

УДК 517.983.54

Решение обратной граничной задачи теплообмена для полого цилиндра*

А.И. Сидикова¹, А.С. Сушков²

¹Южно-Уральский государственный университет, пр. Ленина, 76, Челябинск, 454080

²Челябинский государственный университет, ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск, 454001

E-mails: sidikovaai@susu.ru (Сидикова А.И.), mesocyclon@yandex.ru (Сушков А.С.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 3, Vol. 16, 2023.

Сидикова А.И., Сушков А.С. Решение обратной граничной задачи теплообмена для полого цилиндра // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2023. — Т. 26, № 3. — С. 331–344.

В статье решается задача об определении температуры на внутренней стенке полого цилиндра. При помощи преобразования Фурье по времени задача сведена к обыкновенному дифференциальному уравнению, с помощью которого был найден Фурье-образ точного решения искомой обратной граничной задачи. Для применения преобразования Фурье по времени искомое решение было умножено на e^{-t} и сведено к двум некорректным задачам. В работе рассмотрен метод проекционной регуляризации, позволяющий получить устойчивое решение задачи, а также получена точная по порядку оценка погрешности приближенного решения.

DOI: 10.15372/SJNM20230308

Ключевые слова: оценка погрешности, преобразование Фурье, некорректная задача.

Sidikova A.I., Sushkov A.S. Solution of the inverse boundary problem of heat exchange for a hollow cylinder // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2023. — Vol. 26, № 3. — P. 331–344.

The article solves the problem of determining the temperature on the inner wall of a hollow cylinder. Using a time Fourier transform, the problem is reduced to an ordinary differential equation, with the help of which the Fourier transform of an exact solution of the inverse boundary value problem is found. A projection regularization method is considered, which makes it possible to obtain a stable solution to the problem and an accurate in order of magnitude estimate of the error of the approximate solution. Since high accuracy requirements are imposed on solutions of such problems in numerical calculations, an algorithm is developed to improve the accuracy and reliability of processing the results of thermal test data. To check the performance of the algorithm, test calculations are carried out.

Keywords: error estimate, Fourier transform, ill-posed problem.

Введение

Среди задач тепловой диагностики, возникающих в технических конструкциях, особое место занимают задачи, в которых возникает необходимость непрерывной оценки температуры внутренней поверхности объекта, на которой непосредственные измерения невозможны. Например, это проблемы контроля температуры двигателей летательных

*Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (государственное задание FENU-2020-0022).

аппаратов, температуры поверхности лопаток турбин, геофизические задачи. Постановке и исследованию подобных задач посвящены работы [1–7]. Для практического использования решения этих задач необходимо знать оценки погрешности решений и, по возможности, более точные. Разработка оптимальных методов решения обратных граничных задач и получение оценок погрешности этих методов началась сравнительно недавно [8–13].

Целью данной работы является получение оценки точности приближенного решения обратной граничной задачи для полого цилиндра. Основной трудностью при решении и исследовании данной задачи является работа с бесселевыми функциями, что усложняет технику получения оценки погрешности. При получении оценки погрешности важную роль сыграло преобразование Фурье по времени. Для применения преобразования Фурье искомое решение было умножено на экспоненту. Данный подход уже использовался в работе [13] при решении обратной задачи тепловой диагностики с разрывным коэффициентом. Обратная граничная задача в более общей постановке была исследована с применением преобразования Фурье в работе [14].

В статье исследуется одномерная обратная задача теплообмена в полом цилиндре с внутренним и внешним радиусами r_0 и r_2 . При этом доступно измерение температуры при r_1 , $r_0 \leq r_1 \leq r_2$, и требуется определить граничное значение при $r = r_0$. Методом проекционной регуляризации получена точная по порядку оценка погрешности приближенного решения исследуемой задачи. Метод проекционной регуляризации использует преобразование Фурье по t , обрезая при этом высокочастотные гармоники, которые приводят к неустойчивости задачи. Усечение происходит за счет выбора параметра регуляризации по схеме М.М. Лаврентьева [15].

1. Постановка обратной задачи

Пусть тепловой процесс описывается уравнением

$$\frac{\partial u(r, t)}{\partial t} = a^2 \left\{ \frac{\partial^2 u(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} \right\}, \quad r_0 < r < r_2, \quad t > 0, \quad (1)$$

решение $u(r, t) \in C([0, 1] \times [0, \infty)) \cap C^{2,1}((0, 1) \times (0, \infty))$ и удовлетворяет следующим начальному и граничным условиям:

$$u(r, 0) = 0, \quad r_0 \leq r \leq r_2, \quad (2)$$

$$u(r_0, t) = q(t), \quad t \geq 0, \quad (3)$$

$$u(r_2, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (4)$$

где $q(t) \in C^2[0, +\infty)$, $q(0) = q'(0) = 0$ и существуют числа b , b_1 , t_0 и $\gamma_0 \in (0, 1]$ такие, что для любого $t \geq t_0$:

$$|q(t)|^2 \leq b^2 / (1 + t^2)^{\frac{1}{2}(1+\gamma_0)}, \quad \sup_{t \geq 0} \{|q'(t)|, |q''(t)|\} \leq b_1. \quad (5)$$

Отметим, что условия, наложенные на функцию $q(t)$, использовались в работе [13].

Пусть функция $q(t)$ нам не известна и подлежит определению, а вместо нее в точке $r_1 \in (r_0, r_2)$ измеряется температура $f(t)$, соответствующая данному процессу,

$$u(r_1, t) = f(t), \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Пусть $C[0, \infty)$ — множество непрерывных ограниченных на полупрямой $[0, \infty)$ функций. Предположим, что при $f(t) \in C[0, \infty)$ существует решение $q(t)$ обратной задачи (1), (2), (4), (6), удовлетворяющее условию (5), а при подстановке функции $q(t)$ в условие (3) прямой задачи (1)–(4) решение $u(r, t)$ этой задачи будет удовлетворять условию (6), но вместо функции $f(t)$ нам даны некоторое приближение $f_\delta(t) \in L_2[0, \infty) \cap L_1[0, \infty)$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что

$$\|e^{-t} \cdot (f_\delta(t) - f(t))\|_{L_2[0, \infty)} \leq \delta. \quad (7)$$

Требуется, используя f_δ , δ и условие (7), определить функцию $q_\delta(t)$ и оценить величину погрешности $\|q_\delta(t) - q(t)\|_{L_2[0, \infty)}$. Для этого необходимо введение класса равномерной регуляризации и дополнительного условия о принадлежности точного решения этому классу, а также при решении обратной задачи необходимо использовать семейство операторов, равномерно регуляризующих решение обратной задачи на данном классе корректности [16].

1.1. Сведение обратной граничной задачи (1), (2), (4), (6), (7) к задаче, для которой применимо преобразование Фурье по t

Так как для решения поставленной задачи будет использовано преобразование Фурье по t , то сделаем замену

$$v(r, t) = e^{-t} \cdot u(r, t), \quad r_0 \leq r \leq r_2, \quad t \geq 0.$$

Отметим, что указанная замена использовалась ранее в работе [13] при решении обратной задачи теплопроводности для композиционных материалов. После замены задача сведется к следующей:

$$\frac{\partial v(r, t)}{\partial t} = a^2 \left\{ \frac{\partial^2 v(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v(r, t)}{\partial r} \right\} - v(r, t), \quad r_0 < r < r_2, \quad t > 0, \quad (8)$$

$$v(r, 0) = 0, \quad r_0 \leq r \leq r_2, \quad (9)$$

$$v(r_0, t) = h(t), \quad h(t) = q(t) \cdot e^{-t}, \quad t \geq 0, \quad (10)$$

$$v(r_2, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (11)$$

Из (5) будет следовать, что

$$h(t) \in W_2^2[0, \infty), \quad (12)$$

где $W_2^2[0, \infty)$ — пространство Соболева:

$$W_2^2[0, \infty) = \{h(t) : h(t), h'(t) \in C[0, \infty), h''(t) \in L_2[0, \infty), h(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0\},$$

$$\|\cdot\|_{W_2^2[0, \infty)}^2 = \int_0^\infty (|h(t)|^2 + |h''(t)|^2) dt.$$

Поставим обратную задачу к преобразованной (8)–(11).

Введем класс равномерной регуляризации M_d , определяемый формулой

$$M_d = \left\{ h(t) : h(t) \in L_2[0, \infty), \int_0^{+\infty} |h(t)|^2 dt + \int_0^{+\infty} |h'(t)|^2 dt \leq d^2 \right\}, \quad d \geq 1, \quad (13)$$

$h'(t)$ — обобщенная производная в смысле С.Л. Соболева.

Функцию $h(t)$, определяемую формулой (10), будем считать неизвестной. Вместо нее дана функция $g(t)$:

$$g(t) = v(r_1, t). \quad (14)$$

Так же как в задаче (1), (2), (4), (6), эту функцию будем считать заданной приближенно. В дальнейшем оценку погрешности приближенного решения обратной задачи (1), (2), (4), (6) будем искать в образах Фурье:

$$\|g_\delta(t) - g(t)\|_{L_2[0, \infty)} \leq \delta.$$

Пусть $\overline{H} = L_2[0, \infty) + iL_2[0, \infty)$ над полем комплексных чисел, а F — изометричный оператор, отображающий $L_2[0; \infty)$ в $\overline{H}$ и определяемый формулой

$$\hat{h}(\tau) := F[h(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty h(t) \cdot e^{-it\tau} dt, \quad h(t) \in L_1[0; \infty) \cap L_2[0; \infty).$$

Отметим, что введенное преобразование для функции $h(t)$ совпадает со стандартным преобразованием Фурье функции

$$\tilde{h}(t) = \begin{cases} h(t); & t > 0, \\ 0; & t \leq 0. \end{cases}$$

Тем самым все стандартные свойства введенного преобразования совпадают с аналогичными свойствами преобразования Фурье.

После преобразования Фурье по t сведем эту задачу к следующей:

$$\frac{\partial^2 \hat{v}(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{v}(r, \tau)}{\partial r} - \frac{1 + i\tau}{a^2} \hat{v}(r, \tau) = 0, \quad r_0 < r < r_2; \quad -\infty < \tau < \infty, \quad (15)$$

$$\hat{v}(r, \tau) = F[v(r, t)],$$

$$\hat{v}(r_1, \tau) = \hat{g}(\tau), \quad r_1 \in (r_0, r_2), \quad (16)$$

$$\hat{g}(\tau) = F[g(t)],$$

$$\hat{v}(r_2, \tau) = 0, \quad -\infty < \tau < \infty. \quad (17)$$

Решение уравнения (15) имеет вид

$$\hat{v}(r, \tau) = A(\tau) I_0\left(\frac{r\sqrt{1+i\tau}}{a}\right) + B(\tau) K_0\left(\frac{r\sqrt{1+i\tau}}{a}\right),$$

где $I_0\left(\frac{r\sqrt{1+i\tau}}{a}\right)$, $K_0\left(\frac{r\sqrt{1+i\tau}}{a}\right)$ — функции Бесселя мнимого аргумента [19, гл. 3, п. 3.7, с. 91], $A(\tau)$, $B(\tau)$ — функции, определяемые формулами (16), (17).

Требуется определить функцию $\hat{h}(\tau) = \hat{v}(r_0, \tau)$.

Решая задачу (15)–(17), сведем ее к следующей формуле:

$$T[\hat{g}(\tau)] = Q(\tau) \hat{g}(\tau) = \hat{h}(\tau), \quad \tau \in (-\infty, \infty), \quad (18)$$

$$Q(\tau) = \frac{I_0\left(\frac{r_2\sqrt{1+i\tau}}{a}\right)K_0\left(\frac{r_0\sqrt{1+i\tau}}{a}\right) - K_0\left(\frac{r_2\sqrt{1+i\tau}}{a}\right)I_0\left(\frac{r_0\sqrt{1+i\tau}}{a}\right)}{I_0\left(\frac{r_2\sqrt{1+i\tau}}{a}\right)K_0\left(\frac{r_1\sqrt{1+i\tau}}{a}\right) - I_0\left(\frac{r_1\sqrt{1+i\tau}}{a}\right)K_0\left(\frac{r_2\sqrt{1+i\tau}}{a}\right)}. \quad (19)$$

Пусть $\hat{g}_\delta(\tau) = F[g_\delta(t)]$. Тогда на основании теоремы Планшереля [18, гл. VIII, § 5]:

$$\|\hat{g}_\delta(\tau) - \hat{g}(\tau)\|_{\bar{H}} \leq \delta. \quad (20)$$

Множество M_d при преобразовании F перейдет в множество $\hat{M}_d$, определяемое формулой

$$\hat{M}_d = \left\{ \hat{h}(\tau) : \hat{h}(\tau) \in L_2[0, \infty), \int_0^\infty (1 + \tau^2) |\hat{h}(\tau)|^2 d\tau \leq 2d^2 \right\}. \quad (21)$$

Из того, что $h(t) \in M_d$, получаем

$$\hat{h}(\tau) \in \hat{M}_d, \quad \hat{M}_d \supset F[M_d]. \quad (22)$$

В следующей лемме получим двусторонние оценки для функций $\left| I_0\left(\frac{r\sqrt{1+i\tau}}{a}\right) \right|$ и $\left| K_0\left(\frac{r\sqrt{1+i\tau}}{a}\right) \right|$.

Лемма 1. *Существуют числа $\tau_0 > 0$ и $c_1(\tau_0)$, $c_2(\tau_0)$, $c_3(\tau_0)$, $c_4(\tau_0) > 0$ такие, что для любых τ , $|\tau| \geq \tau_0$, справедливы соотношения:*

$$\frac{c_2(\tau_0) \cdot e^{r\sqrt{\frac{\sqrt{1+\tau^2}+1}{2a^2}}}}{\sqrt{2\pi r} \sqrt[8]{1+\tau^2}} \leq \left| I_0\left(\frac{r\sqrt{1+i\tau}}{a}\right) \right| \leq \frac{c_1(\tau_0) \cdot e^{r\sqrt{\frac{\sqrt{1+\tau^2}+1}{2a^2}}}}{\sqrt{2\pi r} \sqrt[8]{1+\tau^2}}. \quad (23)$$

$$\frac{c_4(\tau_0) \sqrt{\pi} \cdot e^{-r\sqrt{\frac{\sqrt{1+\tau^2}+1}{2a^2}}}}{\sqrt{2r} \sqrt[8]{1+\tau^2}} \leq \left| K_0\left(\frac{r\sqrt{1+i\tau}}{a}\right) \right| \leq \frac{c_3(\tau_0) \sqrt{\pi} \cdot e^{-r\sqrt{\frac{\sqrt{1+\tau^2}+1}{2a^2}}}}{\sqrt{2r} \sqrt[8]{1+\tau^2}}. \quad (24)$$

Доказательство. Для доказательства леммы воспользуемся формулой

$$\frac{\sqrt{1+i\tau}}{a} = \sqrt{\frac{\sqrt{1+\tau^2}+1}{2a^2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{1+\tau^2}-1}{2a^2}},$$

а также асимптотическим представлением функций $I_0(z)$ и $K_0(z)$ [20, гл. 5, § 3, с. 75]:

$$I_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \cdot \exp\left(z + \frac{1}{8z} + \frac{1}{16z^2} + \frac{25}{384z^3} + \dots\right),$$

$$K_0(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \exp\left(-z - \frac{1^2}{1!8z} + \frac{1^2 3^2}{2!(8z)^2} - \frac{1^2 3^2 5^2}{3!(8z)^3} + \dots\right), \quad z = x + iy.$$

Пусть $z(\tau) = x(\tau) + iy(\tau)$, где $x(\tau) = \sqrt{\frac{\sqrt{1+\tau^2}+1}{2a^2}}$, $y(\tau) = \sqrt{\frac{\sqrt{1+\tau^2}-1}{2a^2}}$,

$$|z(\tau)| = \sqrt{x^2(\tau) + y^2(\tau)} = \sqrt[4]{1+\tau^2}/a, \quad \varphi = \arg z.$$

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{x(\tau)}{|z(\tau)|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}}, \\ \sin \varphi = \frac{y(\tau)}{|z(\tau)|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}}. \end{cases}$$

Из последних соотношений получим $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \varphi = 1$, $0 < \varphi < \pi/2$, а $\sqrt{z(\tau)} = \frac{\sqrt[8]{1+\tau^2}}{\sqrt{a}} \cdot e^{\frac{i\pi}{8}}$.

В результате асимптотическое разложение $I_0\left(\frac{r\sqrt{1+i\tau}}{a}\right)$ может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} I_0\left(\frac{r\sqrt{1+i\tau}}{a}\right) &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi r} \sqrt[8]{1+\tau^2}} \exp\left(r\sqrt{\frac{\sqrt{1+\tau^2}+1}{2a^2}} + ir\sqrt{\frac{\sqrt{1+\tau^2}-1}{2a^2}} - \frac{i\pi}{8} + \right. \\ &\quad \left. \frac{a}{8\sqrt{2}r} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} + \frac{1}{1+\tau^2}} - \frac{ai}{8\sqrt{2}r} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} - \frac{1}{1+\tau^2}} + \right. \\ &\quad \left. \frac{a^2}{16r^2(1+\tau^2)} - \frac{a^2 i|\tau|}{16r^2(1+\tau^2)} + \dots\right) \\ &= \frac{\sqrt{a} \cdot e^{\beta}}{\sqrt{2\pi r} \sqrt[8]{1+\tau^2}} (\cos \theta + i \sin \theta), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \beta &= r\sqrt{\frac{\sqrt{1+\tau^2}+1}{2a^2}} + \frac{a}{8\sqrt{2}r} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} + \frac{1}{1+\tau^2}} + \frac{a^2}{16r^2(1+\tau^2)} + \dots, \\ \theta &= r\sqrt{\frac{\sqrt{1+\tau^2}-1}{2a^2}} - \frac{\pi}{8} - \frac{a}{8\sqrt{2}r} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} - \frac{1}{1+\tau^2}} - \frac{a^2|\tau|}{16r^2(1+\tau^2)} - \dots. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$I_0\left(\frac{r\sqrt{1+i\tau}}{a}\right) = \frac{e^{r\sqrt{\frac{\sqrt{1+\tau^2}+1}{2a^2}}}}{\sqrt{2\pi r} \sqrt[8]{1+\tau^2}} [1 + O(\tau^{-1})], \quad \tau \in (-\infty, \infty). \quad (25)$$

Аналогично асимптотическое выражение для $K_0\left(\frac{r\sqrt{1+i\tau}}{a}\right)$ есть

$$\begin{aligned} K_0\left(\frac{r\sqrt{1+i\tau}}{a}\right) &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2r} \sqrt[8]{1+\tau^2}} \left(-r\sqrt{\frac{\sqrt{1+\tau^2}+1}{2a^2}} - ir\sqrt{\frac{\sqrt{1+\tau^2}-1}{2a^2}} - \frac{i\pi}{8} - \right. \\ &\quad \left. \frac{a}{8\sqrt{2}r} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} + \frac{1}{1+\tau^2}} + \frac{ai}{8\sqrt{2}r} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} - \frac{1}{1+\tau^2}} + \dots\right). \end{aligned}$$

Откуда получим

$$K_0\left(\frac{r\sqrt{1+i\tau}}{a}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2r} \sqrt[8]{1+\tau^2}} \cdot e^{-r\sqrt{\frac{\sqrt{1+\tau^2}-1}{2a^2}}} [1 + O(\tau^{-1})], \quad \tau \in (-\infty, \infty). \quad (26)$$

Из асимптотических представлений функций $I_0\left(\frac{r\sqrt{1+i\tau}}{a}\right)$, $K_0\left(\frac{r\sqrt{1+i\tau}}{a}\right)$ видно, что $I_0\left(\frac{r\sqrt{1+i\tau}}{a}\right)$ растёт неограниченно при $\tau \rightarrow \infty$, а функция $K_0\left(\frac{r\sqrt{1+i\tau}}{a}\right)$ стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$.

Из (25), (26) получим, что существует $\tau_0 > 0$ и найдутся числа $c_1(\tau_0), c_2(\tau_0), c_3(\tau_0), c_4(\tau_0) > 0$ такие, что для любых τ , $|\tau| \geq \tau_0$, справедливы соотношения (23) и (24).

Тем самым лемма доказана. $\square$

1.2. Решение задачи (18), (20)–(22)

Для решения задачи (18), (20)–(22) используем метод проекционной регуляризации, применявшийся ранее в работах [9, 13]. В основе этого метода лежит регуляризующее семейство операторов $\{T_\alpha : \alpha > 0\}$, определяемое формулой

$$T_\alpha[\hat{g}(\tau)] = Q_\alpha(\tau)\hat{g}(\tau), \quad T_\alpha : \overline{H} \rightarrow \overline{H}, \quad \tau \in (-\infty, \infty), \quad (27)$$

где

$$Q_\alpha(\tau) = \begin{cases} Q(\tau); & |\tau| \leq \alpha, \\ 0; & |\tau| > \alpha. \end{cases}$$

Замечание. Как правило, параметр регуляризации стремится к нулю, в данной задаче удобней взять параметр регуляризации α , который стремится к бесконечности.

Регуляризующее семейство решений $\hat{q}_\delta^\alpha(\tau)$ задачи (18) определим формулой

$$\hat{h}_\delta^\alpha(\tau) = T_\alpha[\hat{g}_\delta(\tau)], \quad \tau \in (-\infty, \infty). \quad (28)$$

Для выбора параметра регуляризации $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\delta)$ в формуле (28) рассмотрим оценку

$$\|\hat{h}_\delta^\alpha(\tau) - \hat{h}(\tau)\|_{\overline{H}} \leq \|\hat{h}_\delta^\alpha(\tau) - \hat{h}^\alpha(\tau)\|_{\overline{H}} + \|\hat{h}^\alpha(\tau) - \hat{h}(\tau)\|_{\overline{H}}, \quad (29)$$

где $\hat{h}^\alpha(\tau) = T_\alpha[\hat{g}(\tau)]$.

Так как из (20), (27) и (28) следует, что

$$\|\hat{h}_\delta^\alpha(\tau) - \hat{h}^\alpha(\tau)\|_{\overline{H}} \leq \|T_\alpha\|\delta,$$

то перейдем к оценке $\|T_\alpha\|$.

Лемма 2. Пусть оператор T_α определен формулой (27), r_0, a, r_2 удовлетворяют условию

$$1 - \frac{c_1(\tau_0)c_3(\tau_0)}{c_2(\tau_0)c_4(\tau_0)} \cdot e^{\frac{-2(r_2-r_0)}{a}} \sqrt{\frac{\sqrt{1+\tau^2}+1}{2a^2}} > 0.$$

Тогда существует число $c_7(\alpha_0) > 0$ такое, что при $\alpha_0 = \tau_0$ для любых α , $|\alpha| \geq \alpha_0$, справедлива оценка

$$\|T_\alpha\| \leq c_7(\alpha_0) \cdot e^{\frac{(r_1-r_0)}{a}} \sqrt{\frac{\alpha}{2}}.$$

Доказательство. По определению, норма оператора

$$\|T_\alpha\|^2 = \sup_{\|\hat{g}(\tau)\| \leq 1} \|T_\alpha \hat{g}(\tau)\|_H^2 \leq \int_{-\alpha}^{\alpha} |Q_\alpha(\tau)|^2 |\hat{g}(\tau)|^2 d\tau \leq \sup_{|\tau| \leq \alpha} |Q_\alpha(\tau)|^2.$$

Из (19) следует

$$\begin{aligned} |Q(\tau)| &\leq \left| \frac{I_0\left(\frac{r_2\sqrt{1+i\tau}}{a}\right) K_0\left(\frac{r_0\sqrt{1+i\tau}}{a}\right) - K_0\left(\frac{r_2\sqrt{1+i\tau}}{a}\right) I_0\left(\frac{r_0\sqrt{1+i\tau}}{a}\right)}{I_0\left(\frac{r_2\sqrt{1+i\tau}}{a}\right) K_0\left(\frac{r_1\sqrt{1+i\tau}}{a}\right) - I_0\left(\frac{r_1\sqrt{1+i\tau}}{a}\right) K_0\left(\frac{r_2\sqrt{1+i\tau}}{a}\right)} \right| \\ &\leq \frac{\left| I_0\left(\frac{r_2\sqrt{1+i\tau}}{a}\right) K_0\left(\frac{r_0\sqrt{1+i\tau}}{a}\right) \right| + \left| K_0\left(\frac{r_2\sqrt{1+i\tau}}{a}\right) I_0\left(\frac{r_0\sqrt{1+i\tau}}{a}\right) \right|}{\left| I_0\left(\frac{r_2\sqrt{1+i\tau}}{a}\right) K_0\left(\frac{r_1\sqrt{1+i\tau}}{a}\right) \right| - \left| I_0\left(\frac{r_1\sqrt{1+i\tau}}{a}\right) K_0\left(\frac{r_2\sqrt{1+i\tau}}{a}\right) \right|}. \end{aligned}$$

Из леммы 1 следует существование числа $c_5(\tau_0) > 0$ такого, что для любого τ , $|\tau| \geq \tau_0$, справедлива оценка

$$\begin{aligned} |Q(\tau)| &\leq \frac{\frac{c_1(\tau_0)}{\sqrt{r_2}} \cdot e^{r_2\sqrt{\frac{\sqrt{1+\tau^2}+1}{2a^2}}} \frac{c_3(\tau_0)}{\sqrt{r_0}} \cdot e^{-r_0\sqrt{\frac{\sqrt{1+\tau^2}+1}{2a^2}}} + \frac{c_1(\tau_0)}{\sqrt{r_2}} \cdot e^{r_0\sqrt{\frac{\sqrt{1+\tau^2}+1}{2a^2}}} \frac{c_3(\tau_0)}{\sqrt{r_0}} \cdot e^{-r_2\sqrt{\frac{\sqrt{1+\tau^2}+1}{2a^2}}}}{\left| \frac{c_2(\tau_0)}{\sqrt{r_2}} \cdot e^{r_2\sqrt{\frac{\sqrt{1+\tau^2}+1}{2a^2}}} \frac{c_4(\tau_0)}{\sqrt{r_1}} \cdot e^{-r_1\sqrt{\frac{\sqrt{1+\tau^2}+1}{2a^2}}} - \frac{c_1(\tau_0)}{\sqrt{r_1}} \cdot e^{r_1\sqrt{\frac{\sqrt{1+\tau^2}+1}{2a^2}}} \frac{c_3(\tau_0)}{\sqrt{r_2}} \cdot e^{-r_2\sqrt{\frac{\sqrt{1+\tau^2}+1}{2a^2}}} \right|} \\ &\leq \frac{\sqrt{r_1} c_1(\tau_0) c_3(\tau_0)}{\sqrt{r_0} c_2(\tau_0) c_4(\tau_0)} \cdot e^{(r_1-r_0)\sqrt{\frac{\sqrt{1+\tau^2}+1}{2a^2}}} \frac{1 + e^{-2(r_2-r_0)\sqrt{\frac{\sqrt{1+\tau^2}+1}{2a^2}}}}{1 - \frac{c_1(\tau_0) c_3(\tau_0)}{c_2(\tau_0) c_4(\tau_0)} \cdot e^{-2(r_2-r_0)\sqrt{\frac{\sqrt{1+\tau^2}+1}{2a^2}}}} \\ &\leq c_5(\tau_0) \cdot e^{(r_1-r_0)\sqrt{\frac{\sqrt{1+\tau^2}+1}{2a^2}}}. \end{aligned} \quad (30)$$

Из (30) следует, что при $\alpha_0 = \tau_0$ справедлива оценка

$$\sup_{\alpha_0 \leq |\tau| \leq \alpha} |Q(\tau)| \leq c_5(\alpha_0) \cdot e^{\frac{(r_1-r_0)}{a} \sqrt{\frac{\alpha}{2}}}.$$

Пусть $|\alpha| \geq \alpha_0$, а $c_6(\alpha_0) := \sup_{|\tau| \leq \alpha_0} |Q(\tau)|$. Тогда

$$\begin{aligned} \sup_{|\tau| \leq \alpha} |Q(\tau)| &= \max \left\{ c_6(\alpha_0), \sup_{\alpha_0 \leq |\tau| \leq \alpha} |Q(\tau)| \right\} \leq \max \left\{ c_6(\alpha_0), c_5(\alpha_0) \cdot e^{\frac{(r_1-r_0)}{a} \sqrt{\frac{\alpha}{2}}} \right\} \\ &= e^{\frac{(r_1-r_0)}{a} \sqrt{\frac{\alpha}{2}}} \max \left\{ c_6(\alpha_0) \cdot e^{-\frac{(r_1-r_0)}{a} \sqrt{\frac{\alpha}{2}}}, c_5(\alpha_0) \right\} \\ &\leq e^{\frac{(r_1-r_0)}{a} \sqrt{\frac{\alpha}{2}}} \max \{ c_6(\alpha_0), c_5(\alpha_0) \}. \end{aligned}$$

Положив $c_7(\alpha_0) = \max \{ c_6(\alpha_0), c_5(\alpha_0) \}$, получим, что для любого α , $|\alpha| \geq \alpha_0$, будет справедливо соотношение

$$\|T_\alpha\| \leq c_7(\alpha_0) \cdot e^{\frac{(r_1-r_0)}{a} \sqrt{\frac{\alpha}{2}}}.$$

Тем самым лемма доказана. $\square$

Теперь получим оценку для $\|\hat{h}^\alpha(\tau) - \hat{h}(\tau)\|$ в формуле (29).

Пусть

$$\Delta_1^2(\alpha) = \sup \left\{ \int_{-\infty}^{\alpha} |\hat{h}(\tau)|^2 d\tau + \int_{\alpha}^{\infty} |\hat{h}(\tau)|^2 d\tau : \hat{h}_0(\tau) \in \hat{M}_d \right\}. \quad (31)$$

Из (21) получаем, что при условии $\hat{h}_0(\tau) \in \hat{M}_d$

$$\int_{\alpha}^{\infty} (1 + \tau^2) |\hat{h}(\tau)|^2 d\tau \leq 2d^2. \quad (32)$$

Из (31) и (32) следует, что $\Delta_1^2(\alpha) \leq 2d^2/(1 + \alpha^2)$.

Таким образом, из (29), (32), предыдущего соотношения и леммы 2 получим, что

$$\|\hat{h}_{\delta}^{\alpha}(\tau) - \hat{h}(\tau)\|_{\bar{H}} \leq \sqrt{2d}/\sqrt{1 + \alpha^2} + c_7(\alpha_0) \cdot e^{\frac{(r_1-r_0)}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \delta. \quad (33)$$

Параметр регуляризации $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\delta)$ в формуле (28) выберем из условия

$$\sqrt{1 + \alpha^2} \cdot e^{\frac{(r_1-r_0)}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} \sqrt{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{2d}}{c_7(\alpha_0)\delta}. \quad (34)$$

Тогда из (33) и (34) следует, что

$$\|\hat{h}_{\delta}^{\bar{\alpha}(\delta)}(\tau) - \hat{h}(\tau)\|_{\bar{H}} \leq 2\sqrt{2d}/\sqrt{1 + \bar{\alpha}^2(\delta)}. \quad (35)$$

Так как функция $\sqrt{1 + \alpha^2} \cdot e^{\frac{(r_1-r_0)}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} \sqrt{\frac{\alpha}{2}}$ строго возрастает по α и изменяется от $\sqrt{1 + \alpha_0^2} \times e^{\frac{(r_1-r_0)}{a}\sqrt{\frac{\alpha_0}{2}}} \sqrt{\frac{\alpha_0}{2}}$ до ∞ , то существует единственное решение $\bar{\alpha}(\delta)$ уравнения (34).

Поскольку уравнение (34) не имеет решения в элементарных функциях, то введем два новых уравнения:

$$e^{\frac{(r_1-r_0)}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} \sqrt{\frac{\alpha}{2}} = \frac{c_8(\alpha_0)}{\delta}, \quad (36)$$

$$e^{\frac{2(r_1-r_0)}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} \sqrt{\frac{\alpha}{2}} = \frac{c_8(\alpha_0)}{\delta}, \quad (37)$$

где число $c_8(\alpha_0) = \sqrt{2d}/c_7(\alpha_0)$.

Для существования и единственности решений уравнений (34), (36) потребуем выполнения условия

$$e^{\frac{(r_1-r_0)}{a}\sqrt{\frac{\alpha_0}{2}}} \sqrt{\frac{\alpha_0}{2}} < \frac{c_8(\alpha_0)}{\delta}.$$

Решения уравнений (36), (37) обозначим через $\bar{\alpha}_1(\delta)$ и $\bar{\alpha}_2(\delta)$ соответственно.

Так как $\sqrt{1 + \alpha_0^2} > 1$, то решение уравнения (36) больше, чем решение уравнения (34), т.е. $\bar{\alpha}_1(\delta) > \bar{\alpha}(\delta)$.

Аналогично существует α_1 , $\alpha_1 > \alpha_0$, такое, что для любых α , $|\alpha| > \alpha_1$, выполняются соотношения:

$$\sqrt{1 + \alpha^2} \leq e^{\frac{(r_1-r_0)}{a}\sqrt{\frac{|\alpha|}{2}}} \sqrt{\frac{|\alpha|}{2}} \quad \text{и} \quad e^{\frac{2(r_1-r_0)}{a}\sqrt{\frac{|\alpha|}{2}}} \sqrt{\frac{|\alpha|}{2}} < \frac{c_8(\alpha_0)}{\delta}. \quad (38)$$

Из (38) получим, что решение уравнения (37) будет меньше решения уравнения (34), т.е. $\bar{\alpha}_2(\delta) < \bar{\alpha}(\delta)$.

Таким образом, при достаточно малых значениях δ будет справедливо соотношение

$$\bar{\alpha}_2(\delta) < \bar{\alpha}(\delta) < \bar{\alpha}_1(\delta). \quad (39)$$

Из (36), (37) будем иметь

$$\bar{\alpha}_1(\delta) = \frac{2a^2}{(r_1 - r_0)^2} \ln^2 \frac{c_8(\alpha_0)}{\delta} \quad \text{и} \quad \bar{\alpha}_2(\delta) = \frac{a^2}{2(r_1 - r_0)^2} \ln^2 \frac{c_8(\alpha_0)}{\delta}, \quad (40)$$

а из (39) и (40) следует, что

$$1/\bar{\alpha}(\delta, d) = O(\ln^{-2} \delta) \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0. \quad (41)$$

Решение задачи (18)–(21) определим формулой $\hat{h}_\delta(\tau) = \hat{h}_\delta^{\bar{\alpha}(\delta, d)}(\tau)$.

Тогда из соотношения (35) следует, что

$$\|\hat{h}_\delta(\tau) - \hat{h}(\tau)\|_{\bar{H}} \leq \frac{2d}{\sqrt{1 + \bar{\alpha}^2(\delta, d)}}.$$

Окончательно, решение $h_\delta(t)$ обратной задачи (8), (9), (11), (14) определим формулой

$$h_\delta(t) = \begin{cases} \operatorname{Re} F^{-1}[\bar{h}_\delta(\tau)]; & t \geq 0, \\ 0; & t < 0, \end{cases} \quad (42)$$

где F^{-1} — оператор, обратный F .

Учитывая вышесказанное, для функции $h_\delta(t)$ будет справедлива оценка

$$\|h_\delta(t) - h(t)\|_{L_2[0, \infty)} \leq \frac{2d}{\sqrt{1 + \bar{\alpha}^2(\delta, d)}}. \quad (43)$$

Из (41) и (43) следует существование числа $\bar{c} > 0$ такого, что для любого достаточно малого δ справедлива оценка

$$\|h_\delta(t) - h(t)\|_{L_2[0, \infty)} \leq \bar{c}d \ln^{-2} \delta.$$

2. Решение основной обратной задачи

Для определения приближенного решения $q_\delta(t)$ основной обратной задачи (1), (2), (4), (6), (7) по известной функции $\psi(\delta) = \bar{c}d \ln^{-2} \delta$:

$$\|h_\delta(t) - h_0(t)\|_{L_2[0, \infty)} \leq \psi(\delta), \quad (44)$$

мы должны поставить и решить вспомогательную некорректную задачу. Эта задача заключается в вычислении значения неограниченного оператора P :

$$Ph(t) = e^t \cdot h(t) = q(t), \quad (45)$$

где функции $h(t)$ и $Ph(t) \in L_2[0, \infty)$.

Предположим, что искомое точное значение $q_0(t)$ задачи (45), определяемое формулой

$$q_0(t) = Ph_0(t), \quad t \geq 0,$$

принадлежит классу корректности K_b , определенному условием (5):

$$q_0(t) \in K_b, \quad (46)$$

где K_b определяется формулой

$$K_b = \{q(t) : q(t) \in L_2[0, \infty), |q(t)|^2(1+t^2)^{1/2(1+\gamma_0)} \leq b^2\}. \quad (47)$$

Новая некорректная задача будет определяться формулами (44)–(47).

Для решения этой задачи методом проекционной регуляризации введем регуляризующее семейство операторов $\{P_\beta : \beta > 0\}$, где

$$P_\beta h_\delta(t) = \begin{cases} h(t) \cdot e^t; & 0 \leq t \leq \beta, \\ 0; & t > \beta. \end{cases} \quad (48)$$

Таким образом, приближенное решение задачи будем искать в виде $q_\delta^\beta(t) = P_\beta h_\delta(t)$, а параметр регуляризации $\beta = \beta(\delta)$ будем искать, используя схему М.М. Лаврентьева

$$\|q_\delta^\beta(t) - q_0(t)\|_{L_2[0, \infty)} \leq \|q_\delta^\beta(t) - q_0^\beta(t)\|_{L_2[0, \infty)} + \|q_0^\beta(t) - q_0(t)\|_{L_2[0, \infty)}, \quad 0 < \delta \leq \delta_0,$$

где $q_0^\beta(t) = P_\beta h_0(t)$.

Теперь перейдем к оценке каждого слагаемого в правой части предыдущей формулы $\|q_\delta^\beta(t) - q_0^\beta(t)\|_{L_2[0, \infty)} = \|P_\beta h_\delta(t) - P_\beta h_0(t)\|_{L_2[0, \infty)} \leq \|P_\beta\| \|h_\delta(t) - h_0(t)\|_{L_2[0, \infty)}, \quad 0 < \delta \leq \delta_0$. Из (48) следует, что

$$\|P_\beta\| = e^\beta. \quad (49)$$

Из (44) и (49) получим

$$\|q_\delta^\beta(t) - q_0^\beta(t)\|_{L_2[0, \infty)} \leq e^\beta \cdot \psi(\delta), \quad 0 < \delta \leq \delta_0. \quad (50)$$

Из (48) следует, что

$$\|q_0^\beta(t) - q_0(t)\|_{L_2[0, \infty)}^2 = \|P_\beta h_0(t) - q_0(t)\|_{L_2[0, \infty)}^2 = \int_\beta^\infty |q(t)|^2 dt,$$

а из (47) следует, что

$$\int_\beta^\infty |q(t)|^2 dt \leq b^2 \int_\beta^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^{1/2(1+\gamma_0)}} \leq b^2 \int_\beta^\infty \frac{dt}{t^{1+\gamma_0}}.$$

Из предыдущего соотношения имеем

$$\|q_0^\beta(t) - q_0(t)\|_{L_2[0, \infty)} \leq \frac{b}{\sqrt{\gamma_0}} \beta^{-\gamma_0/2}. \quad (51)$$

Далее, используя схему М.М. Лаврентьева, с учетом (50), (51) запишем уравнение

$$e^\beta \psi(\delta) = \frac{b}{\sqrt{\gamma_0}} \beta^{-\gamma_0/2}, \quad 0 < \delta \leq \delta_0, \quad (52)$$

определяющее зависимость $\beta(\delta)$.

Для существования и единственности решения уравнения (52) потребуем выполнения условия $\psi(\delta_0) < \frac{b}{\gamma_0}$.

Правая часть соотношения (52), непрерывно и монотонно убывая, стремится к нулю при $\beta \rightarrow \infty$, а при $\beta = 0$ правая часть равна b/γ_0 . Левая часть соотношения (52), непрерывно возрастающая, стремится к бесконечности, а при $\beta = 0$ она равна $\psi(\delta_0)$.

Следовательно, если $b/\gamma_0 > \psi(\delta_0)$, то уравнение (52) имеет единственное решение $\beta = \beta(b, \delta)$. При этом оценка погрешности приближенного решения будет определяться функцией

$$\|q_\delta(t) - q_0(t)\|_{L_2[0,\infty)} \leq \frac{2b}{\sqrt{\gamma_0}} \beta^{-\gamma_0/2}(b, \delta).$$

Эту погрешность нетрудно аппроксимировать в классе элементарных функций. Для этого аппроксимируем (52) уравнениями:

$$e^\beta = \frac{b}{\sqrt{\gamma_0} \psi(\delta)}, \quad e^{2\beta} = \frac{b}{\sqrt{\gamma_0} \psi(\delta)}. \quad (53)$$

Решение уравнений (53) обозначим через $\beta_1(\delta, b)$ и $\beta_2(\delta, b)$ соответственно.

Очевидно, что $\beta_2(\delta, b) \leq \beta(\delta, b) \leq \beta_1(\delta, b)$. Тогда

$$\beta(\delta, b) = O\left(\ln^{-1} \frac{b}{\sqrt{\gamma_0} \psi(\delta)}\right). \quad (54)$$

С учетом вышесказанного для $q_\delta(t)$ будет справедлива теорема.

Теорема. Пусть функция $q_\delta(t)$ определена формулой (48) и постоянная величина $\psi(\delta_0) < \frac{b}{\gamma_0}$. Тогда для любого достаточно малого δ справедлива следующая оценка:

$$\|q_\delta(t) - q_0(t)\|_{L_2[0,\infty)} \leq \frac{2b}{\sqrt{\gamma_0}} \ln^{-\gamma_0/2} \left(\frac{b}{\sqrt{\gamma_0} \psi(\delta)} \right).$$

Доказательство следует из (51) и (54).

Литература

1. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена. — М.: Наука, 1988.
2. Ягола А.Г., Ван Янфей, Степанова И.Э., Титаренко В.Н. Обратные задачи и методы их решения. Приложения к геофизике. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014.
3. Тихонов А.Н., Гласко В.Б. К вопросу о методах определения температуры поверхности тела // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1967. — № 4. — С. 910–914.
4. Pektas B., Tamci E. The heat flux identification problem for a nonlinear parabolic equation in 2D // J. of Comput. and Appl. Mathematics. — 2017. — Vol. 312. — P. 134–142.
5. Kabanikhin S.I., Shislenin M.A. Regularization of the decision prolongation problem for parabolic and elliptic equations from border part // Eurasian J. of Mathematical and Computer Applications. — 2014. — Vol. 2, № 2. — P. 81–91.
6. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некоторые задачи математической физики и анализа. — М.: Наука, 1980. Перевод: Lavrent'ev M.M., Romanov V.G. and Shishatsky S.P. Ill-posed problems of mathematical physics and analyses. — Moscow: Nauka Publ., 1980.
7. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. — Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. Перевод: Kabanikhin S.I. Inverse and Ill-posed problems. — Novosibirsk: Siberian Academic Press, 2009.
8. Танана В.П. Об оптимальности по порядку метода проекционной регуляризации при решении обратных задач // Сиб. журн. индустр. математики. — 2004. — Т. 7, № 2. — С. 117–132.
9. Танана В.П., Сидикова А.И. О гарантированной оценке точности приближенного решения одной обратной задачи тепловой диагностики // Тр. ИММ УрО РАН. — 2010. — Т. 16, № 2. — С. 238–252.

10. **Данилин А.Р.** Об оптимальных по порядку оценках конечномерных аппроксимаций решений некорректных задач // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1985. — Т. 25, № 8. — С. 1123–1130.
11. **Васин В.В.** Основы теории некорректных задач. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2020.
12. **Леонов А.С.** Эффективные алгоритмы вычисления глобальной и локальной апостериорной оценки точности решений линейных некорректных задач // Известия вузов. Математика. — 2020. — № 2. — С. 29–38.
13. **Танана В.П., Ершова А.А.** О решении обратной граничной задачи для композитных материалов // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. — 2018. — Т. 28, вып. 4. — С. 474–488.
14. **Johansson V.T.** Determining the temperature from incomplete boundary data // Math. Nachr. — 2007. — Vol. 280, № 16. — P. 1765–1779. — DOI:10.1002/mana.200610577.
15. **Лаврентьев М.М.** О некоторых некорректных задачах математической физики. — Новосибирск: Наука, 1962.
16. **Иванов В.К.** О равномерной регуляризации неустойчивых задач // Сиб. мат. журнал. — 1966. — Т. 7, № 3. — С. 546–558.
17. **Тихонов А.Н.** О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Доклады АН СССР. — 1963. — Т. 151, № 3. — С. 501–504.
18. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функции и функционального анализа. — М.: Наука, 1989.
19. **Ватсон Г.Н.** Теория бесселевых функций. Ч. 1. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1949.
20. **Грэй Э., Мэтьюз Г.Б.** Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1953.

Поступила в редакцию 26 февраля 2021 г.

После исправления 03 февраля 2023 г.

Принята к печати 10 апреля 2023 г.

Литература в транслитерации

1. **Alifanov O.M., Artyukhin E.A., Rumyancev S.V.** Ekstremal'nye metody resheniya nekorrektnykh zadach i ikh prilozheniya k obratnym zadacham teploobmena. — М.: Nauka, 1988.
2. **Yagola A.G., Van Yanfei, Stepanova I.E., Titarenko V.N.** Obratnye zadachi i metody ikh resheniya. Prilozheniya k geofizike. — М.: BINOM. Laboratoriya znaniy, 2014.
3. **Tikhonov A.N., Glasko V.B.** K voprosu o metodakh opredeleniya temperatury poverkhnosti tela // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1967. — № 4. — С. 910–914.
4. **Pektas B., Tamci E.** The heat flux identification problem for a nonlinear parabolic equation in 2D // J. of Comput. and Appl. Mathematics. — 2017. — Vol. 312. — P. 134–142.
5. **Kabanikhin S.I., Shislenin M.A.** Regularization of the decision prolongation problem for parabolic and elliptic elliptic equations from border part // Eurasian J. of Mathematical and Computer Applications. — 2014. — Vol. 2, № 2. — P. 81–91.
6. **Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatsky S.P.** Nekotorye zadachi matematicheskoi fiziki i analiza. — М.: Nauka, 1980. Perevod: Lavrent'ev M.M., Romanov V.G. and Shishatsky S.P. Ill-posed problems of mathematical physics and analyses. — Moscow: Nauka Publ., 1980.
7. **Kabanikhin S.I.** Obratnye i nekorrektnye zadachi. — Novosibirsk: Sib. nauch. izd-vo, 2009. Perevod: Kabanikhin S.I. Inverse and Ill-posed problems. — Novosibirsk: Siberian Academic Press, 2009.

8. **Tanana V.P.** Ob optimal'nosti po poryadku metoda proekcionnoi regularizatsii pri reshenii obratnykh zadach // Sib. zhurn. industr. matematiki. — 2004. — Т. 7, № 2. — С. 117–132.
9. **Tanana V.P., Sidikova A.I.** O garantirovannoi ocenke tochnosti priblizhennogo resheniya odnoi obratnoi zadachi teplovoi diagnostiki // Tr. IMM UrO RAN. — 2010. — Т. 16, № 2. — С. 238–252.
10. **Danilin A.R.** Ob optimal'nykh po poryadku ochenkakh konechnomernykh approksimatsii reshenii nekorrektnykh zadach // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1985. — Т. 25, № 8. — С. 1123–1130.
11. **Vasin V.V.** Osnovy teorii nekorrektnykh zadach. — Novosibirsk: Izd-vo SO RAN, 2020.
12. **Leonov A.S.** Effektivnye algoritmy vychisleniya global'noi i lokal'noi aposteriornoi ocenki tochnosti reshenii lineinykh nekorrektnykh zadach // Izvestiya vuzov. Matematika. — 2020. — № 2. — С. 29–38.
13. **Tanana V.P., Ershova A.A.** O reshenii obratnoi granichnoi zadachi dlya kompozitnykh materialov // Vestn. Udmurtsk. un-ta. Matem. Mekh. Komp'yut. nauki. — 2018. — Т. 28, vyp. 4. — С. 474–488.
14. **Johansson V.T.** Determining the temperature from incomplete boundary data // Math. Nachr. — 2007. — Vol. 280, № 16. — P. 1765–1779. — DOI:10.1002/mana.200610577.
15. **Lavrent'ev M.M.** O nekotorykh nekorrektnykh zadachakh matematicheskoi fiziki. — Novosibirsk: Nauka, 1962.
16. **Ivanov V.K.** O ravnomernoi regularizatsii neustoichivyykh zadach // Sib. mat. zhurnal. — 1966. — Т. 7, № 3. — С. 546–558.
17. **Tikhonov A.N.** O reshenii nekorrektno postavlennykh zadach i metode regularizatsii // Doklady AN SSSR. — 1963. — Т. 151, № 3. — С. 501–504.
18. **Kolmogorov A.N., Fomin S.V.** Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza. — М.: Nauka, 1989.
19. **Vatson G.N.** Teoriya besselevykh funktsii. Ch. 1. — М.: Izd-vo inostrannoi literatury, 1949.
20. **Grei E., Met'yuz G.B.** Funktsii Besselya i ikh prilozheniya k fizike i mekhanike. — М.: Izd-vo inostrannoi literatury, 1953.