

УДК 536.24

ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ОБТЕКАНИИ ЗАТУПЛЕННОГО ПО СФЕРЕ КОНУСА ПОД УГЛОМ АТАКИ И ВДУВЕ ГАЗА С ПОВЕРХНОСТИ ЗАТУПЛЕНИЯ

В. И. Зинченко, А. С. Якимов*

Томский государственный университет, 634050 Томск

* Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники,
634050 Томск

Рассмотрены новые способы управления тепловыми режимами при пространственном обтекании тела высокоэнтальпийным потоком, связанные с одновременным воздействием вдува газа с поверхности затупления и перетекания тепла в материале оболочки. Для различных коэффициентов теплопроводности тела проведен анализ влияния вдува и показана эффективность использования высокотеплопроводных материалов для снижения максимальных температур на наветренной стороне в результате интенсивного стока тепла в область пористого сферического затупления.

Для стационарных режимов прогрева [1] при высокоэнтальпийном обтекании тела перетекание тепла в материале служит эффективным способом снижения температуры для областей с максимальными тепловыми нагрузками. Анализ характеристик сопряженного нестационарного теплообмена при различных режимах течения в пограничном слое [2] показал, что надежным способом тепловой защиты конструкции от перегрева является вдув газа-охлаждителя. В этом случае происходит ослабление теплового потока, подводимого к поверхности, и отбор тепла при фильтрации газа в порах. В отличие от осесимметричного прогрева [1, 2] при обтекании тела под углом атаки [3] разница в тепловых потоках на подветренной и наветренной сторонах может быть весьма значительной, что вызывает перетекание тепла в окружном направлении. В [3] исследовано влияние теплофизических свойств ряда материалов на температурные поля конической части обтекаемого тела и сделан вывод о целесообразности использования высокотеплопроводных покрытий, обеспечивающих интенсивный сток тепла в область пористого сферического затупления. При этом задача о теплообмене в области пористого затупления не рассматривалась, а использовались упрощенные граничные условия на стыке сферической и конической частей тела.

В данной работе используется полная постановка задачи в составном теле и при математическом моделировании прогрева задаются граничные условия, соответствующие заданию конвективных тепловых потоков со стороны газовой фазы для пространственного сверхзвукового обтекания конуса, затупленного по сфере, с учетом влияния вдува с поверхности пористого затупления.

1. Постановка задачи. Для проницаемой сферической оболочки составного тела (рис. 1) с учетом допущения об одномерности процесса фильтрации вдуваемого газа в направлении нормали к поверхности и однотемпературности пористой среды уравнение

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00964).

На линиях DC и BC ставятся условия тепловой изоляции

$$\frac{\partial T_2}{\partial n_1} = 0, \quad \frac{\partial T_2}{\partial s} = 0. \quad (1.8)$$

Для теплообмена, имеющего плоскость симметрии, запишем

$$\left(\frac{\partial T_i}{\partial \eta}\right)\Big|_{\eta=0} = \left(\frac{\partial T_i}{\partial \eta}\right)\Big|_{\eta=\pi} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (1.9)$$

При задании теплового потока из газовой фазы q_w воспользуемся формулами работы [4] для пространственного случая при ламинарном и турбулентном режимах течения в пограничном слое. Для ослабления теплового потока при вдуве газа-охлаждителя, совпадающего по составу с набегающим воздушным потоком, используем формулы из [5]. При этом на пористой сферической части в системе координат, связанной с точкой торможения O_1 , для ламинарного режима течения в пограничном слое получим

$$q_w = \left(\frac{\alpha}{c_p}\right)^0 \left[1 - \frac{0,6(\rho v)_w}{(\alpha/c_p)^0}\right] (h_r - h_w), \quad \left(\frac{\alpha}{c_p}\right)^0 = \frac{1,05 V_\infty^{1,08} [0,55 + 0,45 \cos(2\tilde{s})]}{(R_N/\rho_\infty)^{0,5}},$$

$$h_r = h_{e0} \left[\left(\frac{p_e}{p_{e0}}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} + \left(\frac{u_e}{v_m}\right)^2 \text{Pr}^{0,5} \right], \quad \frac{u_e}{v_m} = \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_{e0}}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]^{0,5}, \quad 0_1 \leq \tilde{s} \leq \tilde{s}_*,$$

$$h_w = b_1 T_w + b_2 T_w^2/2, \quad \tilde{s} = \arccos(\cos \bar{s} \cos \beta + \sin \bar{s} \sin \beta \cos \eta).$$

Для турбулентного режима течения в пограничном слое имеем

$$q_w = \left(\frac{\alpha}{c_p}\right)^0 \exp\left[-\frac{0,37(\rho v)_w}{(\alpha/c_p)^0}\right] (h_r - h_w), \quad \left(\frac{\alpha}{c_p}\right)^0 = \frac{16,4 V_\infty^{1,25} \rho_\infty^{0,8}}{R_N^{0,2} (1 + h_w/h_{e0})^{2/3}} (3,75 \sin \tilde{s} - 3,5 \sin^2 \tilde{s}),$$

$$h_r = h_{e0} \left[\left(\frac{p_e}{p_{e0}}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} + \left(\frac{u_e}{v_m}\right)^2 \text{Pr}^{1/3} \right], \quad \tilde{s}_* < \tilde{s} \leq \tilde{s}_1.$$

Чтобы оценить влияние вдува на тепловой поток в завесной зоне, воспользуемся данными [6] и формулами [3], полученными на основе обработки результатов точных численных расчетов пространственного турбулентного пограничного слоя и вязкого ударного слоя [7, 8]:

$$q_w = \left(\frac{\alpha}{c_p}\right)^0 (1 - k_1 b^{k_2}) (h_r - h_w), \quad \left(\frac{\alpha}{c_p}\right)^0 = \frac{16,4 V_\infty^{1,25} \rho_\infty^{0,8} 2,2 (p_e/p_{e0}) u_e/v_m}{R_N^{0,2} (1 + h_w/h_{e0})^{2/3} k^{0,4} \bar{r}_{2w}^{0,2}},$$

$$k = (\gamma - 1 + 2/M_\infty^2)/(\gamma + 1), \quad \tilde{s}_A \leq \tilde{s} \leq \tilde{s}_B.$$

Для закона расхода газа-охлаждителя

$$(\rho v)_w(\tilde{s}) = (\rho v)_w(0_1) (1 + a \sin^2 \tilde{s}) \quad (1.10)$$

имеем

$$b = \frac{2(\rho v)_w(0_1) \{1 - \cos \tilde{s}_1 + a[2/3 - \cos \tilde{s}_1 + (1/3) \cos^3 \tilde{s}_1]\}}{(\alpha/c_p)^0 (\bar{s} - \bar{s}_1) [2 \cos \theta + (\bar{s} - \bar{s}_1) \sin \theta]},$$

$$\cos \tilde{s}_1 = \cos \bar{s}_1 \cos \beta + \sin \bar{s}_1 \sin \beta \cos \eta, \quad \bar{s}_1 = \bar{s}_A = \pi/2 - \theta.$$

Здесь и ниже t — время; r, z — поперечная и продольная составляющие цилиндрической системы координат; n_1, s, η — составляющие естественной системы координат; T, p, ρ — температура, давление и истинная плотность; $(\rho v)_w$ — расход газа-охлаждителя; c_p и λ — коэффициенты теплоемкости и теплопроводности; h — энтальпия; r_1, r_2, H — коэффициенты Ламе; φ, R_N — пористость и радиус сферического затупления; σ — постоянная

Стефана — Больцмана; ε_i ($i = 1, 2$) — излучательная способность поверхности обтекаемого материала; \tilde{s}_* — координата точки потери устойчивости в системе координат с началом в точке торможения; β, θ — углы атаки и конусности; Re, Pr — числа Рейнольдса и Прандтля; L — толщина оболочки; $V_\infty, \rho_\infty, M_\infty$ — скорость движения, плотность и число Маха в набегающем потоке; μ — вязкость газового потока. Индексы $e0, w$ соответствуют условиям на внешней границе пограничного слоя в точке торможения и на границе раздела газообразной и твердой фаз; 1, 2 — номеру области составной оболочки; γ — характеристикам газа в пористой среде; $n, *$ — начальным и характерным параметрам; черта сверху — безразмерным величинам; верхний индекс 0 — параметрам $\alpha/c_p, q_w$ в отсутствие вдува; L — величинам на внутренней поверхности оболочки; Σ — суммарным значениям величин; p — радиационной равновесной температуре; k — конечным значениям величин.

2. Метод расчета, исходные данные. Краевая задача (1.1)–(1.9) решалась численно при помощи неявных разностных уравнений на основе локально-одномерной схемы расщепления [9]. Так как в силу условия сопряжения (1.7) по линиям типа $BA0$ используется сквозной счет, то окружная координата η изменяется в диапазоне $0 \leq \eta \leq \pi$. При этом расчетная сетка принималась по пространству $11 \times 41 \times 11$, а время решения опорного (трехмерного) варианта до стационарного распределения температуры тела на ПЭВМ-486 составляло 15 мин. Сгущение узлов по пространственной сетке в 2 раза привело к отличию решения не более чем на 1,5%. Численное решение, найденное при автоматическом выборе шага по времени из условия заданной точности, отличалось от расчета задачи с постоянным шагом всего на 0,5%, поэтому для экономии времени решения на ПЭВМ результаты численного расчета получены при постоянном шаге по времени.

Обтекание затупленного по сфере конуса происходило при турбулентном режиме течения в пограничном слое ($Re = \rho_{e0} R_N (2h_{e0})^{0,5} / \mu_{e0} \approx 0,7 \cdot 10^6$ — число Рейнольдса, найденное по параметрам торможения). Распределение давления на поверхности тела, отнесенное к давлению торможения $\bar{p} = p_e / p_{e0}$, находилось из решения пространственной газодинамической задачи [10]. Теплофизические постоянные меди взяты из [5], в качестве газа-охлаждителя выбрана воздушная среда [11], а основные результаты получены при

$$\begin{aligned} c_{\Sigma} &= c_{p1} \rho_1 (1 - \varphi) + c_T \rho_T \varphi, & \lambda_{\Sigma} &= \lambda_1 (1 - \varphi) + \lambda_T \varphi, \\ c_T &= b_1 + b_2 T, & h_{e0} &= h_{\infty} [1 + 0,5(\gamma - 1) M_{\infty}^2], \\ T_H &= T_{\infty} = 300 \text{ K}, & c_{p\infty} &= 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{K}), \\ \lambda_i &= 386 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{K}), & \rho_T &= 1,3 \text{ кг}/\text{м}^3, \\ \rho_i &= 8950 \text{ кг}/\text{м}^3, & \lambda_T &= 0,026 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{K}), \\ c_{pi} &= 370 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{K}), & L &= 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \\ \varepsilon_i &= 0,85, \quad i = 1, 2, & R_N &= 1,85 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \\ \rho_{\infty} &= 0,0208 \text{ с}^2 \cdot \text{кгс}/\text{м}^4, & V_{\infty} &= 2,08 \text{ км}/\text{с}, \\ \beta &= 20^\circ, \quad \theta = 5^\circ, & b_1 &= 965,5, \quad b_2 = 0,147, \\ \varphi &= 0,34, \quad \gamma = 1,4, & M_{\infty} &= 6, \quad Pr = 0,72, \\ k_1 &= 0,285, & k_2 &= 0,165, \quad a = 3. \end{aligned}$$

Для контроля численного решения задачи использовалось аналитическое решение для стационарного теплообмена в виде интегрального закона сохранения. Тогда температура поверхности удовлетворяет соотношению

$$\int_0^{\pi} \left\{ \int_0^{s_1} r_{1w} [q_w - \varepsilon_1 \sigma T_w^4 + c_T (\rho v)_w (T_H - T_w)] ds + \int_{s_1}^{s_K} r_{2w} (q_w - \varepsilon_2 \sigma T_w^4) ds \right\} d\eta = 0, \quad (2.1)$$

которое получается после интегрирования исходной краевой задачи в стационарном случае. При $\lambda_1 \rightarrow \infty$, $\lambda_2 \rightarrow \infty$ имеет место выравнивание температурного поля в материале обтекаемого тела и значение искомой температуры хорошо согласуется с результатами расчетов нелинейного алгебраического уравнения

$$\begin{aligned} (h_{e0} - c_T T_w) \int_0^\pi \left[\int_0^{s_1} r_{1w} \left(\frac{\tilde{\alpha}}{c_p} \right) ds + \int_{s_1}^{s_k} \left(\frac{\tilde{\alpha}}{c_p} \right) r_{2w} ds + c_T (T_H - T_w) \int_0^{s_1} r_{1w} (\rho v)_w ds \right] d\eta = \\ = \pi \sigma T_w^4 \left(\varepsilon_1 \int_0^{s_1} r_{1w} ds + \varepsilon_2 \int_{s_1}^{s_k} r_{2w} ds \right), \quad \left(\frac{\tilde{\alpha}}{c_p} \right) = \left(\frac{\alpha}{c_p} \right) \frac{h_r - h_w}{h_{e0} - h_w}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

вытекающего из (2.1) при использовании выражения для теплового потока в виде $q_w = (\tilde{\alpha}/c_p)(h_{e0} - c_T T_w)$, $c_T = \text{const}$.

3. Анализ результатов численного решения. На рис. 2 представлены зависимости температуры поверхности T_w и конвективного теплового потока из газовой фазы q_w (сплошные кривые 1–3) от координаты s на наветренной и подветренной сторонах плоскости симметрии при $(\rho v)_w = 0$. Кривые 1–3 отвечают моментам времени $t = 0; 10; 200$ с (в последнем случае имеет место стационарный режим протекания процесса нагрева тела). Для оценки влияния перетекания тепла в окружном направлении рассматривалось решение двумерной задачи, получающейся из (1.1), (1.2). Соответствующие этому решению зависимости представлены штриховыми линиями (штриховые и сплошные кривые 1 для q_w и T_w при $t = 0$ совпадают). Штрихпунктирной линией показано распределение радиационной равновесной температуры T_{wp} в плоскости симметрии на наветренной и подветренной сторонах, которая находилась из условий сохранения энергии на пористой и конической поверхностях

$$q_w + c_T (\rho v)_w (T_H - T_{wp}) = \varepsilon_1 \sigma T_{wp}^4, \quad q_w = \varepsilon_2 \sigma T_{wp}^4 \quad (3.1)$$

и определяет максимально достижимую температуру поверхности в отсутствие перетекания тепла в продольном и окружном направлениях. Вследствие внешнего нагрева температура поверхности непроницаемого тела возрастает и наибольшее ее значение отвечает величине радиационной равновесной температуры в области максимального теплового потока для турбулентного режима течения в пограничном слое вблизи точки торможения. Как и следовало ожидать, учет перетекания тепла дает значительное снижение T_w для высокотеплопроводного материала типа меди, причем неучет перетекания тепла в окружном направлении завышает температуру поверхности в текущие моменты времени более чем на 300 К на наветренной стороне и существенно занижает T_w на подветренной стороне (сплошные и штриховые кривые 2). Отметим также, что при выходе на стационарный режим протекания процесса температура поверхности на подветренной стороне вследствие продольного и окружного перетекания тепла значительно превышает радиационно-равновесную температуру T_{wp} . Помимо расчета T_{wp} из условий (3.1) решалась исходная краевая задача для низкотеплопроводного материала типа асбоцемента ($\lambda_i = 0,349$ Вт/(м·К), $c_{p_i} = 837$ Дж/(кг·К), $\rho_i = 1800$ кг/м³, $i = 1, 2$). При выходе на стационарный режим после выравнивания полей температуры поперек оболочки значения T_w совпали со значениями T_{wp} (кривая, помеченная крестами, на рис. 2), поскольку для данного материала процесс прогрева является одномерным.

Результаты расчета стационарного режима протекания процесса нагрева при $\lambda_i \rightarrow \infty$ ($i = 1, 2$) показывают, что происходит выравнивание температурного профиля в обтекаемом материале (прямые линии 3'), а значения температуры в трехмерном прогреве удовлетворительно согласуются с результатами расчета по формуле (2.2). На рис. 3 (обозначения соответствуют рис. 2) показано распределение T_w и q_w по окружной координате

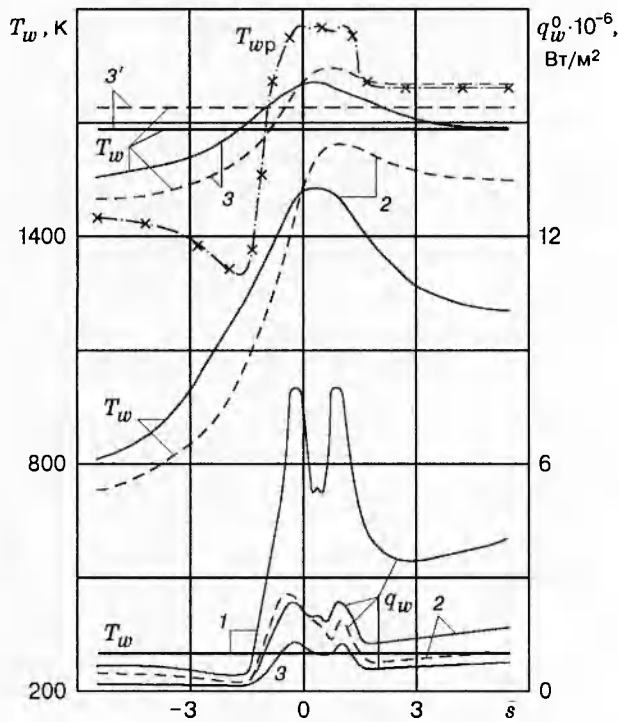


Рис. 2

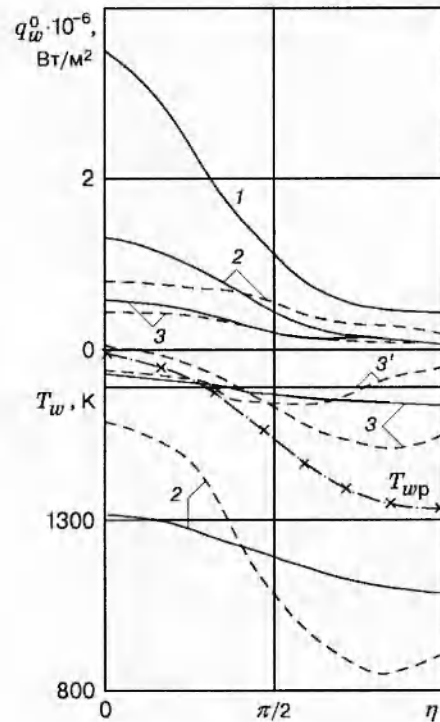


Рис. 3

на конической части оболочки в сечении $s = 2,3$, близком к сферическому носку. Здесь значительное различие температур в трехмерном и двумерном случаях наблюдается в самом теплонапряженном сечении $\eta = 0$ (~ 269 K) и сечении $\eta \approx 0,8\pi$ (~ 258 K) при $t = 10$ с. Однако максимальное различие T_w при $t = 10$ с получается на периферийном участке оболочки для $\bar{s} = \bar{s}_B$, $\eta = 0$ и составляет примерно 348 K (см. рис. 2). С немонотонным распределением давления $p_e = p_e(s, \eta)$ по окружной координате связано немонотонное поведение температур для меди и при $\lambda_i \rightarrow \infty$ ($i = 1, 2$) в двумерном случае (штриховая кривая 3').

Рассмотрим влияние расхода газа-охладителя с поверхности затупления. На рис. 4 приведены распределения тепловых потоков q_w (сплошные кривые 1, 1'), температур поверхности T_w для начального времени $t = 0$ (прямые 1, 1') и при стационарном режиме протекания процесса (сплошные кривые 2, 2'). Кривые 1, 2 и 1', 2' получены при расходе в точке торможения 0_1 $(\rho v)_w(0_1) = 6; 12$ кг/(м² · с) соответственно. Расход газа-охладителя, заданный по формуле (1.10), в окрестности плоскости симметрии представлен штриховыми кривыми 1, 1' при $(\rho v)_w(0_1) = 6; 12$ кг/(м² · с) соответственно. Штрихпунктирные кривые 2, 2' отвечают значениям радиационной равновесной температуры при различных значениях расхода. Прямые линии 2, 2' соответствуют данным, полученным при $\lambda \rightarrow \infty$, и согласуются с результатами, полученными по формулам (2.2). Видно, что вдув газа-охладителя с пористого затупления приводит к значительному уменьшению (в 2,5 раза) максимума q_w на сфере и снижению его в 2 раза на конической части тела (сплошные кривые 1 на рис. 2 и 4). Кроме того, здесь также происходит поглощение тепла при фильтрации газа в порах. В результате температура пористой полусферы в наиболее теплонапряженном сечении ($\eta = 0$) в стационарном режиме теплообмена ($t = 200$ с) при $(\rho v)_w(0_1) = 6; 12$ кг/(м² · с), не превышает 860 и 710 K соответственно.

На рис. 5 показано распределение температуры поверхности по окружной координате при стационарном режиме протекания процесса нагрева тела ($t = 200$ с). Сплошные

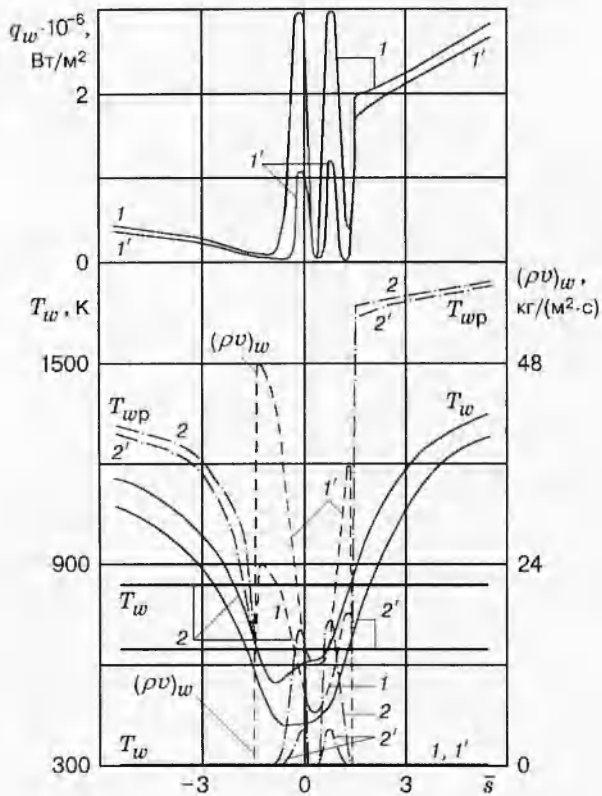


Рис. 4

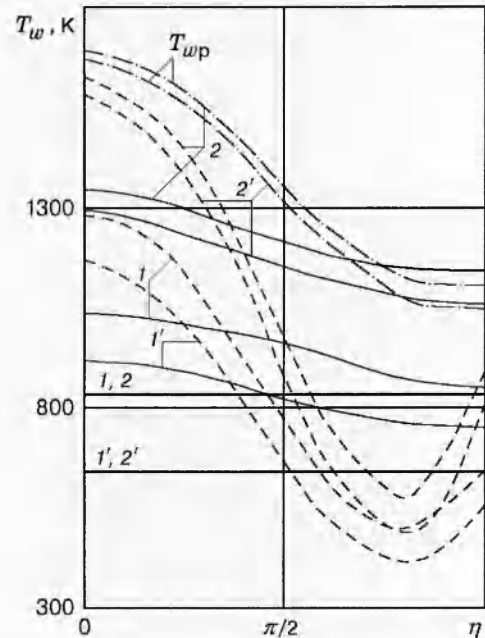


Рис. 5

и штриховые кривые отвечают соответственно трехмерному и двумерному случаям при двух значениях продольной координаты s (сплошные и штриховые кривые 1, 1' — $s = 2, 3$; кривые 2, 2' — $s = s_B$) при $(\rho v)_w(0_1) = 6; 12 \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$, а штрихпунктирные кривые 2, 2' — радиационной равновесной температуре. Как следует из рис. 4 и 5, распределение температуры поверхности при вдуве газа-охлаждителя качественно отличается от распределения $T_w(s, \eta)$ при $(\rho v)_w = 0$ для различных конечных значений λ_i ($i = 1, 2$). На пористой части оболочки T_w может превышать соответствующее значение T_{wr} , а на конической части, как на наветренной, так и на подветренной сторонах, вследствие стока тепла в пористое затупление температура поверхности становится существенно ниже радиационной равновесной температуры T_{wr} .

Отметим, что в двумерном случае на периферии ($\bar{s} = \bar{s}_B, \eta = 0$), где достигается максимальная температура тела, оболочка может разрушаться при $t \rightarrow \infty$ (штриховая кривая 2 на рис. 5), в то время как при трехмерном теплообмене из-за значительного перетекания тепла в окружающем направлении температура тела не достигает температуры плавления меди (сплошная кривая 2). Из анализа рис. 5 следует, что вдув газа-охлаждителя на стационарном участке теплообмена вызывает более значительное расслоение температурных кривых T_w при $\eta = 0; 0,8\pi$, чем в режиме прогрева при $(\rho v)_w = 0$. Это обусловлено поведением конвективного теплового потока из газовой фазы q_w вследствие попадания большей массы газа-охлаждителя (согласно формуле (1.10)) в завесную зону на подветренной стороне (штриховая кривая 1 для $(\rho v)_w$ на рис. 4).

Температура поверхности, отвечающая $\lambda_i \rightarrow \infty$ ($i = 1, 2$) и стационарному трехмерному процессу теплообмена при $(\rho v)_w \neq 0$ (на рис. 4 и 5 прямые 1, 2 и 1', 2'), снижается более чем в 2 раза по сравнению с данными, представленными на рис. 2 и 3. Результаты, полученные при различных значениях $(\rho v)_w(0_1) = 0 \div 12 \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$, подтверждают выводы о целесообразности использования высокотеплопроводных материалов, обеспечи-

вающих интенсивный сток тепла в область проникаемого затупления. При этом из рис. 4 и 5 следует, что вдув заметно снижает максимальные температуры, но гораздо больший эффект по уменьшению максимальной температуры конической поверхности в завесной зоне связан с использованием теплопроводных материалов. Как следует из рис. 4, при возрастании расхода газа-охладителя температура на пористом сферическом затуплении снижается, стремясь к температуре вдуваемого газа, что подтверждает правомерность допущения, принятого в [3], об использовании граничных условий первого рода на стыке сферической и конической частей обтекаемой оболочки при интенсивном вдуве с поверхности затупления.

Таким образом, в данной работе исследовано влияние теплофизических характеристик материала обтекаемого тела в отсутствие и при наличии вдува с поверхности сферического затупления при движении под углом атаки, когда становится значительной роль перетекания тепла по окружной координате вследствие разницы тепловых потоков на наветренной и подветренной сторонах. Для изменения коэффициентов теплопроводности от нулевых значений, когда реализуется режим радиационной равновесной температуры, до $\lambda \rightarrow \infty$, при которых получены формулы для отыскания изотермической температуры стенки, проведен анализ влияния вдува с поверхности затупления и показана эффективность использования высокотеплопроводных материалов для снижения максимальных температур тела в результате интенсивного стока тепла в область пористого сферического затупления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Башкин В. А., Решетько С. М. Расчет максимальной температуры затупления с учетом теплопроводности материала / Учен. зап. ЦАГИ. 1989. Т. 20, № 5. С. 53–59.
2. Зинченко В. И., Катаев А. Г., Якимов А. С. Исследование температурных режимов обтекаемых тел при вдуве газа с поверхности // ПМТФ. 1992. № 6. С. 57–64.
3. Зинченко В. И., Лаева В. И., Сандрыкина Т. С. Расчет температурных режимов обтекаемых тел с различными теплофизическими характеристиками // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 5. С. 105–114.
4. Землянский Б. А., Степанов Г. Н. О расчете теплообмена при пространственном обтекании тонких затупленных конусов гиперзвуковым потоком воздуха // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1981. № 5. С. 173–177.
5. Полежаев Ю. В., Юревич Ф. Б. Тепловая защита. М.: Энергия, 1978.
6. Харченко В. Н. Теплообмен в гиперзвуковом турбулентном пограничном слое при вдуве охлаждающего газа через щель // Теплофизика высоких температур. 1972. № 1. С. 101–105.
7. Зинченко В. И., Федорова О. П. Исследование пространственного турбулентного пограничного слоя с учетом сопряженного теплообмена // ПМТФ. 1989. № 3. С. 118–124.
8. Буреев А. В., Зинченко В. И. Расчет пространственного обтекания сферически затупленных конусов в окрестности плоскости симметрии при различных режимах течения в ударном слое и вдуве газа с поверхности // ПМТФ. 1991. № 6. С. 72–78.
9. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.
10. Антонов В. А., Гольдин В. Д., Пахомов Ф. М. Аэродинамика тел со вдувом. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1990.
11. Варгафтик Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Физматгиз, 1963.