УДК 517.958:531.72

ЗАДАЧА КАПИЛЛЯРНОГО ВЫТЕСНЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ ТРЕХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

В. В. Шелухин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Изучается класс капиллярных давлений, соответствующий треугольному тензору капиллярной диффузии в трехфазной жидкости. Фильтрация с таким тензором описывается вырождающейся на решениях параболической системой уравнений. Эта система интегродифференциальная, так как искомыми являются суммарный расход и распределение фазовых насыщенностей в условиях заданного перепада давления в одной из фаз на границах области течения. Показано, что в задаче капиллярного вытеснения вырождающаяся система может быть исследована на основе специального принципа максимума.

Ключевые слова: фильтрация, трехфазная жидкость, капиллярное давление, вырождающаяся параболическая система, существование решений.

Введение. Как показано в работе [1], система уравнений трехфазной фильтрации несжимаемых несмешивающихся жидкостей без учета капиллярных давлений является "внутренне противоречивой". Это связано с тем, что такая система гиперболическая при одних значениях насыщенностей и эллиптическая при других. Поэтому понятен интерес к исследованию моделей параболического типа, учитывающих капиллярные давления [2].

В настоящей работе рассматриваются трехфазные жидкости с треугольным тензором капиллярной диффузии. Одномерные течения таких жидкостей описываются системой уравнений

$$u_{it} + v(t)f_i(u)_x = (B(u)_{ij}u_{jx})_x, \qquad i, j = 1, 2, \quad B_{21} = 0, \tag{1}$$

где функция времени $v(t)$ является искомой, так как зависит от решения u. В работе дано описание класса капиллярных давлений, приводящих к треугольной матрице B.

Главной особенностью системы (1) является ее вырождение на решениях, т. е. потеря параболичности. Однако даже в случае невырождающейся матрицы B не существует законченной теории для систем вида (1). В [3] рассматриваются параболические системы с условиями $B_{12} = B_{21} = 0$, $B_{11} = B_{22}$. В работе [4] кроме требования ограниченности решений и требований $B_{21} = 0$, $\partial B_{22}/\partial u_1 = 0$ налагается также условие $\partial f_2/\partial u_1 = 0$. Отметим, что в указанных работах не учитывается ограничение на решение, следующее из физического смысла задачи:

$$0 \leqslant u_i \leqslant 1, \qquad u_1 + u_2 \leqslant 1. \tag{2}$$

В данной работе развивается теория невырождающихся параболических систем с ограничением (2), которая применяется для решения одной вырождающейся задачи, описывающей капиллярное вытеснение.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03-05-65299) и Международного фонда INTAS (код проекта 01-868).

1. Треугольный тензор капиллярной диффузии. В настоящее время не существует общепринятого термодинамического принципа, определяющего равновесное распределение давлений трех несмешивающихся капиллярных жидкостей в пористой среде. Поэтому представляется целесообразным рассмотреть некоторые критические случаи, в которых возможно определение давлений.

Каким бы ни было распределение давлений в фазах, оно оказывает влияние только на диффузию насыщенностей. Формулируемые ниже ограничения на тензор капиллярной диффузии соответствуют такому критическому случаю, когда диффузия одной из фаз определяется значением насыщенности этой фазы и не зависит от насыщенностей двух других фаз.

Рассматриваются одномерные горизонтальные течения трехфазной жидкости в пористой среде в ограниченной области $\Omega = \{-1 < x < 1\}$. Пусть u_1, u_2, u_3 — насыщенности фаз. Если плотности фаз постоянны, то баланс масс описывается уравнениями [5]

$$\frac{\partial}{\partial t}(mu_i) + \frac{\partial}{\partial x} v_i = 0, \tag{3}$$

где m — пористость; v_i — скорость фильтрации i-й фазы. Равенство

$$u_1 + u_2 + u_3 = 1 \tag{4}$$

следует из определения насыщенностей как объемных долей фаз. В приложениях используется закон Дарси [5]

$$v_i = -k\lambda_i p_{ix}, \qquad \lambda_i = \lambda_i(u_1, u_2), \tag{5}$$

где k — абсолютная проницаемость; λ_i — мобильность i-й фазы. Для давлений p_i в фазах выполняются соотношения

$$P_1(u_1, u_2) = p_1 - p_3, \qquad P_2(u_1, u_2) = p_2 - p_3,$$

где капиллярные давления P_i считаются заданными функциями u_1 и u_2.

Обозначим

$$\lambda = \sum_1^3 \lambda_i, \qquad f_i = \frac{\lambda_i}{\lambda}, \qquad v = \sum_1^3 v_i, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{6}$$

Тогда из (3) и (5) следует, что $v_x = 0$, т. е. v зависит только от t.

Сложение уравнений (5) дает равенство

$$-\frac{\partial p_3}{\partial x} = \frac{v}{\lambda} + \frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial P_2}{\partial x}. \tag{7}$$

Если ввести обозначение $p_3(1,t) - p_3(-1,t) = \Delta p_3$, то интегрирование равенства (7) приводит к следующему представлению для суммарной скорости:

$$v(t) = -\Big(\Delta p_3 + \int_{-1}^{1}\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial P_2}{\partial x}\Big)\,dx\Big)\Big/\int_{-1}^{1}\lambda^{-1}\,dx. \tag{8}$$

Поэтому равенства (5) можно записать в виде

$$v_1 = vf_1 + \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial P_2}{\partial x} - \frac{\lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)}{\lambda}\frac{\partial P_1}{\partial x},$$

$$v_2 = vf_2 + \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial P_1}{\partial x} - \frac{\lambda_2(\lambda_1+\lambda_3)}{\lambda}\frac{\partial P_2}{\partial x}.$$

Таким образом, из уравнений (3) получаем замкнутую систему уравнений для функций u_1 и u_2

$$u_{it} + v(t)f_i(u)_x = (B(u)_{ij}u_{jx})_x, \tag{9}$$

в которой $f_j(u_1, u_2)$ и $v(t)$ определены формулами (6) и (8), а матрица B имеет вид

$$\begin{aligned} &B_{11} = \frac{\lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)}{\lambda}\frac{\partial P_1}{\partial u_1} - \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial P_2}{\partial u_1}, \qquad B_{12} = -\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial P_2}{\partial u_2} + \frac{\lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)}{\lambda}\frac{\partial P_1}{\partial u_2},\\ &B_{21} = \frac{\lambda_2(\lambda_1+\lambda_3)}{\lambda}\frac{\partial P_2}{\partial u_1} - \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial P_1}{\partial u_1}, \qquad B_{22} = -\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial P_1}{\partial u_2} + \frac{\lambda_2(\lambda_1+\lambda_3)}{\lambda}\frac{\partial P_2}{\partial u_2}. \end{aligned} \tag{10}$$

Нелокальная система (9) описывает движение под действием перепада давления в одной из фаз на границах области течения.

Из условия (4) следует ограничение

$$u \in \Delta = \{u\colon \quad u \in \mathbb{R}^2, \quad 0 \leqslant u_i \leqslant 1, \quad u_1 + u_2 \leqslant 1\}, \qquad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что треугольник Δ можно трактовать как пересечение полуплоскостей:

$$\Delta = \bigcap_1^3 \{G_i(u) \leqslant 0\}, \qquad G_1 = -u_1, \quad G_2 = -u_2, \quad G_3 = u_1 + u_2 - 1. \tag{11}$$

Сформулируем предположения относительно эмпирических параметров (функций λ_i и P_i):

$$\lambda_i = \lambda_i(u_i) \geqslant 0, \qquad \lambda_i|_{u_i=0} = 0, \qquad i \in \{1,2,3\}; \tag{12}$$

$$B_{21} = 0, \qquad B_{11} \geqslant 0, \qquad B_{22} = B_{22}(u_2) \geqslant 0 \qquad \text{в} \quad \Delta. \tag{13}$$

Условие (12) является общепринятым, его обоснование можно найти, например, в [5]. Это условие, в частности, приводит к вырождению системы (9). Условие (13) означает, что первая и третья фазы не определяют диффузионный процесс во второй фазе [6, 7]. Равенства $B_{21} = 0$ и $B_{22} = B_{22}(u_2)$ представляют собой *капиллярно-диффузионную гипотезу* и могут быть записаны в виде

$$A\frac{\partial P_1}{\partial u_1} = \frac{\partial P_2}{\partial u_1}, \qquad \frac{\partial P_2}{\partial u_2} = A\frac{\partial P_1}{\partial u_2} + \frac{\lambda B_{22}(u_2)}{\lambda_2(\lambda_1+\lambda_3)}, \qquad A = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_3}. \tag{14}$$

В силу условий (14) система (9) упрощается. Действительно, справедливы формулы

$$\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial P_1}{\partial u_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial P_2}{\partial u_1} = \frac{\partial P_2}{\partial u_1}, \qquad \frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial P_1}{\partial u_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial P_2}{\partial u_2} = -\frac{B_{22}}{\lambda_2} + \frac{\partial P_2}{\partial u_2}.$$

Поэтому

$$\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial P_2}{\partial x} = \frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad F(u_2) = -\int_0^{u_2} \frac{B_{22}(s)}{\lambda_2(s)}\,ds.$$

Тогда формулу (8) можно записать в виде

$$v(t) = -(p_2 + F(u_2))\Big/\int_{-1}^{1} \lambda^{-1}\,dx\Big|_{-1}^{1}.$$

Будем считать, что разность $\Delta p_2 = p_2\big|_{x=-1}^{x=1}$ и значения насыщенности u_2 в конечных точках $x = \pm 1$ есть заданные функции времени. Поэтому в системе (9) $v(t)$ есть функционал от решения вида

$$v(t) = g_1(t)\Big/\int\limits_{-1}^{1} æ(u_1, u_2)\,dx \equiv g[t;u], \qquad g_1 = -\Delta p_2(t) - \Delta F(t), \qquad æ = \lambda^{-1},$$

где

$$\Delta F(t) = F(u_2(1,t)) - F(u_2(-1,t)).$$

Условием капиллярного вытеснения является равенство $\sum\limits_1^3 v_i = 0$, означающее, что движение одной из фаз противоположно движениям двух других фаз [8]. В частности, $v(t) \equiv 0$, если

$$p_2\big|_{x=-1} = p_2\big|_{x=1}, \qquad u_2\big|_{x=-1} = u_2\big|_{x=1}. \tag{15}$$

Из вывода нелокальной системы (9) следует, что условия (15) капиллярного вытеснения приводят к упрощенной системе

$$u_{it} = (B(u)_{ij} u_{jx})_x, \qquad u \in \Delta. \tag{16}$$

Заметим, что эти уравнения формально распадаются, так как второе уравнение не содержит функцию u_1. Вместе с тем в силу условия $u_2(t,x) \leqslant 1 - u_1(t,x)$ второе уравнение нельзя решать независимо от первого.

2. Мобильности и капиллярные давления. При заданных мобильностях $\lambda_i(u_1,u_2)$ $(i = 1,2,3)$ и коэффициенте $B_{22}(u_2)$ условия (14) представляют собой систему линейных уравнений относительно капиллярных давлений $P_i(u_1,u_2)$. Проведем анализ этой системы в важном для приложений случае, когда мобильности являются однородными функциями [5]:

$$\lambda_i = k_i u_i^n, \qquad k_i = \mathrm{const} > 0, \qquad n > 0. \tag{17}$$

Вначале рассмотрим однородную систему, когда $B_{22} = 0$. Применим алгоритм вычисления групп симметрий [9]. Если однородная система (14) допускает однопараметрическую группу с инфинитезимальным оператором

$$X = \zeta^1(u_1,u_2,P_1,P_2)\,\frac{\partial}{\partial u_1} + \zeta^2(\cdots)\,\frac{\partial}{\partial u_2} + \eta^1(\cdots)\,\frac{\partial}{\partial P_1} + \eta^2(\cdots)\,\frac{\partial}{\partial P_2},$$

то функции ζ^i и η^i удовлетворяют ограничениям

$$\zeta^1\,\frac{\partial A}{\partial u_1} + \zeta^2\,\frac{\partial A}{\partial u_2} + A\Big(\frac{\partial \eta^1}{\partial P_1} + A\,\frac{\partial \eta^1}{\partial P_2}\Big) = \frac{\partial \eta^2}{\partial P_1} + A\frac{\partial \eta^2}{\partial P_2},$$

$$\frac{\partial \eta^2}{\partial u_2} = A\,\frac{\partial \eta^1}{\partial u_2}, \qquad \frac{\partial \eta^2}{\partial u_1} = A\,\frac{\partial \eta^1}{\partial u_1}.$$

Из данных условий, в частности, следует, что система допускает группу с нетривиальным оператором

$$X = -\xi\,\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial u_2}, \qquad \xi = \frac{u_1}{1-u_2}.$$

Это означает, что при любом числе a преобразование переменных $(u_1,u_2) \to (u_1', u_2')$

$$u_1' = u_1 - a u_1/(1-u_2), \qquad u_2' = u_2 + a \qquad (a \in \mathbb{R})$$

переводит любое решение в некоторое решение той же однородной системы. В силу условий (17) функция $A(u)$ зависит только от одной переменной ξ. Легко проверить, что пара функций $P_1 = \varphi(\xi)$, $P_2 = \phi(\xi)$ является решением однородной системы (14), если $\phi'(\xi) = A(\xi)\varphi'(\xi)$. Найдем решение неоднородной системы (14) в случае, когда

$$B_{22} = \alpha u_2^n (1-u_2)^n, \qquad \alpha = \mathrm{const} \geqslant 0.$$

Будем искать решение в виде

$$P_1 = a(u_2)b(\xi) + \varphi(\xi), \qquad P_2 = a(u_2)B(\xi) + c(u_2) + \phi(\xi), \qquad B' = Ab'. \tag{18}$$

Подставляя эти представления в (14), находим

$$\begin{gathered} a'(u_2) = \frac{\alpha u_2^n}{k_1}, \qquad b(\xi) = \frac{k_1}{k_3(1-\xi)^{n-1}} - \frac{1}{\xi^{n-1}}, \\ B(\xi) = \frac{k_1}{k_3(1-\xi)^{n-1}}, \qquad c'(u_2) = \frac{\alpha(1-u_2)^n}{k_2}. \end{gathered} \tag{19}$$

Далее по формулам (10) определяется тензор капиллярной диффузии B:

$$\begin{gathered} B_{11} = k_3(\varphi'(\xi) + a(u_2)b'(\xi))A(\xi)(1-\xi)^n(1-u_2)^{n-1}, \\ B_{22} = \alpha u_2^n(1-u_2)^n, \qquad B_{12} = \xi(B_{11} - B_{22}), \qquad B_{21} = 0. \end{gathered} \tag{20}$$

Таким образом, если мобильности и капиллярные давления заданы формулами (17)–(19), то матрица B является треугольной и имеет вид (20). Неравенства (13) выполнены, если $\varphi'(\xi) \geqslant 0$.

3. Принцип максимума. Для системы (9) справедлив принцип максимума, известный как *принцип положительно инвариантных областей* [10]. Пусть насыщенности u_i $(i = 1, 2)$ удовлетворяют начальным и краевым условиям

$$u_i(0, x) = u_{i0}(x), \qquad u_i(t, \pm 1) = u_{i\pm}(t), \qquad u_0(x) \in \Delta, \quad u_\pm(t) \in \Delta. \tag{21}$$

Указанный принцип максимума заключается в утверждении: $u(t, x) \in \Delta$ при любых $(t, x) \in Q = (0, T) \times \Omega$. Ниже будет доказано включение $u \in \Delta$, но вначале проверим выполнение двух необходимых для этого условий [10]

$$B^{\mathrm{T}}\langle \nabla_u G_i \rangle = \mu_i \nabla_u G_i, \qquad (f')^{\mathrm{T}}\langle \nabla_u G_i \rangle = \alpha_i \nabla_u G_i, \qquad \text{если} \quad G_i(u) = 0, \tag{22}$$

где матрица B и вектор f заданы формулами (20), (6), (17). Условия (22) означают, что вектор нормали к границе $G_i(u) = 0$ треугольника Δ является собственным вектором матриц B^{T} и f'^{T} на границе $G_i(u) = 0$, где элементами матрицы f' являются числа $\partial f_i/\partial u_j$. При этом собственные числа μ_i должны быть неотрицательными.

В условиях, когда функции $G_i(u)$ заданы формулами (11), первое равенство в (22) равносильно трем следующим:

$$B_{12} = 0, \qquad B_{21} = 0, \qquad B_{11} = B_{12} + B_{22}$$

на отрезках $G_1 = 0$, $G_2 = 0$, $G_3 = 0$ соответственно. Эти равенства справедливы в силу определений коэффициентов B_{ij}.

Проверим равенство (22) для f' на отрезке $G_3(u) = 0$. Вектор $\nabla_u G_3$ является собственным вектором матрицы $(f')^{\mathrm{T}}$ только при условии

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_1} + \frac{\partial f_2}{\partial u_1} = \frac{\partial f_1}{\partial u_2} + \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \qquad \text{при} \quad u_1 + u_2 = 1.$$

В то же время это равенство является простым следствием условия (12) для λ_3:

$$\lambda_3(u_1, u_2) = 0 \qquad \text{при} \quad u_1 + u_2 = 1.$$

Аналогично проверяются два других условия на матрицу f'.

Для системы (16), описывающей капиллярное вытеснение, справедлив и другой принцип максимума, позволяющий доказать разрешимость задачи Дирихле (21) с условиями

$$0 < \delta \leqslant u_{i0}(x) \leqslant 1 - \delta, \qquad 0 < \delta \leqslant u_{i\pm}(t) \leqslant 1 - \delta. \tag{23}$$

Покажем, что найдется такое число $0 < \delta' \leqslant \delta$, что

$$0 < \delta' \leqslant u_i(t, x) \leqslant 1 - \delta'. \tag{24}$$

Действительно, в терминах функций ξ, u_2 система (16) записывается в виде

$$\xi_t = (B_{11}\xi_x)_x - \frac{\xi_x u_{2x}(B_{11} + B_{22})}{1 - u_2}, \qquad u_{2t} = (B_{22}(u_2)u_{2x})_x.$$

Для каждого их этих уравнений справедлив обычный принцип максимума [3]. При условиях (23) существует $\tilde{\delta} > 0$, такое что $\tilde{\delta} \leqslant \xi \leqslant 1 - \tilde{\delta}$ при $t = 0$, $x = \pm 1$. Теперь очевидно, что $\tilde{\delta} \leqslant \xi \leqslant 1 - \tilde{\delta}$ при всех $(t, x) \in Q$. Эта оценка вместе с очевидной оценкой $\delta \leqslant u_2 \leqslant 1 - \delta$ эквивалентны оценкам (24).

4. Приближенные решения. Для задачи (9), (21) построим приближенные решения, зависящие от параметров ε, ν, δ. Пусть h: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — гладкая функция, удовлетворяющая неравенству $\nabla_u G_i \cdot h(u) < 0$ $(i = 1, 2, 3)$ вблизи границы $\partial\Delta$ треугольника Δ.

В данном пункте предполагается следующая гладкость входных данных:

$$u_0(x) \in H^{2+\beta}(\overline{\Omega}), \qquad u_\pm(t) \in H^{1+\beta}([0, T]), \qquad 0 < \beta < 1.$$

Рассмотрим задачу

$$u_t + g[t; u]f(u)_x = (D^\nu u_x)_x + \varepsilon h, \qquad (t, x) \in Q; \tag{25}$$

$$\delta u_n + u = u_{\partial\varepsilon} \quad \text{при} \quad |x| = 1, \qquad u\big|_{t=0} = u_{0\varepsilon}(x). \tag{26}$$

Здесь

$$u_n\big|_{x=\pm 1} = \pm u_x, \qquad u_\partial\big|_{x=\pm 1} = u_\pm(t),$$

$$u_{i\partial\varepsilon} = (1 - \varepsilon)(\varepsilon/2 + u_{i\partial}), \qquad u_{i0\varepsilon} = (1 - \varepsilon)(\varepsilon/2 + u_{i0}), \qquad i = 1, 2.$$

Гладкая матрица D^ν удовлетворяет условиям

$$D^\nu \geqslant \nu, \quad D^\nu_{21} = 0, \qquad \big(D^{\nu\text{т}}\langle\nabla_u G_i\rangle - \mu_i \nabla_u G_i\big)\big|_{G_i(u)=0} = 0, \qquad \mu_i \geqslant 0. \tag{27}$$

В общем виде вектор-функция $f(u)$ задана формулами (6), (12). Далее в этом пункте индексы ν и ε для простоты опускаются.

В случае периодических краевых условий и при $g[t; u] \equiv 1$ невырождающаяся задача (25), (26) исследовалась в [6]. Поскольку в настоящей работе используется тот же метод, проведем исследование задачи (25), (26) схематично, выделяя основные этапы и останавливаясь на особенностях.

Шаг 1. Сформулируем утверждение.

Лемма 4.1. *Значения решения $u(t, x)$ лежат строго внутри треугольника Δ, если $u_0(x), u_\pm(t) \in \Delta$ при всех x, t.*

Доказательство. Следуя методу положительно инвариантных областей, обозначим $z^i = G_i(u)$. Докажем, что $z^i < 0$ для каждого i. По условиям леммы

$$\max_{x \in \Omega} z^i(0, x) < 0, \qquad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Допустим, найдется первый момент времени $t_1 > 0$, такой что

$$\max_{x \in \Omega} z^i(t_1, x) = z^i(t_1, x_0) = 0$$

для некоторого i. Имеется альтернатива: либо $|x_0| < 1$, либо $|x_0| = 1$. Случай $x_0 = 1$ невозможен. Действительно, поскольку $\delta z^i_x + z^i = -u^i_+$, то $z^i_x(t_1, 1) < 0$. В силу непрерывности найдется момент времени $t_0 \in (0, t_1)$, такой что $\max z^i(t_0, x) = 0$, причем максимум берется по всем $x \in \Omega$. Это противоречит выбору t_1. Аналогично устанавливается невозможность выполнения равенства $x_0 = -1$.

Рассмотрим случай $|x_0| < 1$. Умножим уравнение (25) на $\nabla_u G_i$, тогда ввиду условий (27) в точке (t_1, x_0) выполняется равенство

$$z^i_t + g[t; u]\alpha_i z^i_x = (\mu_i z^i_x)_x + \varepsilon h \cdot \nabla_u G_i. \tag{28}$$

По предположению $z^i(t_1, x_0) = \max z^i(\tau, y)$, причем максимум берется по всем $0 \leqslant \tau \leqslant t_1$, $|y| \leqslant 1$. Поэтому

$$z^i_x(t_1, x_0) = 0, \qquad z^i_{xx}(t_1, x_0) \leqslant 0, \qquad z^i_t(t_1, x_0) \geqslant 0. \tag{29}$$

Неравенство $h \cdot \nabla_u G_i < 0$ выполняется в точке (t_1, x_0) в силу выбора функции h. Тогда из уравнения (28) получается неравенство $z^i_t(t_1, x_0) < 0$, противоречащее (29).

Шаг 2. Справедлива оценка

$$\|u_x\|_{L^2(Q)} + \delta \sum_{\pm} \int\limits_0^T |u_x(t, \pm 1)|^2\, dt \leqslant c, \tag{30}$$

в которой постоянная c зависит от $\|\dot{u}_\pm\|_{L^1(0,T)}$, $\|h\|_{L^1(Q)}$, ν и не зависит от ε, δ. Для функции u_2 эта оценка следует из равенства

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega v_2^2\, dx + \int\limits_\Omega D_{22}|v_{2x}|^2\, dx = v_2(D_{22}(v_{2x} + w_{2x}) - gf_2)\big|_{-1}^{+1} + \\ + \int\limits_\Omega \big(v_{2x}(gf_2 - D_{22}w_{2x}) - w_{2t}v_2 + \varepsilon h_2 v_2\big)\, dx,$$

в котором

$$w = (1 - x)u_-/2 + (1 + x)u_+/2, \qquad v = u - w.$$

Затем аналогичное равенство получается для v_1 путем умножения первого уравнения системы (25) на u_1, и тем самым выводится оценка (30) для u_1.

Как следствие из уравнений (25) получаем равномерную по ε и δ оценку

$$\|u_t\|_{L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))} \leqslant c. \tag{31}$$

Шаг 3. При некоторой постоянной $\alpha \in (0, 1)$ справедлива оценка

$$|u_2|^{(\alpha)}_Q \equiv \|u_2\|_{H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q})} \leqslant c. \tag{32}$$

Здесь и далее постоянная c зависит от δ.

Доказательство основано на известном в теории линейных параболических уравнений методе срезок [3]. Введем гладкую функцию $0 \leqslant \zeta(t, x) \leqslant 1$, отличную от нуля лишь при $x \in K_\rho$ (K_ρ — открытый шар радиуса ρ с центром в $x^0 \in \overline{\Omega}$). Обозначим

$$\Omega_\rho = \overline{\Omega} \cap K_\rho = [x^0_-, x^0_+], \qquad x^0_+ = \min\{1, x^0 + \rho\}, \qquad x^0_- = \max\{-1, x^0 - \rho\}.$$

Умножим второе уравнение системы (25) на функцию

$$\zeta^2 \max\{u_2 - k, 0\} \equiv \zeta^2 u_2^{(k)}, \qquad k \in \mathbb{R}$$

и проинтегрируем по Ω_ρ. В результате получим равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_\rho}\zeta^2|u_2^{(k)}|^2\,dx+\int\limits_{\Omega_\rho}\zeta^2D_{22}|u_{2x}^{(k)}|^2\,dx=\zeta^2D_{22}u_{2x}u_2^{(k)}\big|_{x_-^0}^{x_+^0}-\zeta^2gf_2u_2^{(k)}\big|_{x_-^0}^{x_+^0}-$$

$$-\int\limits_{\Omega_\rho}\big(2\zeta\zeta_xD_{22}u_{2x}u_2^{(k)}-\zeta\zeta_t|u_2^{(k)}|^2-gf_2(2\zeta\zeta_xu_2^{(k)}+\zeta^2u_{2x}^{(k)})-\varepsilon h_2\zeta^2u_2^{(k)}\big)\,dx.$$

Заметим, что $D_{22}\geqslant\nu$, $\delta u_x\big|_{x=\pm1}=\pm(u_{\partial\varepsilon\pm}-u)\big|_{x=\pm1}$, и при малых ρ

$$\zeta^2D_{22}u_{2x}u_2^{(k)}\big|_{x_-^0}^{x_+^0}\leqslant\frac{1}{\delta}\,\zeta^2D_{22}u_2^{(k)}u_{2+}\big|_{x=1}+\frac{1}{\delta}\,\zeta^2D_{22}u_2^{(k)}u_{2-}\big|_{x=-1},$$

$$|\zeta^2v^{(k)}|_{|x|=1}\leqslant\Big|\int\limits_{\Omega_\rho}(\zeta^2v_x^{(k)}+2\zeta\zeta_xv^{(k)})\,dx\Big|.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_\rho}\zeta^2|u_2^{(k)}|^2\,dx+\nu\int\limits_{\Omega_\rho}\zeta^2|u_{2x}^{(k)}|^2\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\nu}{2}\int\limits_{\Omega_\rho}\zeta^2|u_{2x}^{(k)}|^2\,dx+c_1\int\limits_{\Omega_\rho}\big(|u_2^{(k)}|^2(|\zeta_x|^2+|\zeta\zeta_t|+\zeta^2)+\zeta^2\mathbf{1}_{A_{k,\rho}(t)}\big)\,dx,$$

где $A_{k,\rho}(t)$ — пересечение носителя функции $u_2^{(k)}$ с шаром K_ρ; через $\mathbf{1}_A$ обозначена характеристическая функция множества A. Последнее неравенство означает, что u_2 принадлежит классу $\mathcal{B}_2(Q,M,\gamma,r,\delta,k)$, где $r=6$ (см. формулу (7.5) в [3, гл. 2, § 7]). Следовательно, $u_2\in H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q})$ при некотором $\alpha\in(0,1)$.

Шаг 4. Справедлива оценка

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\Big\{\int\limits_{\Omega}u_{2x}^2\,dx+\delta\sum_{x=\pm1}u_{2x}^2\Big\}+\int\limits_{Q}(u_{2xx}^2+u_{2x}^4+u_{2t}^2)\,dx\,dt\leqslant c.$$

Ее вывод основан на умножении второго уравнения системы (25) на функцию $\zeta(x)$, обладающую указанными выше свойствами. При этом используются известное неравенство [3]

$$\int\limits_{K_\rho}\zeta^2v_x^4dx\leqslant16\mathrm{osc}^2\{v,K_\rho\}\int\limits_{K_\rho}(2\zeta^2v_{xx}^2+\zeta^2v_x^2)\,dx$$

и оценка

$$\mathrm{osc}^2\{u_2,K_\rho\}\leqslant c\rho^{\alpha_1},\qquad\alpha_1<\alpha,$$

которая следует из (32).

Шаг 5. Справедливы оценки $|u_1|_Q^{(\alpha)}\leqslant c$ и

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\Big\{\int\limits_{\Omega}u_{1x}^2\,dx+\delta\sum_{x=\pm1}|u_{1x}|^2\Big\}+\int\limits_{Q}(u_{1xx}^2+u_{1x}^4+u_{1t}^2)\,dx\,dt\leqslant c.$$

Доказательство такое же, как в случае функции u_2, с учетом полученных ранее оценок.

Шаг 6. Справедливы оценки

$$\int\limits_Q |u_{ix}|^6\,dx\,dt \leqslant c, \qquad \int\limits_Q |u_{ix}u_{ixx}|^2\,dx\,dt \leqslant c.$$

В силу неравенств

$$\int\limits_Q |u_{ix}|^6\,dx\,dt \leqslant \int\limits_0^T \max_{x\in\Omega} |u_{ix}|^4 \int\limits_\Omega |u_{ix}|^2\,dx\,dt,$$

$$\max_{|x|\leqslant 1} v_x^4 \leqslant (1/2)\|v_x\|^4_{L^2(\Omega)} + 8\|v_{xx}\|^2_{L^2(\Omega)}\|v_x\|^2_{L^2(\Omega)}$$

имеем

$$\|u_{ix}\|^6_{L^6(Q)} \leqslant (1/2)\|u_{ix}\|^4_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}(1+\|u_{ixx}\|^2_{L^2(Q)}) \leqslant c.$$

Таким образом, первая из сформулированных оценок доказана. Вторая оценка для функции u_2 доказывается следующим образом. Второе уравнение системы (25) можно рассматривать как линейное для функции u_2 и записать в виде

$$u_{2t} = D_{22}u_{2xx} + F,$$

$$F = \frac{\partial D_{22}}{\partial u_1}\,u_{1x}u_{2x} + \frac{\partial D_{22}}{\partial u_2}\,|u_{2x}|^2 - g[t;u]\Big(\frac{\partial f_2}{\partial u_1}\,u_{1x} + \frac{\partial f_2}{\partial u_2}\,u_{2x}\Big) + \varepsilon h_2.$$

Из сказанного выше следует, что $\|F\|_{L^3(Q)} \leqslant c$. Поэтому согласно теории линейных уравнений [3] имеем

$$\int\limits_Q |u_{2xx}|^3\,dx\,dt \leqslant c.$$

Тогда вторая оценка для функции u_2 следует из неравенства

$$\int\limits_Q |uv|^2\,dx\,dt \leqslant \Big(\int\limits_Q |u|^6\,dx\,dt\Big)^{1/3}\Big(\int\limits_Q |v|^3\,dx\,dt\Big)^{2/3}.$$

Аналогично рассматривается функция u_1.

Шаг 7. Существует постоянная $\alpha \in (0,1)$, такая что $|u_{ix}|_Q^{(\alpha)} \leqslant c$.

При доказательстве данных оценок используется краевое условие (26), которое позволяет считать производные u_{ix} ограниченными на границе области Ω и действовать так же, как в случае теории линейных параболических уравнений. Действительно, функция $v = u_{2x}$ есть решение уравнения

$$v_t = (D_{22}(u_2)v_x)_x + F + H_x,$$

$$F = \frac{\partial D_{22}}{\partial u_1}\,u_{1x}u_{2xx} + \frac{\partial D_{22}}{\partial u_1}\,u_{1xx}u_{2x} + 2\,\frac{\partial D_{22}}{\partial u_2}\,u_{2x}u_{2xx} + \\ + \frac{\partial^2 D_{22}}{\partial u_1^2}\,u_{1x}^2u_{2x} + 2\,\frac{\partial^2 D_{22}}{\partial u_1\partial u_2}\,u_{1x}u_{2x}^2 + \frac{\partial^2 D_{22}}{\partial u_2^2}\,(u_{2x})^3,$$

$$H = -g[t;u]\,\frac{\partial f_2}{\partial u_1}\,u_{1x} - g[t;u]\,\frac{\partial f_2}{\partial u_2}u_{2x} + \varepsilon h_2.$$

В силу полученных выше оценок имеем

$$\|F\|_{q,r,Q} \equiv \Big(\int \Big(\int_\Omega F^q \Big)^{r/q} dt \Big)^{1/r} \leqslant c, \qquad \|H^2\|_{q,r,Q} \leqslant c$$

при $q = 2$, $r = 2$. Постоянные q, r удовлетворяют условиям

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{2q} = 1 - æ, \quad 0 < æ < \frac{1}{2}, \quad q \in [1, \infty], \quad r \in \Big[\frac{1}{1-æ}, \frac{2}{1-2æ}\Big], \quad æ = \frac{1}{4}.$$

Из краевых условий имеем $\|v(t, \pm 1)\|_{H^{\alpha/2}([0,T])} \leqslant c$, $\alpha \leqslant \beta$. Согласно линейной теории [3, гл. 3, § 10] при некотором α имеет место оценка $|v|_Q^{(\alpha)} \leqslant c$. Аналогично доказывается оценка для функции u_1.

Далее предполагается, что начальные и краевые данные в (26) удовлетворяют условиям согласования

$$\pm\delta u_0'(\pm 1) + u_0(\pm 1) = u_\pm(0). \tag{33}$$

При этих условиях выводится априорная оценка

$$|u|_Q^{(2+\beta)} \leqslant c, \tag{34}$$

равномерная по ε. Далее, так же как в [6], применяется теорема Лере — Шаудера о неподвижной точке и доказывается существование и единственность приближенных решений.

Теорема 4.1. *Пусть функции $f(u)$, $\nabla_u f$, $D_{ij}(u)$, $\nabla_u D_{ij}$, $\partial^2 D_{ij}/\partial u_i \partial u_j$, $g_1(t)$, $h(u)$ удовлетворяют условию гёльдеровской непрерывности с показателем $\beta \in (0,1)$ и выполнены условия согласования* (33). *Тогда задача* (25), (26) *имеет единственное решение $u(t,x) \in H^{2+\beta, 1+\beta/2}(\bar{Q})$, такое что $\boldsymbol{u}(t,x) \in \Delta$ для всех $(t,x) \in Q$.*

Следствие. Так как оценка (34) не зависит от ε, то теорема 4.1 остается справедливой и при $\varepsilon = 0$.

5. Вырождающаяся задача капиллярного вытеснения. В данном пункте изучается система (16) с условиями

$$u\Big|_{x=\pm 1} = u_\pm(t), \qquad u\Big|_{t=0} = u_0(x). \tag{35}$$

Рассмотрим приближенную невырождающуюся задачу

$$u_t = (D^\nu(u) u_x)_x,$$

$$\nu u_n + u = u_\partial^\nu \quad \text{при} \quad |x| = 1, \qquad u|_{t=0} = u_0^\nu(x),$$

где

$$D_{11}^\nu = \nu + \chi_\nu(u_2) B_{11}, \quad B_{22}^\nu = \nu + \chi_\nu(u_2) B_{22}, \quad B_{12}^\nu = \chi_\nu(u_2)\xi(B_{11} - B_{22}),$$

$$B_{21}^\nu = 0, \quad u_0^\nu \in H^{2+\beta}(\overline{\Omega}), \quad u_0^\nu(x) \in \Delta, \quad u_\pm^\nu \in H^{1+\beta/2}([0,T]), \quad u_\pm^\nu(t) \in \Delta,$$

$$\pm\nu u_0^\nu(\pm 1) + u_0^\nu(\pm 1) = u_\pm^\nu(0),$$

$$\|u_\pm^\nu - u_\pm\|_{W^{1,1}(0,T)} \to 0, \quad \|u_0^\nu - u_0\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \quad \text{при} \quad \nu \downarrow 0,$$

$\chi_\nu(u_2)$ — гладкая функция:

$$\chi_\nu(u_2) = 1, \quad \text{если} \quad 0 \leqslant u_2 \leqslant 1 - \nu, \qquad \chi_\nu(u_2) = 0, \quad \text{если} \quad 1 - \nu/2 \leqslant u_2 \leqslant 1.$$

Функция $\xi(u_1, u_2)$ разрывна в точке $(0,1)$, поэтому вводится функция $\chi_\nu(u_2)$, чтобы обеспечить регулярность в треугольнике Δ матрицы B^ν (матрица B задана формулами (20)).

Пусть выполнены условия невырожденности (23) начальных и краевых данных. Как показано выше, задача (16), (35) имеет единственное классическое решение u^ν с очевидной оценкой $\delta \leqslant u_2^\nu(t,x) \leqslant 1-\delta$. Поэтому при достаточно малых ν выполняются равенства

$$D_{11}^\nu = \nu + B_{11}, \qquad D_{22}^\nu = \nu + B_{22}, \qquad D_{12}^\nu = \xi(D_{11}^\nu - D_{22}^\nu). \tag{36}$$

Так как $D_{22}^\nu(u^\nu) \geqslant \delta_1 > 0$ равномерно по ν, то из (30), (31) следуют равномерные по ν оценки

$$\|u_{2x}^\nu\|_{L^2(Q)} \leqslant c, \qquad \|u_{2t}^\nu\|_{L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))} \leqslant c. \tag{37}$$

Ввиду формул (36) функция $\xi = u_1^\nu/(1-u_2^\nu)$ является решением задачи

$$\xi_t = (D_{11}^\nu \xi_x)_x - \xi_x u_{2x}^\nu (D_{11}^\nu + D_{22}^\nu)/(1-u_2^\nu),$$

$$\frac{\nu(1-u_2^\nu)}{1-u_\pm^\nu}\,\xi_n + \xi = \xi_\pm \qquad \text{при} \quad x = \pm 1, \quad \xi\big|_{t=0} = \xi_0(x).$$

В силу условий (23) согласно принципу максимума можно считать, что $\delta \leqslant \xi(t,x) \leqslant 1-\delta$ равномерно по ν. Очевидно, что имеют место равномерные по ν оценки

$$\delta^2 \leqslant u_1^\nu(t,x) \leqslant (1-\delta)^2, \qquad D_{11}^\nu \geqslant \delta_2 > 0.$$

Из (30), (31) следует, что

$$\|u_{1x}^\nu\|_{L^2(Q)} \leqslant c, \qquad \|u_{1t}^\nu\|_{L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))} \leqslant c \tag{38}$$

равномерно по ν.

Согласно теореме Обена — Лионса оценки (37), (38) означают существование некоторой последовательности решений $u^n \equiv u^{\nu_n}$ и предельной вектор-функции u, таких что $u^n(t,x) \to u(t,x)$ почти всюду в Q, $u_x^n \to u_x$ слабо в $L^2(Q)$. Таким образом, доказано, что задача (16), (35) имеет слабое решение. Этот результат можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 5.1. *Пусть матрица B удовлетворяет условиям теоремы* 4.1*, начальные и граничные данные удовлетворяют условиям* (23) *и* $u_{i\pm}(t) \in W^{1,1}(0,T)$. *Тогда задача* (16), (35) *имеет решение* (u_1, u_2), *такое что*

$$u \in L^\infty(Q) \cap L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega)), \qquad u_t \in L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))$$

и

$$\int\limits_Q \Big(u_i\varphi_t - B_{ij}(u)\,\frac{\partial u_j}{\partial x}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big)\,dx\,dt + \int\limits_\Omega u_{i0}(x)\varphi(0,x)\,dx = 0 \qquad (i = 1,2)$$

для любой функции $\varphi \in L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)) \cap W^{1,2}(Q)$. *При этом функции* u_i *удовлетворяют неравенствам* (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Варченко А. Н., Зазовский А. Ф.** Трехфазная фильтрация несмешивающихся жидкостей. М.: ВИНИТИ, 1991. С. 98–154. (Итоги науки и техники. Сер. Комплекс. и спец. разделы механики; Т. 4).
2. **Chen Z., Ewing R. E.** Comparison of various formulations of three-phase flow in porous media // J. Comput. Phys. 1997. V. 132. P. 362–373.
3. **Ladyženskaja O. A., Solonnikov V. A., Ural'ceva N. N.** Linear and quasi-linear equations of parabolic type. Rhode Island: Providence, 1968.

4. **Amann H.** Dynamic theory of quasi-linear parabolic systems. Pt 3. Global existence // Math. Z. 1989. Bd 202. S. 219–250.
5. **Allen M. B., Behie J. B., Trangenstein J. A.** Multiphase flows in porous media: Mechanics, mathematics and numerics. N. Y.: Springer-Verlag, 1988. (Lecture Notes Engng; N 34).
6. **Шелухин В. В.** Об одной модели фильтрации трехфазной капиллярной жидкости// Динамика сплошной среды / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 2002. Вып. 120. С. 73–78.
7. **Шелухин В. В.** Проблемы моделирования течений трехфазных капиллярных жидкостей в пористой среде // Вычисл. технологии. 2002. Т. 7. С. 301–306: Вестн. Казах. гос. нац. ун-та. 2002. № 4. С. 301–306. Совмест. вып. Ч. 4.
8. **Barenblatt G. I., Entov V. M., Ryzhik V. M.** Theory of fluid flows through natural rocks. Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1990.
9. **Ovsiannikov L. V.** Group analysis of differential equations. N. Y.: Acad. Press, 1982.
10. **Smoller J.** Shock waves and reaction-diffusion equations. N. Y.: Springer-Verlag, 1983.

Поступила в редакцию 26/III 2003 г.