УДК 533.72

ВЫЧИСЛЕНИЕ СКОРОСТИ СКОЛЬЖЕНИЯ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА ВДОЛЬ ТВЕРДОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ С УЧЕТОМ КОЭФФИЦИЕНТОВ АККОМОДАЦИИ

А. В. Латышев, В. Н. Попов, А. А. Юшканов

Поморский государственный университет, 160002 Архангельск

С использованием двухмоментного граничного условия в линейном по числу Кнудсена приближении вычислена скорость скольжения неоднородного по температуре и массовой скорости разреженного газа вдоль твердой сферической поверхности. Исследована зависимость скорости скольжения от коэффициентов аккомодации первых двух моментов функции распределения.

Ключевые слова: разреженный газ, скорость скольжения, сферическая поверхность, двухмоментное граничное условие.

Введение. Определение гидродинамических граничных условий на поверхности обтекаемых тел является одной из важнейших проблем кинетической теории газов [1]. Однако, несмотря на большое количество работ в этом направлении, проблема остается открытой, в частности для реальных поверхностей. В качестве микроскопических граничных условий, накладываемых на функцию распределения, на обтекаемых газом поверхностях часто используется зеркально-диффузное граничное условие Максвелла [1]. При этом все параметры отраженных молекул определяются одной величиной — коэффициентом диффузности. К аналогичной ситуации приводит и использование граничного условия Черчиньяни [2], в котором все параметры отраженных молекул определяются коэффициентом аккомодации тангенциального импульса α_τ.

Более совершенной является модель Черчиньяни — Лэмпис [3], которая позволяет при постановке граничных условий учесть не только коэффициент аккомодации тангенциального импульса α_τ, но и коэффициент аккомодации нормального к поверхности потока энергии α_n. Использование этой модели граничных условий позволяет более детально описывать процессы взаимодействия на границе раздела газ — поверхность. К настоящему времени с использованием модели граничных условий Черчиньяни — Лэмпис численными методами решено значительное число задач динамики разреженного газа (см., например, работы [4–6] и библиографию к ним). Использование этой модели граничных условий (так же как и зеркально-диффузной модели Максвелла) при построении точных аналитических решений граничных задач кинетической теории разреженного газа ведет к непреодолимым математическим трудностям, так как в этом случае задача сводится к решению неоднородных нелинейных интегральных уравнений, математический аппарат построения точных аналитических решений которых в настоящее время отсутствует. В то же время использование граничного условия Черчиньяни приводит к результатам, противоречащим экспериментальным данным. В частности, при использовании этого граничного условия

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03-01-00281).

коэффициент теплового скольжения не зависит от коэффициента аккомодации тангенциального импульса.

В [7] предложено граничное условие, обобщающее граничное условие Черчиньяни и позволяющее учитывать не только коэффициент аккомодации первого момента функции распределения q_1, который представляет собой коэффициент аккомодации тангенциального импульса, но и коэффициент аккомодации второго момента функции распределения q_2, который можно трактовать как коэффициент аккомодации потока тангенциального импульса. С использованием двухмоментного граничного условия в [7] вычислены скорости теплового и изотермического скольжений разреженного газа вдоль твердой плоской поверхности. При $q_1 = q_2 = \alpha_\tau$ предложенное в [7] граничное условие аппроксимирует зеркально-диффузное граничное условие Максвелла.

В настоящей работе с использованием двухмоментного граничного условия вычислена скорость скольжения неоднородного по температуре и массовой скорости разреженного газа вдоль твердой сферической поверхности радиуса R_0. В [8, 9] эта задача решена для случая произвольной твердой гладкой поверхности при полностью диффузном отражении молекул газа межфазной поверхностью при значениях числа Маха $\mathrm{M} \ll 1$ и соответственно при предельно малых и конечных значениях чисел Рейнольдса Re. В [10] с использованием результатов [8] вычислены сила сопротивления при обтекании сферы изотермическим потоком разреженного газа, термо- и фотофоретическая силы, действующие на сферическую частицу, а также скорость термофореза сферической аэрозольной частицы. Подробный обзор работ по этой теме имеется в [11, 12].

В данной работе в качестве основного уравнения использована модель Бхатнагара — Гросса — Крука (БГК-модель) кинетического уравнения Больцмана. Использование данной модели в рассматриваемой задаче обусловлено тем, что она, обладая рядом недостатков [13, с. 103] и являясь наиболее простой с математической точки зрения моделью кинетического уравнения Больцмана, позволяет корректно описывать процессы скольжения разреженного газа вдоль твердой поверхности.

1. Постановка задачи. Вывод основных уравнений. Рассмотрим неоднородный по температуре и массовой скорости разреженный газ, обтекающий при $\mathrm{M} \ll 1$, $\mathrm{Re} \ll 1$ твердую сферическую поверхность радиуса R_0. Линеаризуем функцию распределения частиц газа относительно абсолютного максвеллиана:

$$f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{C}) = f^0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{C})[1 + Y(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{C})].$$

Здесь $f^0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{C}) = (\beta/\pi)^{3/2} \exp(-C^2)$ — абсолютный максвеллиан; $\beta = m/(2k_{\mathrm{B}}T)$; $\boldsymbol{C} = \beta^{1/2}\boldsymbol{v}$; $\boldsymbol{v}$ — собственная скорость молекул газа; k_{B} — постоянная Больцмана; m — масса частиц газа; $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0(p/\mu_g)\beta^{1/2}$; $\boldsymbol{r}_0$ — размерный радиус-вектор; μ_g — динамическая вязкость газа; p — статическое давление; функция $Y(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{C})$ удовлетворяет линеаризованному кинетическому уравнению Больцмана с оператором столкновений в форме БГК-модели. В сферической системе координат, начало которой совпадает с центром частицы, это уравнение записывается в виде

$$C_r \frac{\partial Y}{\partial r} + \frac{1}{r}\Big(C_\theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{C_\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial Y}{\partial \varphi} + (C_\theta^2 + C_\varphi^2)\frac{\partial Y}{\partial C_r} + (C_\varphi^2 \operatorname{ctg}\theta - C_r C_\theta)\frac{\partial Y}{\partial C_\theta} -$$

$$- (C_\varphi C_\theta \operatorname{ctg}\theta + C_r C_\varphi)\frac{\partial Y}{\partial C_\varphi}\Big) = \beta^{-3/2} \iiint K(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}')\, Y(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{C}')\, d\boldsymbol{C}' - Y(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{C}), \qquad (1.1)$$

$$K(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}') = 1 + 2\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}' + (2/3)(C^2 - 3/2)(C'^2 - 3/2).$$

В силу осевой симметрии задачи $\partial Y/\partial \varphi = 0$. С учетом граничных условий [7] имеем

$$Y(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{C})\big|_S = 2C_\theta d_1 + 2C_r C_\theta d_2, \qquad (1.2)$$

где параметры d_1 и d_2 определяются из условий

$$(1-q_1)\int\limits_{C_r<0} f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{C})\big|_S C_r C_\theta\, d\boldsymbol{C} = -\int\limits_{C_r>0} f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{C})\big|_S C_r C_\theta\, d\boldsymbol{C},$$

$$(1-q_2)\int\limits_{C_r<0} f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{C})\big|_S C_r^2 C_\theta\, d\boldsymbol{C} = \int\limits_{C_r>0} f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{C})\big|_S C_r^2 C_\theta\, d\boldsymbol{C}.$$

Вдали от поверхности $f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{C})$ переходит в объемную функцию распределения, записанную в барнеттовском приближении.

Ограничимся малыми значениями чисел Кнудсена $\mathrm{Kn} = l/R_0 \ll 1$ (l — средняя длина свободного пробега молекул газа, связанная с кинематической вязкостью газа ν соотношением $\nu = l(2k_\mathrm{B}T/(\pi m))^{1/2}$). Следуя [8], решение (1.1) будем искать в виде разложения в ряд по параметру $k = 2\,\mathrm{Kn}/\sqrt{\pi}$:

$$Y(\boldsymbol{r},\boldsymbol{C}) = kY_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{C}) + k^2 Y_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{C}) + \ldots. \tag{1.3}$$

Подставим (1.3) в (1.1) и (1.2), учитывая, что в задачах скольжения газа вдоль поверхности сферы ($\mu = C_r$)

$$Y_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{C}) = C_\theta(C_\theta^2 + C_\varphi^2 - 2)Z_0(r,\mu) + C_\theta Z_1(r,\mu),$$

$$Y_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{C}) = C_\theta Z_2(r,\mu) + \sum_{j=0}^{\infty} g_j(C_\theta, C_\varphi)\,\omega_j(r,\mu).$$

Здесь $g_j(C_\theta, C_\varphi)$ образуют с C_θ полную систему ортогональных (в смысле скалярного произведения) многочленов. В этом случае задача сводится к системе уравнений

$$\mu\,\frac{\partial Z_0}{\partial r} + Z_0(r,\mu) = 0,$$

$$\mu\,\frac{\partial Z_1}{\partial r} + Z_1(r,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} Z_1(r,\tau)\exp\left(-\tau^2\right) d\tau, \tag{1.4}$$

$$\mu\,\frac{\partial Z_2}{\partial r} + Z_2(r,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} Z_2(r,\tau)\,\exp(-\tau^2)\,d\tau + \mu Z_1(r,\mu) - 2\,\frac{\partial Z_1}{\partial \mu} + 4\mu Z_0(r,\mu) - 2\,\frac{\partial Z_0}{\partial \mu}$$

с граничными условиями

$$Z_1(\infty,\mu) = 2U_\theta^{(1)} + 2\mu\, S_{r\theta}^{(0)} - \Big(\mu^2 - \frac{1}{2}\Big)\frac{\partial \tau^{(0)}}{\partial \theta},$$

$$Z_2(\infty,\mu) = 2U_\theta^{(2)} + 2\mu\, S_{r\theta}^{(1)} - 2\Big(\mu^2 - \frac{1}{2}\Big)\Big(S_{r\theta}^{(0)} - \frac{\partial S_{r\theta}^{(0)}}{\partial r} - \Big(\mu - \frac{1}{2}\,\varepsilon_T\Big)\frac{\partial^2 \tau^{(0)}}{\partial r \partial \theta} + \mu\,\frac{\partial \tau^{(0)}}{\partial \theta}\Big),$$

$$Z_0(0,\mu) = 0, \quad \mu > 0, \qquad Z_0(\infty,\mu) = 0, \tag{1.5}$$

$$Z_i(0,\mu) = 2d_1^{(i)} + 2\mu d_2^{(i)}, \qquad \mu > 0, \quad i = 1,2,$$

$$S_{r\theta}^{(j)} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial U_r^{(j)}}{\partial \theta} + \frac{\partial U_\theta^{(j)}}{\partial r} - \frac{U_\theta^{(j)}}{r}, \qquad j = 0,1.$$

Здесь $x = r - R$; для краткости в аргументах функций опущены значения угла θ; ε_T — коэффициент скачка температуры; $\tau^{(0)}$ — возмущение температуры; $\boldsymbol{U} = \beta^{1/2}\boldsymbol{u}$; $\boldsymbol{u}$ — среднемассовая скорость потока газа.

2. Основные результаты. Система уравнений (1.4) с граничными условиями (1.5) решена методом элементарных решений (методом Кейза) [13]. С использованием разложения (1.3) и результатов, полученных в [7, 14–16], искомая скорость скольжения разреженного газа вдоль сферической поверхности с учетом коэффициентов аккомодации первых двух моментов функции распределения записывается в виде

$$U_\theta\big|_S = kU_\theta^{(1)}\big|_S + k^2U_\theta^{(2)}\big|_S + \ldots; \tag{2.1}$$

$$U_\theta^{(1)}\big|_S = \zeta_{is}S_{r\theta}^{(0)} + \zeta_T\,\frac{\partial\tau^{(0)}}{\partial\theta}; \tag{2.2}$$

$$U_\theta^{(2)}\big|_S = \zeta_1\,S_{r\theta}^{(1)} + \zeta_2\,\frac{\partial S_{r\theta}^{(0)}}{\partial r} + \zeta_3\,S_{r\theta}^{(0)} + \zeta_4\,\frac{\partial^2\tau^{(0)}}{\partial r\partial\theta} + \zeta_5\,\frac{\partial\tau^{(0)}}{\partial\theta}, \tag{2.3}$$

где

$$\zeta_{is} = (2-q_2)\,\frac{(q_1^{-1}-1)(\sqrt{\pi}+\pi Q_1/2)-(1-\pi/4)Q_1}{1-\pi/4+(1-q_2)(1+\pi/4+\sqrt{\pi}Q_1)},$$

$$\zeta_T = -\frac{(2-q_2)(1-\pi/4)(Q_2+1/2)/2-(1-q_2)(\sqrt{\pi}Q_1/2+\pi/4)}{1-\pi/4+(1-q_2)(1+\pi/4+\sqrt{\pi}Q_1)},$$

$$\zeta_1 = \gamma(q_2)[\alpha(q_1)-Q_1], \qquad \zeta_2 = \gamma(q_2)[Q_2+0{,}5+\beta(q_2)], \qquad \zeta_3 = -\gamma(q_2)[Q_2+1{,}5+\beta(q_2)],$$

$$\zeta_4 = 0{,}5\gamma(q_2)[\varepsilon_n+2\alpha(q_1)-\varepsilon_T\beta(q_2)], \qquad \zeta_5 = \gamma(q_2)\,[Q_1(Q_2+0{,}5)-\alpha(q_1)],$$

$$\alpha(q_1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{(1-q_1)(2+\sqrt{\pi}Q_1)}{q_1(1-\pi/4)}, \qquad \beta(q_2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{(1-q_2)(\sqrt{\pi}+2Q_1)}{(2-q_2)(1-\pi/4)},$$

$$\gamma(q_2) = [1+\beta(q_2)]^{-1},$$

$Q_1 = -1{,}016\,19$, $Q_2 = -1{,}266\,32$ — интегралы Лоялки [17]; $\varepsilon_T = 1{,}302\,72$; $\varepsilon_n = -0{,}558\,44$ — коэффициент, найденный из условия непротекания молекул газа сквозь поверхность [18].

При $q_1 = q_2 = 1$ уравнения (2.1)–(2.3) переходят в уравнения, полученные в [8, 10] для случая сферической поверхности. Зависимости коэффициентов ζ_i, входящих в (2.3), от коэффициентов аккомодации тангенциального импульса ($q_1 = q_2 = \alpha_\tau$) приведены в табл. 1.

С учетом коэффициентов аккомодации двух первых моментов функции распределения вычислена скорость скольжения разреженного газа вдоль твердой сферической поверхности. Проведенные в [7] расчеты показывают, что использованная в работе модель граничных условий при $q_1 = q_2 = \alpha_\tau$ приводит к результатам, совпадающим с аналогичными результатами, полученными в [6] для зеркально-диффузной модели взаимодействия частиц газа с твердой плоской поверхностью (табл. 2). Различие значений коэффициентов теплового и изотермического скольжений не превышает соответственно 0,72 и 0,005 % для всего диапазона чисел α_τ.

Анализ результатов измерения коэффициента аккомодации тангенциального импульса q_1 [19] показывает, что для поверхностей, не подвергавшихся специальной обработке (технических поверхностей), значения q_1 находятся в интервале $0{,}95 \div 1{,}00$. В то же время непосредственные измерения коэффициента аккомодации q_2 не проводились. Однако, как показывает анализ результатов измерения скорости термофореза крупных аэрозольных частиц [20], $\zeta_T = 0{,}3 \div 0{,}4$. Из (2.2) следует, что в этом случае $q_2 = 0{,}9 \div 1{,}0$.

В заключение отметим, что использованная выше схема постановки граничных условий имеет феноменологический характер, присущий моментным методам в целом: разложение возмущения функции распределения на граничной поверхности необходимо проводить по полной системе ортогональных полиномов от молекулярных скоростей. При этом

Таблица 1

q_1	q_2	ζ_1	ζ_2	ζ_3	ζ_4	ζ_5
0,25	0,25	6,444 27	−2,271 14	0,419 19	4,6002	−3,120 177
	0,50	5,418 44	−1,750 42	0,193 27	3,7642	−2,623 492
	0,75	4,430 96	−1,249 17	−0,024 19	2,9595	−2,145 376
	1,00	3,479 72	−0,766 32	−0,233 68	2,1843	−1,684 806
0,50	0,25	3,402 71	−2,271 14	0,419 19	1,5586	−0,078 617 07
	0,50	2,861 05	−1,750 42	0,193 27	1,2068	−0,066 102 42
	0,75	2,339 64	−1,249 17	−0,024 19	0,868 17	−0,054 055 63
	1,00	1,837 37	−0,766 32	−0,233 68	0,541 96	−0,042 450 97
0,75	0,25	2,388 86	−2,271 14	0,419 19	0,544 75	0,935 236 3
	0,50	2,008 59	−1,750 42	0,193 27	0,354 35	0,786 360 8
	0,75	1,642 54	−1,249 17	−0,024 19	0,171 06	0,643 051 1
	1,00	1,289 92	−0,766 32	−0,233 68	−0,005 49	0,505 000 8
1,00	0,25	1,881 93	−2,271 14	0,419 19	0,037 82	1,442 163
	0,50	1,582 36	−1,750 42	0,193 27	−0,071 88	1,212 592
	0,75	1,293 98	−1,249 17	−0,024 19	−0,177 49	0,991 604 4
	1,00	1,016 19	−0,766 32	−0,233 68	−0,279 22	0,778 726 8

Таблица 2

α_τ	ζ_{is}		ζ_T	
	Данные [6]	Данные [7]	Данные [6]	Данные [7]
0,1	17,103 130	17,102 710	0,264 178 3	0,262 302 2
0,2	8,224 902	8,224 573	0,278 151 0	0,276 568 8
0,3	5,255 112	5,254 859	0,291 923 8	0,290 614 6
0,4	3,762 619	3,762 431	0,305 501 9	0,304 444 7
0,5	2,861 190	2,861 055	0,318 890 6	0,318 064 0
0,6	2,255 410	2,255 316	0,332 094 9	0,331 477 3
0,7	1,818 667	1,818 608	0,345 119 5	0,344 689 2
0,8	1,487 654	1,487 621	0,357 969 2	0,357 704 3
0,9	1,227 198	1,227 184	0,370 648 3	0,370 526 9
1,0	1,016 191	1,016 191	0,383 161 2	0,383 161 2

априори нельзя утверждать, коэффициенты аккомодации какого числа моментов функции распределения необходимо учесть при описании того или иного процесса, обусловленного взаимодействием молекул газа с поверхностью.

В то же время, как показывает проведенное выше сравнение, для корректного описания зависимости коэффициентов скольжения разреженного газа вдоль твердой плоской поверхности от коэффициента аккомодации тангенциального момента импульса при постановке граничных условий достаточно учесть (и положить равными) коэффициенты аккомодации двух первых моментов функции распределения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Коган М. Н.** Динамика разреженного газа. Кинетическая теория. М.: Наука, 1967.
2. **Cercignani C.** The Kramers problem for a not completely diffusing wall // J. Math. Phys. Appl. 1965. V. 10, N 3. P. 568–586.
3. **Cercignani C., Lampis M.** Kinetic model for gas-surface interaction // Transport Theory Statist. Phys. 1971. V. 1. P. 101–114.

4. **Lord R. G.** Some further extention of the Cercignani — Lampis gas-surface interaction model // Phys. Fluids. 1995. V. 7, N 5. P. 1159–1161.
5. **Siewert C. E.** Generalized boundary conditions for the S-model kinetic equations basic to flow in a plane channel // J. Quant. Spectros. Radiat. Transfer. 2000. N 72. P. 75–88.
6. **Siewert C. E., Sharipov F.** Model equations in rarefied gas dynamics: viscous-slip and thermal-slip coefficients // Phys. Fluids. 2002. V. 14, N 12. P. 4123–4129.
7. **Латышев А. В., Юшканов А. А.** Аккомодационные двухмоментные граничные условия в задачах о тепловом и изотермическом скольжениях // Инж.-физ. журн. 2001. Т. 74, № 3. С. 63–69.
8. **Sone Y.** Asymptotic theory of flow of rarefied gas over a smooth boundary. 1 // Rarefied Gas Dynamics. 1969. V. 1. P. 243–253.
9. **Sone Y.** Asymptotic theory of flow of rarefied gas over a smooth boundary. 2 // Rarefied Gas Dynamics. 1971. V. 2. P. 737–749.
10. **Sone Y., Aoki K.** Forces on a spherical particle in a slightly rarefied gas // Rarefied Gas Dynamics. 1977. V. 51, pt 1. P. 417–433.
11. **Beresnev S. A., Chernyak V. G., Fomyagin G. A.** Motion of a spherical particle in a rarefied gas. Pt 2. Drag and thermal polarization // J. Fluid Mech. 1990. V. 219. P. 405–421.
12. **Beresnev S. A., Chernyak V. G.** Thermophoresis of a spherical particle in a rarefied gas: Numerical analysis based on the model kinetic equation // Phys. Fluids. 1995. V. 7, N 7. P. 1743–1756.
13. **Черчиньяни К.** Математические методы в кинетической теории газов. М.: Мир, 1973.
14. **Латышев А. В., Попов В. Н., Юшканов А. А.** Применение метода Кейза в задаче о тепловом скольжении разреженного газа вдоль твердой сферической поверхности // Сиб. журн. индустр. математики. 2002. Т. 5, № 3. С. 103–114.
15. **Латышев А. В., Попов В. Н., Юшканов А. А.** О влиянии свойств искривленной поверхности на значение коэффициента изотермического скольжения // Поверхность. Рентген., синхротрон. и нейтрон. исслед. 2003. № 6. С. 111–116.
16. **Латышев А. В., Попов В. Н., Юшканов А. А.** Вычисление скорости скольжения разреженного газа, обусловленного неравномерностью распределения температуры в слое Кнудсена // Сиб. журн. индустр. математики. 2003. Т. 6, № 1. С. 60–71.
17. **Loyalka S. K.** The Q_n and F_n integrals for the BGK model // Transport Theory Statist. Phys. 1975. V. 4. P. 55–65.
18. **Латышев А. В.** Применение метода Кейза к решению линеаризованного кинетического БГК-уравнения в задаче о температурном скачке // Прикл. математика и механика. 1990. Т. 54, № 4. С. 581–586.
19. **Коленчиц О. А.** Тепловая аккомодация систем газ — твердое тело. Минск: Наука и техника, 1977.
20. **Deriaguin B. V., Yalamov Yu. I.** The theory of thermophoresis and diffusiophoresis of aerosol particles and their experimental testing // Intern. Rev. Aerosol Phys. Chemistry. 1972. V. 3, pt 2. P. 1–200.

Поступила в редакцию 8/X 2002 г.,
в окончательном варианте — 16/VI 2003 г.