траектории — волновом аттракторе. Фокусировка возникает только в наклонном сечении полости при крайнем угловом положении кюветы. Результаты наблюдений согласуются с результатами, полученными с использованием двумерной лучевой модели, что подтверждает возможность фокусировки волн после серии отражений на траекторию, представляющую собой предельный цикл. Основное внимание уделено диапазону частот либраций, соответствующему аттрактору (1,1). Показано, что изменение частоты либраций σ приводит к изменению соотношения ветвей аттрактора, при этом наиболее интенсивное течение характерно для аттрактора квадратной формы.

В надкритическом режиме линейная зависимость между скоростью пульсационного течения и закачиваемой в систему энергией нарушается. Движение жидкости становится нерегулярным, при этом вблизи боковой стенки полости развиваются новые очаги азимутальной завихренности. Результаты наблюдений за структурой течения в осевом сечении показывают, что возникновение вихрей обусловлено возбуждением инерционных волн, частота которых отличается от частоты аттрактора. Согласно данным фурье-анализа азимутального поля скорости в надкритическом режиме в спектре возмущений помимо основной гармоники присутствуют две частоты σ_1 и σ_2 , причем $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma$. Сделано предположение, что неустойчивость обусловлена триадным резонансом инерционных волн.

Авторы выражают благодарность Н. Д. Шмаковой за помощь в проведении спектрального анализа нелинейного режима волнового аттрактора.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гринспен Х.** Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеиздат, 1975.
2. **Calkins M. A., Noir J., Eldredge J. D., Aurnou J. M.** Axisymmetric simulations of libration-driven fluid dynamics in a spherical shell geometry // *Phys. Fluids*. 2010. V. 22. 086602.
3. **Le Bars M., Cébron D., Le Gal P.** Flows driven by libration, precession, and tides // *Annual Rev. Fluid Mech.* 2015. V. 47. P. 163–193.
4. **Margot J. L., Peale S. J., Jurgens R. F., et al.** Large longitude libration of Mercury reveals a molten core // *Science*. 2007. V. 316. P. 710–714.
5. **Messio L., Morize C., Rabaud M., Moisy F.** Experimental observation using particle image velocimetry of inertial waves in a rotating fluid // *Experiment. Fluids*. 2008. V. 44. P. 519–528.
6. **Boisson J., Lamriben C., Maas L. R. M., et al.** Inertial waves and modes excited by the libration of a rotating cube // *Phys. Fluids*. 2012. V. 24. 076602.
7. **Subbotin S.** Steady circulation induced by inertial modes in a librating cylinder // *Phys. Rev. Fluids*. 2020. V. 5, N 1. 014804.
8. **Maas L. R. M., Benielli D., Sommeria J., Lam F. P. A.** Observation of an internal wave attractor in a confined, stably stratified fluid // *Nature*. 1997. V. 388. P. 557–561.
9. **Manders A. M. M., Maas L. R. M.** Observations of inertial waves in a rectangular basin with one sloping boundary // *J. Fluid Mech.* 2003. V. 493. P. 59–88.
10. **Klein M., Seelig T., Kurgansky M. V., et al.** Inertial wave excitation and focusing in a liquid bounded by a frustum and a cylinder // *J. Fluid Mech.* 2014. V. 751. P. 255–297.
11. **Boury S., Sibgatullin I., Ermanyuk E., et al.** Vortex cluster arising from an axisymmetric inertial wave attractor // *J. Fluid Mech.* 2021. V. 926. A12.
12. **Maas L. R. M.** Wave focusing and ensuing mean flow due to symmetry breaking in rotating fluids // *J. Fluid Mech.* 2001. V. 437. P. 13–28.
13. **McEwan A. D.** Inertial oscillations in a rotating fluid cylinder // *J. Fluid Mech.* 1970. V. 40. P. 603–640.
14. **Lin Y., Noir J., Jackson A.** Experimental study of fluid flows in a precessing cylindrical annulus // *Phys. Fluids*. 2014. V. 26. 046604.
15. **Marques F., Lopez J. M.** Precession of a rapidly rotating cylinder flow: traverse through resonance // *J. Fluid Mech.* 2015. V. 782. P. 63–98.
16. **Brunet M., Dauxois T., Cortet P.-P.** Linear and nonlinear regimes of an inertial wave attractor // *Phys. Rev. Fluids*. 2019. V. 4. 034801.
17. **Сибгатуллин И. Н., Ерманыук Е. В.** Аттракторы внутренних и инерционных волн (обзор) // *ПМТФ*. 2019. Т. 60, № 2. С. 113–136.
18. **Xu W., Harlander U.** Inertial mode interactions in a rotating tilted cylindrical annulus with free surface // *Phys. Rev. Fluids*. 2020. V. 5. 094801.
19. **Scolan H., Ermanyuk E., Dauxois T.** Nonlinear fate of internal waves attractors // *Phys. Rev. Lett.* 2013. V. 110. 234501.
20. **Brouzet C., Ermanyuk E. V., Joubaud S., et al.** Internal wave attractors: different scenarios of instability // *J. Fluid Mech.* 2017. V. 811. P. 544–568.
21. **Субботин С. В., Ширяева М. А.** Аттракторы инерционных волн в неравномерно вращающемся цилиндре с наклонными торцами // *Конвективные течения*. Пермь: Перм. гос. гуманитар.-пед. ун-т, 2021. Вып. 10. С. 101–117.

22. **Subbotin S., Shiryayeva M.** Steady vortex flow induced by inertial wave attractor in a rotating cylinder with liquid // Microgravity Sci. Technol. 2022. V. 34, N 5. 89.
23. **Thielicke W., Stamhuis E. J.** PIVlab — towards user-friendly, affordable and accurate digital particle image velocimetry in MATLAB // J. Open Res. Software. 2014. V. 2, N 1. e30.
24. **Subbotin S., Shiryayeva M.** On the linear and non-linear fluid response to the circular forcing in a rotating spherical shell // Phys. Fluids. 2021. V. 33. 066603.
25. **Hoff M., Harlander U., Egbers C.** Experimental survey of linear and non-linear inertial waves and wave instabilities in a spherical shell // J. Fluid Mech. 2016. V. 789. P. 589–616.
26. **Subbotin S., Shmakova N., Ermanyuk E., Kozlov V.** Stewartson layer instability and triadic resonances in rotating sphere with oscillating inner core // Phys. Fluids. 2022. V. 34. 064103.
27. **Flandrin P.** Time-frequency/time-scale analysis, time-frequency toolbox for MATLAB. San Diego: Acad. Press, 1999.
28. **Monsalve E., Brunet M., Gallet B., Cortet P.** Quantitative experimental observation of weak inertial-wave turbulence // Phys. Rev. Lett. 2020. V. 125. 254502.
29. **Lagrange R., Eloy C., Nadal F., Meunier P.** Instability of a fluid inside a precessing cylinder // Phys. Fluids. 2008. V. 20. 081701.
30. **Lagrange R., Meunier P., Nadal F., Eloy C.** Precessional instability of a fluid cylinder // J. Fluid Mech. 2011. V. 666. P. 104–145.
31. **Lopez J. M., Marques F.** Rapidly rotating precessing cylinder flows: forced triadic resonances // J. Fluid Mech. 2018. V. 839. P. 239–270.

*Поступила в редакцию 22/VII 2022 г.,
после доработки — 22/VII 2022 г.
Принята к публикации 29/VIII 2022 г.*
