

УДК 539.3

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ НЕСЖИМАЕМЫХ СРЕД ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

А. Л. Свистков, Б. Лауке\*

Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013 Пермь

\* Институт исследования полимеров общества Лейбница, 01069 Дрезден

E-mails: svistkov@icmm.ru, laukeb@ipfdd.de

Предложен метод построения системы определяющих уравнений несжимаемой среды с нелинейными диссипативными свойствами при конечных деформациях. Используется схема механического поведения материала, точки которой соединены горизонтально расположенными упругими, вязкими, пластическими и трансмиссионными элементами. Для описания свойств каждого элемента схемы применяются известные уравнения нелинейной теории упругости, теории нелинейных вязких жидкостей, теории пластического течения материала в условиях конечных деформаций среды. Для замыкания системы определяющих уравнений предложено использовать уравнения связи между тензором скоростей деформации материала и тензором скоростей деформации пластического элемента. Трансмиссионные элементы применяются для учета существенного отличия макроскопических деформаций материала от деформаций элементов среды на структурном уровне.

**Ключевые слова:** определяющие уравнения, конечные деформации, упругость, пластичность, вязкость, несжимаемая среда, механические свойства.

**Введение.** Для моделирования вязкоупругого поведения и вязкотекучих свойств конечно-деформируемых материалов используются модели интегрального и дифференциального типа. В моделях интегрального типа история деформирования среды учитывается с помощью интегральных уравнений. Эти уравнения трудно обобщить на более сложные ситуации (например, для моделирования процессов массообмена в диссипативной среде, которые играют основную роль в технологии изготовления полимерных материалов). При учете повреждаемости и тиксотропности эластомерных материалов интегральные модели становятся сложными для практического применения. Более перспективным представляется построение дифференциальных феноменологических моделей. Эти модели просты и удобны для расчетов и идентификации констант по имеющимся экспериментальным данным, позволяют с большой точностью описывать реальные механические свойства материала. По-видимому, этим объясняется возросший в последние годы интерес к дифференциальным моделям сплошной среды при конечных деформациях.

В дифференциальных моделях для описания реологических свойств материала, как правило, используются тензорные внутренние переменные, которым приписывается физический смысл напряжений [1–5] или деформаций [6–12]. Математические модели такого типа удобно строить с помощью схем механического поведения среды. Однако в опубликованных работах не рассматривается общая теория построения моделей дифференциального типа с произвольным соединением элементов для сред с конечными деформациями. Такие модели нельзя получить простым обобщением моделей для сред с малыми дефор-

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Департамента образования и природопользования Пермской области и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-08-96017).

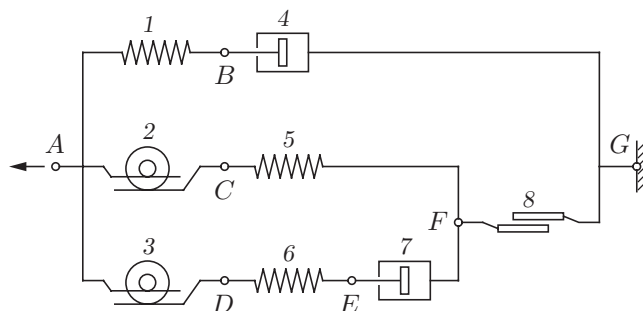


Рис. 1. Одна из возможных схем механического поведения материала:  
 1, 5, 6 — упругие элементы; 2, 3 — трансмиссионные элементы; 4, 7 — вязкие элементы;  
 8 — пластический элемент

мациями. Это обусловлено тем, что полная мера деформации не может быть представлена в виде суммы мер деформации элементов схемы. В уравнениях эволюции внутренних переменных должны использоваться объективные производные, выбор которых требует соответствующего обоснования.

Реологические модели (имеющие простую интерпретацию в виде схем Максвелла, Кельвина — Фойгта, Пойтинга — Томпсона и т. д.) сформулированы в работе [13]. Термодинамическая состоятельность простых определяющих уравнений обсуждается в [14, 15]. По мнению авторов данной работы, наибольший интерес представляют идеи В. А. Пальмова. В настоящей работе использован близкий подход, основанный на аддитивном разложении тензора скоростей деформации среды.

Ниже предлагается простой метод получения определяющих уравнений. Преимуществами этого метода являются наличие у каждого из используемых математических выражений физического смысла, удобство построения математической модели среды, отсутствие в определяющих уравнениях объективных производных от тензоров напряжений. Большое количество способов соединения элементов в схеме предоставляет дополнительные возможности для разработки модели, достаточно точно описывающей поведение среды при минимальном числе внутренних переменных.

**1. Схема механического поведения среды и построение системы определяющих уравнений.** Для построения системы определяющих уравнений сложных сред предлагается использовать схему механического поведения материала. Пример такой схемы показан на рис. 1. Ниже приведены основные правила, которые должны выполняться при построении математической модели материала:

- схема механического поведения среды должна состоять из точек, соединенных упругими, вязкими, пластическими и трансмиссионными элементами;
- все элементы на схеме должны располагаться горизонтально, поэтому можно говорить о левой и правой точках соответствующих элементов;
- элементы соединяются с левой или правой точкой на схеме и не могут соединяться с точкой сверху или снизу;
- каждой точке на схеме ставится в соответствие тензор скоростей деформации этой точки, который играет роль тензорного параметра, необходимого для построения математической модели;
- упругим, вязким и пластическим элементам на схеме ставятся в соответствие тензоры напряжений Коши и тензоры скоростей деформации этих элементов;
- каждому трансмиссионному элементу ставится в соответствие тензор напряжений Коши для левой точки и тензор напряжений Коши для правой точки.

Особенностью рассматриваемого подхода является то, что в нем не используется понятие деформационных градиентов для внутренних точек на схеме механического поведения среды. Поэтому при использовании данного подхода нельзя говорить о мультипликативном разложении деформационного градиента материала на произведение деформационных градиентов элементов схемы. Особенностью этого подхода является применение трансмиссионных элементов.

В рассматриваемом примере (см. рис. 1) схема механического поведения среды состоит из точек  $A, B, C, D, E, F, G$ , соединенных упругими элементами 1, 5 и 6, трансмиссионными элементами 2 и 3, вязкими элементами 4 и 7, пластическим элементом 8. Точкам на схеме ставятся в соответствие тензоры скоростей деформации с соответствующими индексами:  $D_A, D_B, D_C, D_D, D_E, D_F, D_G$ , которые используются для вычисления тензоров скоростей деформации упругих, вязких и пластического элементов. Важная роль отводится левой  $A$  и правой  $G$  точкам схемы механического поведения среды. Алгоритм получения системы определяющих уравнений основан на использовании положений, которые приводятся ниже.

**ПОЛОЖЕНИЕ 1.** Тензор скоростей деформации левой точки схемы совпадает с тензором скоростей деформации среды  $D$ , а тензор скоростей деформации правой точки схемы равен нулю.

**ПОЛОЖЕНИЕ 2.** Тензор скоростей деформации упругих, вязких и пластических элементов вычисляется как разность тензоров скоростей деформации левых и правых точек этих элементов.

**ПОЛОЖЕНИЕ 3.** След любого из используемых в модели тензоров скоростей деформации равен нулю.

В рассматриваемом примере данные утверждения означают, что при построении математической модели следует использовать равенства

$$D_A = D, \quad D_G = 0 \quad (1)$$

для левой и правой точек на схеме,

$$D_1 = D_A - D_B, \quad D_5 = D_C - D_F, \quad D_6 = D_D - D_E \quad (2)$$

для упругих элементов и

$$D_4 = D_B - D_G, \quad D_7 = D_E - D_F, \quad D_8 = D_F - D_G \quad (3)$$

для вязких и пластического элементов. Требование равенства нулю следов тензоров скоростей деформации

$$\text{tr } D_1 = \dots = \text{tr } D_8 = \text{tr } D_A = \dots = \text{tr } D_G = 0$$

обусловлено тем, что определяющие уравнения строятся для модели несжимаемой среды.

**ПОЛОЖЕНИЕ 4.** Трансмиссионный элемент используется в модели для изменения скорости деформации и не может приводить к потерям или производству энергии. Мощность тензора напряжений Коши  $T_k^l$  на тензоре скоростей деформации  $D_k^l$  в левой точке трансмиссионного элемента с номером  $k$  равна мощности тензора напряжений Коши  $T_k^r$  на тензоре скоростей деформации  $D_k^r$  его правой точки:

$$T_k^l \cdot D_k^l = T_k^r \cdot D_k^r \quad (4)$$

(точка означает скалярное умножение девятимерных векторов в девятимерном векторном пространстве, образованном множеством тензоров второго ранга).

В соответствии с условием (4) в рассматриваемом примере должны выполняться равенства

$$T_2^l \cdot D_A = T_2^r \cdot D_C, \quad T_3^l \cdot D_A = T_3^r \cdot D_D. \quad (5)$$

В модели используются тензоры напряжений Коши упругих элементов  $T_1, T_5, T_6$ , вязких элементов  $T_4, T_7$ , пластического элемента  $T_8$ , а также тензоры напряжений Коши левых  $T_2^l, T_3^l$  и правых точек  $T_2^r, T_3^r$  трансмиссионных элементов.

Следующим шагом при построении системы определяющих уравнений является формулировка условий согласования тензоров напряжений Коши. Для этой цели используются следующие положения.

**ПОЛОЖЕНИЕ 5.** Тензор напряжений Коши среды  $T$  равен сумме тензоров напряжений Коши упругих, вязких, пластических элементов и левых точек трансмиссионных элементов, соединенных с левой точкой схемы.

**ПОЛОЖЕНИЕ 6.** Сумма тензоров напряжений Коши упругих, вязких, пластических и правых точек трансмиссионных элементов, соединенных слева с любой внутренней точкой схемы, равна сумме тензоров напряжений Коши упругих, вязких, пластических элементов и левых точек трансмиссионных элементов, соединенных с этой точкой справа.

Используя сформулированные положения для данной модели (см. рис. 1), получим следующие зависимости. Тензор напряжений Коши материала  $T$  равен сумме тензоров напряжений Коши упругого элемента  $T_1$  и тензоров напряжений Коши левых точек трансмиссионных элементов  $T_2^l$  и  $T_3^l$ :

$$T = T_1 + T_2^l + T_3^l. \quad (6)$$

Для внутренних точек  $B, C, D$  и  $E$  справедливы равенства

$$T_1 = T_4, \quad T_2^r = T_5, \quad T_3^r = T_6, \quad T_6 = T_7. \quad (7)$$

Для точки  $F$  выполняется условие

$$T_5 + T_7 = T_8. \quad (8)$$

**2. Механические свойства упругих элементов.** Для описания механического поведения элементов в схеме предлагается использовать известные уравнения механики. Так, для вычисления тензоров напряжений Коши в упругих элементах можно использовать массовую плотность свободной энергии.

**ПОЛОЖЕНИЕ 7.** Массовая плотность свободной энергии среды является функцией температуры и кратностей удлинений упругих элементов

$$f = f(\theta, \dots, \lambda_1^i, \lambda_2^i, \lambda_3^i, \dots),$$

где  $\theta$  — температура;  $\lambda_1^i, \lambda_2^i, \lambda_3^i$  — кратности удлинений  $i$ -го упругого элемента.

**ПОЛОЖЕНИЕ 8.** Девиатор тензора напряжений Коши  $i$ -го упругого элемента вычисляется по формулам нелинейной теории упругости

$$\text{dev } T_i = \text{dev} \left( \rho \sum_{k=1}^3 \lambda_k^i \frac{\partial f}{\partial \lambda_k^i} \mathbf{n}_k^i \otimes \mathbf{n}_k^i \right), \quad \text{dev}(\cdot) = (\cdot) - \frac{1}{3} \text{tr}(\cdot), \quad (9)$$

где  $\rho$  — массовая плотность среды;  $\mathbf{n}_1^i, \mathbf{n}_2^i, \mathbf{n}_3^i$  — ортонормированная тройка собственных векторов тензора растяжений  $V_i = \lambda_1^i \mathbf{n}_1^i \otimes \mathbf{n}_1^i + \lambda_2^i \mathbf{n}_2^i \otimes \mathbf{n}_2^i + \lambda_3^i \mathbf{n}_3^i \otimes \mathbf{n}_3^i$   $i$ -го упругого элемента.

В рассматриваемом примере (см. рис. 1) массовая плотность свободной энергии  $f$  является функцией температуры  $\theta$ , кратностей удлинений первого  $(\lambda_1^1, \lambda_2^1, \lambda_3^1)$ , пятого  $(\lambda_1^5, \lambda_2^5, \lambda_3^5)$  и шестого  $(\lambda_1^6, \lambda_2^6, \lambda_3^6)$  упругих элементов. Напомним, что в данном случае не используются понятия деформационных градиентов для отдельных элементов схемы, поэтому нельзя утверждать, что тензоры растяжения  $V_1, V_5, V_6$  появляются в результате полярного разложения соответствующих деформационных градиентов. Из приведенных

ниже формул следует, что тензоры растяжений  $V_1, V_5, V_6$  являются симметричными и индифферентными. Массовая плотность свободной энергии  $f$  используется для вычисления тензоров напряжений Коши упругих элементов  $T_1, T_5$  и  $T_6$ .

В дальнейшем при записи формул будем использовать точки над символами для обозначения производных по времени от величин при условии, что изменение рассматриваемых величин отслеживается для фиксированной частицы среды. Тот же смысл производной по времени от выражения в круглых скобках (для фиксированной частицы среды) будет иметь точка около закрывающейся скобки. Для завершения описания поведения упругих элементов необходимо определить, каким образом изменяются во времени тензоры растяжения. Предлагается использовать следующее утверждение.

**ПОЛОЖЕНИЕ 9.** Для  $i$ -го упругого элемента материальная производная по времени от тензора растяжения этого элемента  $\dot{V}_i$  вычисляется по формуле

$$\frac{2}{\delta_i} Y_i^{0,5} D_i Y_i^{0,5} = \dot{Y}_i - Y_i W_R^T - W_R Y_i, \quad W_R = \dot{R} R^T, \quad (10)$$

где  $Y_i = V_i^{2/\delta_i}$ ,  $\delta_i > 0$ ;  $R$  — тензор поворота в полярном разложении  $F = VR$  деформационного градиента среды  $F$  на левый тензор растяжения  $V$  и поворот  $R$ .

**СЛЕДСТВИЕ 1.** Известные формулы теории упругости нелинейных сред для скоростей изменения во времени кратностей удлинения  $i$ -го упругого элемента

$$\dot{\lambda}_k^i = \lambda_k^i \mathbf{n}_k^i \otimes \mathbf{n}_k^i \cdot D_i, \quad k = 1, 2, 3 \quad (11)$$

и скорости совершения работы в этом элементе

$$T_i \cdot D_i = \rho \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f}{\partial \lambda_k^i} \dot{\lambda}_k^i \quad (12)$$

являются следствиями уравнения (10) в случае, когда параметр  $\delta_i$  является константой.

Докажем равенство (11). С этой целью запишем (10) в более удобном для анализа виде

$$\frac{2}{\delta_i} D_i = Y_i^{-0,5} \dot{Y}_i Y_i^{-0,5} - Y_i^{0,5} W_R^T Y_i^{-0,5} - Y_i^{-0,5} W_R Y_i^{0,5}. \quad (13)$$

Левую и правую части (13) скалярно умножим на выражение  $\lambda_k^i \mathbf{n}_k^i \otimes \mathbf{n}_k^i$ :

$$\lambda_k^i \mathbf{n}_k^i \otimes \mathbf{n}_k^i \cdot \frac{2}{\delta_i} D_i = \lambda_k^i \mathbf{n}_k^i \otimes \mathbf{n}_k^i \cdot (Y_i^{-0,5} \dot{Y}_i Y_i^{-0,5} - Y_i^{0,5} W_R^T Y_i^{-0,5} - Y_i^{-0,5} W_R Y_i^{0,5}). \quad (14)$$

Первое слагаемое в правой части (14) запишем с использованием собственных векторов и собственных значений тензора растяжения  $i$ -го упругого элемента:

$$\begin{aligned} \lambda_k^i \mathbf{n}_k^i \otimes \mathbf{n}_k^i \cdot Y_i^{-0,5} \dot{Y}_i Y_i^{-0,5} &= \lambda_k^i \mathbf{n}_k^i \otimes \mathbf{n}_k^i \cdot V_i^{-1/\delta_i} (V_i^{2/\delta_i}) \cdot V_i^{-1/\delta_i} = \\ &= \lambda_k^i \mathbf{n}_k^i \otimes \mathbf{n}_k^i \cdot \left( \sum_{n=1}^3 (\lambda_n^i)^{-1/\delta_i} \mathbf{n}_n^i \otimes \mathbf{n}_n^i \right) \left( \sum_{j=1}^3 (\lambda_j^i)^{2/\delta_i} \mathbf{n}_j^i \otimes \mathbf{n}_j^i \right) \cdot \left( \sum_{m=1}^3 (\lambda_m^i)^{-1/\delta_i} \mathbf{n}_m^i \otimes \mathbf{n}_m^i \right). \end{aligned} \quad (15)$$

С помощью тождества

$$\mathbf{n}_k^i \otimes \mathbf{n}_k^i \cdot (\mathbf{n}_j^i \otimes \mathbf{n}_j^i) \cdot \equiv 0$$

и правила скалярного умножения тензоров второго ранга

$$A \cdot BC = CA^T \cdot B^T,$$

справедливого для произвольных тензоров  $A$ ,  $B$  и  $C$ , окончательно получаем выражение

$$\begin{aligned} \lambda_k^i \mathbf{n}_k^i \otimes \mathbf{n}_k^i \cdot Y_i^{-0,5} \dot{Y}_i Y_i^{-0,5} &= \\ &= (\lambda_k^i)^{-2/\delta_i+1} \mathbf{n}_k^i \otimes \mathbf{n}_k^i \cdot \sum_{j=1}^3 \frac{2}{\delta_i} (\lambda_j^i)^{2/\delta_i-1} \dot{\lambda}_j^i \mathbf{n}_j^i \otimes \mathbf{n}_j^i = \frac{2}{\delta_i} \dot{\lambda}_k^i. \end{aligned} \quad (16)$$

Нетрудно убедиться, что второе и третье слагаемые в правой части равенства (14) равны нулю. Покажем это на примере второго слагаемого, которое можно упростить с использованием правила скалярного умножения тензоров второго ранга:

$$\begin{aligned} -\lambda_k^i \mathbf{n}_k^i \otimes \mathbf{n}_k^i \cdot Y_i^{0,5} W_R^T Y_i^{-0,5} &= \\ &= -\lambda_k^i \mathbf{n}_k^i \otimes \mathbf{n}_k^i \cdot \left( \sum_{n=1}^3 (\lambda_n^i)^{1/\delta_i} \mathbf{n}_n^i \otimes \mathbf{n}_n^i \right) W_R^T \left( \sum_{m=1}^3 (\lambda_m^i)^{-1/\delta_i} \mathbf{n}_m^i \otimes \mathbf{n}_m^i \right) = \\ &= -\lambda_k^i \mathbf{n}_k^i \otimes \mathbf{n}_k^i \cdot W_R^T. \end{aligned}$$

Поскольку скалярное произведение симметричного и антисимметричного тензоров равно нулю, окончательно получаем

$$-\lambda_k^i \mathbf{n}_k^i \otimes \mathbf{n}_k^i \cdot Y_i^{0,5} W_R^T Y_i^{-0,5} = 0. \quad (17)$$

Таким образом, равенство (14) с учетом (16) и (17) принимает вид

$$\lambda_k^i \mathbf{n}_k^i \otimes \mathbf{n}_k^i \cdot \frac{2}{\delta_i} D_i = \frac{2}{\delta_i} \dot{\lambda}_k^i.$$

Отсюда следует справедливость равенства (11).

Выражение (12) доказывается на основании формулы (11) с использованием равенства

$$\rho \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f}{\partial \lambda_k^i} \dot{\lambda}_k^i = \rho \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f}{\partial \lambda_k^i} \lambda_k^i \mathbf{n}_k^i \otimes \mathbf{n}_k^i \cdot D_i.$$

Условие (9) означает, что тензор напряжений Коши  $i$ -го упругого элемента вычисляется по формуле

$$T_i = p_i I + \rho \sum_{k=1}^3 \lambda_k^i \frac{\partial f}{\partial \lambda_k^i} \mathbf{n}_k^i \otimes \mathbf{n}_k^i,$$

где  $p_i$  — неопределенный параметр. След тензора скоростей деформации упругого элемента равен нулю:  $\text{tr } D_i = I \cdot D_i = 0$ . Сказанное выше позволяет сделать вывод о справедливости выражения (12).

**СЛЕДСТВИЕ 2.** В общем случае, когда параметры  $\delta_i$  могут изменять свое значение в процессе деформирования материала, скорость изменения во времени кратности удлинения  $i$ -го упругого элемента и скорость совершения работы в этом элементе определяются по формулам

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_k^i &= \lambda_k^i \mathbf{n}_k^i \otimes \mathbf{n}_k^i \cdot D_i + \frac{\dot{\delta}_i}{\delta_i} \lambda_k^i \ln(\lambda_k^i), \\ T_i \cdot D_i &= \rho \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f}{\partial \lambda_k^i} \dot{\lambda}_k^i - \frac{\dot{\delta}_i \rho}{\delta_i} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f}{\partial \lambda_k^i} \lambda_k^i \ln(\lambda_k^i). \end{aligned} \quad (18)$$

Изменение параметров  $\delta_i$  во времени целесообразно использовать при моделировании роста поврежденности в материале. Если  $\delta_i$  не меняются, то свойства упругих элементов определяются известными уравнениями теории нелинейных упругих сред (11), (12). При появлении повреждений в материале изменяется соотношение между макроскопическими деформациями и структурными деформациями элементов среды, что и учитывается с помощью параметров  $\delta_i$ . Равенство (18) свидетельствует о том, что часть совершаемой в упругом элементе работы расходуется на изменение свободной энергии, в то время как другая часть расходуется на увеличение поврежденности среды. В данной работе рассматриваются только несжимаемые материалы, поэтому предполагается, что появление повреждений не должно приводить к изменению объема среды, например, при разломе на части агрегатов частиц технического углерода в резине при ее деформировании. Между частями агрегатов возникают поры, а упругие волокна из ориентированного полимера. Среда остается несжимаемой.

**3. Несжимаемость упругих элементов.** Покажем, что условие несжимаемости упругих элементов в схеме механического поведения среды не противоречит условию выполнения равенства (10). Для этого левую и правую части равенства (13) скалярно умножим на единичный тензор  $I = \mathbf{n}_1^i \otimes \mathbf{n}_1^i + \mathbf{n}_2^i \otimes \mathbf{n}_2^i + \mathbf{n}_3^i \otimes \mathbf{n}_3^i$ . В результате получим

$$I \cdot \frac{2}{\delta_i} D_i = \sum_{k=1}^3 \mathbf{n}_k^i \otimes \mathbf{n}_k^i \cdot (Y_i^{-0,5} \dot{Y}_i Y_i^{-0,5} - Y_i^{0,5} W_R^T Y_i^{-0,5} - Y_i^{-0,5} W_R Y_i^{0,5}).$$

Левая часть этого равенства равна нулю, поскольку след тензора скоростей деформации равен нулю. Повторив выкладки, аналогичные проведенным при получении формул (14)–(16), находим

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^3 (\lambda_k^i)^{-2/\delta_i} \mathbf{n}_k^i \otimes \mathbf{n}_k^i \cdot \sum_{j=1}^3 \left( \frac{2}{\delta_i} (\lambda_j^i)^{2/\delta_i - 1} \dot{\lambda}_j^i - \frac{2(\lambda_j^i)^{2/\delta_i}}{\delta_i^2} \delta_i \ln \lambda_j^i \right) \mathbf{n}_j^i \otimes \mathbf{n}_j^i = \\ &= \frac{2}{\delta_i} \sum_{j=1}^3 \frac{\dot{\lambda}_j^i}{\lambda_j^i} - \frac{2\delta_i}{\delta_i^2} \sum_{j=1}^3 \ln \lambda_j^i = \frac{2}{\delta_i} (\ln (\lambda_1^i \lambda_2^i \lambda_3^i))' - \frac{2\delta_i}{\delta_i^2} \ln (\lambda_1^i \lambda_2^i \lambda_3^i). \end{aligned}$$

Решением этого уравнения является произведение  $\lambda_1^i \lambda_2^i \lambda_3^i = 1$ , что и требовалось доказать.

**4. Механические свойства вязких и пластических элементов.** Для учета вязкости и пластичности используем следующие положения.

**ПОЛОЖЕНИЕ 10.** Девиатор тензора напряжений Коши  $j$ -го вязкого элемента вычисляется по формулам теории нелинейной вязкой жидкости

$$\text{dev } T_j = 2\eta_j D_j, \quad (19)$$

где коэффициент сдвиговой вязкости является неотрицательной функцией параметров состояния  $\eta_j \geq 0$ .

**ПОЛОЖЕНИЕ 11.** Девиатор тензора напряжений Коши пластического элемента вычисляется по формулам теории пластического течения

$$D_n = \sqrt{\frac{D_n \cdot D_n}{\text{dev } T_n \cdot \text{dev } T_n}} \text{dev } T_n, \quad (20)$$

где  $n$  — номер пластического элемента.

Для моделирования процесса пластического течения необходимо исключить неопределенность в выражении (20). Для этого можно использовать математическое выражение, которое связывает тензор скоростей деформации пластического элемента с тензором скоростей деформации среды.

**ПОЛОЖЕНИЕ 12.** Особенности механического поведения пластического элемента определяются пропорциональной зависимостью между интенсивностью тензора скоростей деформации пластического элемента и интенсивностью тензора скоростей деформации самой среды:

$$\sqrt{D_n \cdot D_n} = \varkappa_n \sqrt{D \cdot D}.$$

Здесь множитель  $\varkappa_n$  является неотрицательной функцией, заданной зависимостью

$$\varkappa_n = \begin{cases} 0, & \Phi_n(V, \dots) < g_n, \\ \zeta(g_n), & \Phi_n(V, \dots) = g_n. \end{cases}$$

Функция текучести  $\Phi_n$ , с помощью которой формулируется критерий развития в среде пластических деформаций, является функцией тензора растяжений  $V$  и других параметров состояния среды. Пластическое деформирование среды происходит в том и только в том случае, когда функция текучести  $\Phi_n$  имеет максимальное значение за всю историю существования среды:

$$g_n = \max \Phi_n(V, \dots).$$

**5. Трансмиссионные элементы в модели.** В данной работе рассматриваются изотропные материалы, поэтому для трансмиссионного элемента предлагается использовать простые соотношения между тензорами напряжений и тензорами скоростей деформации в его левой и правой точках.

**ПОЛОЖЕНИЕ 13.** Трансмиссионный элемент служит в модели для увеличения тензора скорости деформации в  $\nu_k$  раз при соответствующем уменьшении тензора напряжений Коши:

$$T_k^l = \nu_k T_k^r, \quad D_k^l = \frac{1}{\nu_k} D_k^r$$

( $\nu_k$  — неотрицательная функция параметров состояния среды;  $k$  — номер трансмиссионного элемента).

В модели, представленной на рис. 1, трансмиссионные элементы служат для увеличения тензоров скоростей деформации точек  $C$  и  $D$  по сравнению с тензором скоростей деформации точки  $A$ :

$$D_A = \frac{1}{\nu_2} D_C, \quad D_A = \frac{1}{\nu_3} D_D.$$

Условие отсутствия источников и стоков энергии в трансмиссионных элементах (4) автоматически выполняется.

Трансмиссионные элементы вводятся в модель для более точного описания процессов в реальном материале. С одной стороны, использование этих элементов может позволить добиться более высокой точности описания механического поведения материала, с другой — появляется возможность понять и количественно оценить роль процессов на структурном уровне. Поясним это на примере резины — нанокompозита, способного при растяжении удлиняться более чем в пять раз, а после снятия нагрузки возвращаться в состояние, близкое к исходному. Резины представляют собой наполненные техническим углеродом эластомеры. Частицы технического углерода имеют радиусы от 10 до 20 нм и объединены в агрегаты, которые соприкасаются друг с другом, образуя в эластомере жесткий каркас. По-видимому, при деформировании материала происходит сползание полимерных цепей из слоев вблизи частиц наполнителя в зазоры между включениями и формирование в зазорах высокопрочных волокон из одноосно-ориентированного полимера (рис. 2). В результате



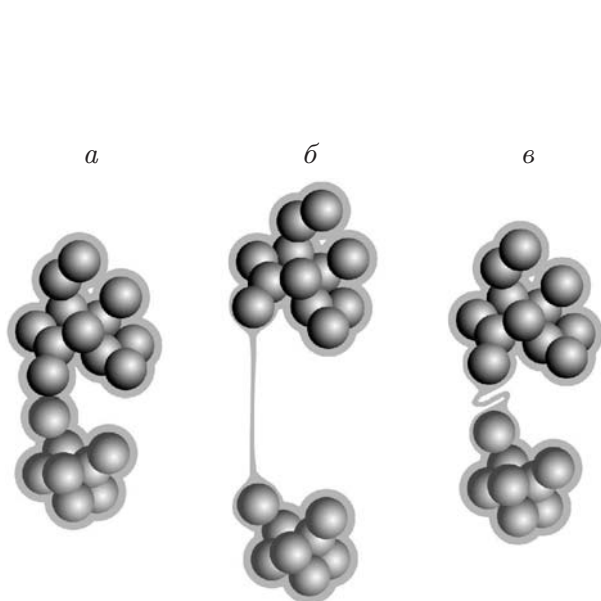


Рис. 2

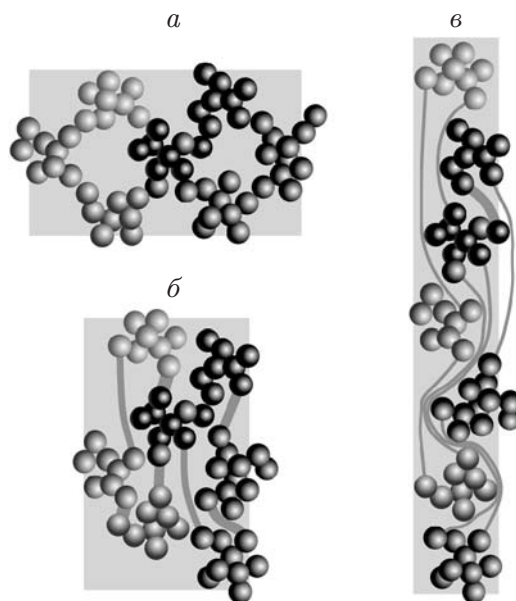


Рис. 3

Рис. 2. Иллюстрация к гипотезе о формировании волокон ориентированного полимера в зазоре между соседними агрегатами технического углерода при деформировании резины:

*a* — расположение соседних агрегатов в начальный момент времени; *б* — формирование ориентированных волокон в результате сползания полимерных цепей из слоев в зазор между агрегатами при растяжении; *в* — провисание волокон при снятии нагрузки

Рис. 3. Расположение агрегатов частиц технического углерода при больших деформациях резины:

*a* — исходное расположение агрегатов частиц наполнителя; *б* — расположение агрегатов при удлинении образца материала в два раза; *в* — расположение агрегатов при удлинении образца материала в три раза

повышается на порядок (по сравнению с материалом без наполнителя) макроскопическая прочность эластомеров при одновременном увеличении деформаций в момент разрыва.

Следует отметить, что резины являются необычными нанокомпозитами. Методы самосогласования или приемы исследования свойств на периодических ячейках к ним неприменимы. Большие деформации материала приводят к существенному изменению его структуры (рис. 3). Выполнение условия несжимаемости среды возможно только в том случае, когда близко расположенные агрегаты частиц технического углерода при удлинении образца материала в два раза удаляются друг от друга, а при удлинении в четыре раза расходятся на очень большие расстояния. При этом длина волокон, соединяющих агрегаты, должна увеличиться в десятки раз (см. рис. 3). Площадь заштрихованной области не меняется. Расположить в этой области изображения агрегатов частиц технического углерода удастся только в том случае, если допускается значительное увеличение длины соединяющих их волокон. Учесть такое поведение волокон ориентированного полимера в модели позволяют трансмиссионные элементы.

Следует обратить внимание на то, почему уравнение эволюции левого тензора растяжения упругого элемента  $V_i$  выбрано в виде (10). Рассмотрим модель, приведенную на рис. 1, в случае, когда вязкие и пластический элементы не работают (рис. 4), например, на втором цикле деформирования материала по заданной траектории с очень большой скоро-

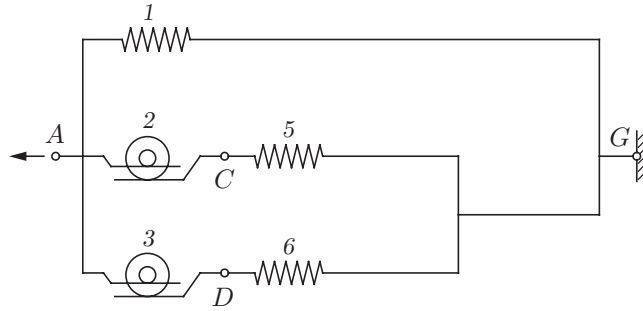


Рис. 4. Схема, представленная на рис. 1, в условиях деформирования, когда пластический элемент и оба вязких элемента не работают (обозначения те же, что на рис. 1)

стью. Все возможные пластические деформации произошли на первом цикле. Второй цикл осуществляется за время, существенно меньшее характерного времени вязкоупругого процесса. Естественно ожидать, что в этих условиях среда будет вести себя как гиперупругий материал. Такая ситуация имеет место, если использовать в модели следующие условия:  $\delta_1 = 1, \nu_2 = \delta_5, \nu_3 = \delta_6$ . Действительно, в соответствии с уравнением (10) поведение упругого элемента 1 на рис. 4 соответствует известным законам нелинейной теории упругости

$$2Y^{0,5}DY^{0,5} = \dot{Y} - YW_R^T - W_R Y, \quad Y = V_1^2. \quad (21)$$

Такому же уравнению удовлетворяет левый тензор растяжения материала  $V$ :

$$2VDV = (V^2)^\cdot - V^2W_R^T - W_R V^2.$$

Эволюция тензоров  $V$  и  $V_1$  однозначно определяется тензором скоростей деформации  $D$  и спином  $W_R$  среды, которые в недеформированном материале совпадают с единичным тензором. Все это позволяет говорить о равенстве  $V$  и  $V_1$ .

Исследуем поведение упругих элементов 5, 6. Для трансмиссионных элементов справедливы зависимости

$$D = D_5/\nu_2, \quad D = D_6/\nu_3.$$

Это означает, что уравнения эволюции тензоров растяжения имеют вид (21), но тензор  $Y$  в них связан с  $V_5$  и  $V_6$  зависимостями

$$Y = V_5^{2/\nu_2}, \quad Y = V_6^{2/\nu_3}.$$

В недеформированном материале тензоры  $V_5, V_6$  совпадают с единичным. Это позволяет сделать вывод о существовании функциональной зависимости тензоров растяжения упругих элементов от левого тензора растяжения материала:

$$V_1 = V, \quad V_5 = V^{\nu_2}, \quad V_6 = V^{\nu_3}.$$

В рассматриваемом случае вязкие и пластический элементы не работают. Следовательно, имеет место гиперупругое поведение среды, свободная энергия которой однозначно определяется левым тензором растяжения материала. Для того чтобы получить этот результат, необходимо выбрать подходящие значения для параметров  $\delta_1, \delta_5, \delta_6$ .

**6. Проверка неравенства диссипации.** Из определяющих уравнений модели должны следовать неравенства диссипации

$$T \cdot D - \rho(\dot{f} + s\dot{\theta}) - \frac{\mathbf{h} \cdot \text{grad } \theta}{\theta} \geq 0, \quad (22)$$

где  $\mathbf{h}$  — тепловой поток;  $s$  — энтропия материала. Градиент температуры определяется в актуальной конфигурации.

ПОЛОЖЕНИЕ 14. Энтропия материала  $s$  и тепловой поток  $\mathbf{h}$  вычисляются по формулам неравновесной термодинамики

$$s = -\frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad \mathbf{h} = -c_h \text{grad } \theta, \quad (23)$$

где  $c_h > 0$  — теплопроводность.

ПОЛОЖЕНИЕ 15. Для всех упругих элементов должно выполняться неравенство

$$\delta_i \left( \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f}{\partial \lambda_k^i} \lambda_k^i \ln(\lambda_k^i) \right) \leq 0. \quad (24)$$

Докажем справедливость неравенства (22) для материала, механическое поведение которого определяется схемой, показанной на рис. 1. Для любого другого материала доказательство будет аналогичным. Раскроем скалярное произведение  $T \cdot D$ , используя формулы (1), (2), (5), (6) и вычисляя ряд очевидных преобразований:

$$\begin{aligned} T \cdot D &= (T_1 + T_2^l + T_3^l) \cdot D = T_1 \cdot D + T_2^r \cdot D_C + T_3^r \cdot D_D = \\ &= T_1 \cdot (D_A - D_B) + T_1 \cdot D_B + T_2^r \cdot (D_C - D_F) + T_2^r \cdot D_F + T_3^r \cdot (D_D - D_E) + T_3^r \cdot D_E = \\ &= T_1 \cdot D_1 + T_1 \cdot D_B + T_2^r \cdot D_5 + T_2^r \cdot D_F + T_3^r \cdot D_6 + T_3^r \cdot D_E. \end{aligned}$$

Проводя дальнейшее упрощение с помощью равенств (1), (3), (7), (8), получаем

$$\begin{aligned} T \cdot D &= T_1 \cdot D_1 + T_1 \cdot D_B + T_5 \cdot D_5 + T_5 \cdot D_F + T_6 \cdot D_6 + T_7 \cdot D_E = \\ &= T_1 \cdot D_1 + T_4 \cdot D_B + T_5 \cdot D_5 + T_5 \cdot D_F + T_6 \cdot D_6 + T_7 \cdot (D_E - D_F) + T_7 \cdot D_F = \\ &= T_1 \cdot D_1 + T_4 \cdot D_4 + T_5 \cdot D_5 + T_5 \cdot D_8 + T_6 \cdot D_6 + T_7 \cdot D_7 + T_7 \cdot D_8 = \\ &= T_1 \cdot D_1 + \sum_{k=4}^8 T_k \cdot D_k. \end{aligned}$$

Таким образом, мощность действующих в среде напряжений равна сумме мощностей напряжений в каждом элементе схемы механического поведения среды, за исключением трансмиссионных элементов. В результате неравенство диссипации (22) принимает вид

$$T_1 \cdot D_1 + \sum_{k=4}^8 T_k \cdot D_k - \rho(\dot{f} + s\dot{\theta}) - \frac{\mathbf{h} \cdot \text{grad } \theta}{\theta} \geq 0. \quad (25)$$

В рассматриваемом примере плотность свободной энергии материала является функцией температуры и кратностей удлинений упругих элементов:

$$f = f(\theta, \lambda_1^1, \lambda_2^1, \lambda_3^1, \lambda_1^5, \lambda_2^5, \lambda_3^5, \lambda_1^6, \lambda_2^6, \lambda_3^6).$$

С учетом (18) и (23) подставим в неравенство (25) значение материальной производной от плотности свободной энергии

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \theta} \dot{\theta} + \sum_{k=1,5,6} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial \lambda_k^i} \dot{\lambda}_k^i.$$

В результате получаем ограничение

$$\sum_{n=4,7,8} T_n \cdot D_n - \sum_{i=1,5,6} \sum_{k=1}^3 \frac{\delta_i \rho}{\delta_i} \frac{\partial f}{\partial \lambda_k^i} \lambda_k^i \ln(\lambda_k^i) + \frac{c_h \text{grad } \theta \cdot \text{grad } \theta}{\theta} \geq 0.$$

С использованием свойств вязких (19) и пластических (20) элементов преобразуем это ограничение к виду

$$\sum_{n=4,7} T_n \cdot \frac{\text{dev } T_n}{2\eta_n} + T_8 \cdot \sqrt{\frac{D_8 \cdot D_8}{\text{dev } T_8 \cdot \text{dev } T_8}} \text{dev } T_8 - \sum_{i=1,5,6} \sum_{k=1}^3 \frac{\dot{\delta}_i \rho}{\delta_i} \frac{\partial f}{\partial \lambda_k^i} \lambda_k^i \ln(\lambda_k^i) + \frac{c_h \text{grad } \theta \cdot \text{grad } \theta}{\theta} \geq 0.$$

С помощью тождества

$$A \cdot \text{dev } A = \text{dev } A \cdot \text{dev } A$$

неравенство диссипации представим в окончательном виде

$$\sum_{n=4,7} \frac{1}{2\eta_n} \text{dev } T_n \cdot \text{dev } T_n + \sqrt{\frac{D_8 \cdot D_8}{\text{dev } T_8 \cdot \text{dev } T_8}} \text{dev } T_8 \cdot \text{dev } T_8 - \sum_{i=1,5,6} \sum_{k=1}^3 \frac{\dot{\delta}_i \rho}{\delta_i} \left( \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f}{\partial \lambda_k^i} \lambda_k^i \ln(\lambda_k^i) \right) + \frac{c_h \text{grad } \theta \cdot \text{grad } \theta}{\theta} \geq 0.$$

Поскольку сдвиговые вязкости  $\eta_n$ , параметры  $\delta_i$  и теплопроводность  $c_h$  положительны, неравенство диссипации будет справедливо для всех упругих элементов при выполнении ограничений (24). Физический смысл неравенств (24) сводится к следующему: изменение параметров  $\delta_i$  должно происходить только в одном направлении, которое определяют неравенства (24). Поврежденность материала может только увеличиваться.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Dafalias Y. F.** Constitutive model for large viscoelastic deformations of elastomeric materials // Mech. Res. Comm. 1991. V. 18. P. 61–66.
2. **Govindjee S., Simo J. C.** Mullins' effect and the strain amplitude dependence of the storage modulus // Intern. J. Solids Structures. 1992. V. 29. P. 1737–1751.
3. **Holzappel G. A., Simo J. C.** A new viscoelastic constitutive model for continuous media at finite thermomechanical changes // Intern. J. Solids Structures. 1996. V. 33. P. 3019–3034.
4. **Holzappel G. A.** On large strain viscoelasticity: continuum formulation and finite element applications to elastomeric structures // Intern. J. Numer. Methods Engng. 1996. V. 39. P. 3903–3926.
5. **Simo J. C.** On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model: formulation and computational aspects // Comput. Methods Appl. Mech. Engng. 1987. V. 60. P. 153–173.
6. **Govindjee S., Reese S.** A presentation and comparison of two large deformation viscoelasticity models // J. Engng Mater. Tech. 1997. V. 119. P. 251–255.
7. **Haupt P., Lion A., Backhaus E.** On the dynamic behaviour of polymers under finite strains: constitutive modeling and identification of parameters // Intern. J. Solids Structures. 2000. V. 37. P. 3633–3646.
8. **Lion A.** A physically based method to represent the thermomechanical behaviour of elastomers // Acta Mech. 1997. V. 123. P. 1–25.
9. **Lion A.** On the large deformation behaviour of reinforced rubber at different temperatures // J. Mech. Phys. Solids. 1997. V. 45. P. 1805–1834.
10. **Lion A.** Thixotropic behaviour of rubber under dynamic loading histories: experiments and theory // J. Mech. Phys. Solids. 1998. V. 46. P. 895–930.

11. **Miehe C., Keck J.** Superimposed finite elastic-viscoelastic-plastoelastic stress response with damage in filled rubbery polymers. Experiments, modelling and algorithmic implementation // J. Mech. Phys. Solids. 2000. V. 48. P. 323–365.
12. **Reese S., Govindjee S.** A theory of finite viscoelasticity and numerical aspects // Intern. J. Solids Structures. 1998. V. 35. P. 3455–3482.
13. **Пальмов В. А.** Реологические модели в нелинейной механике деформируемых тел // Успехи механики. 1980. Т. 3, № 3. С. 75–115.
14. **Пальмов В. А.** Сравнение методов декомпозиции деформации в нелинейной вязкоупругости и упругопластичности // Упругость и неупругость: Сб., посвящ. 90-летию со дня рожд. А. А. Ильюшина. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 2001. С. 81–87.
15. **Пальмов В. А., Штайн Е.** Разложение упругопластической деформации на упругую и пластическую составляющие // Математическое моделирование систем и процессов. Пермь: Перм. гос. ун-т, 2001. Т. 9. С. 110–126.
16. **Palmov V. A.** Comparison of different approaches in viscoelastoplasticity for large strain // Z. angew. Math. Mech. 2000. Bd 80. S. 801–806.

*Поступила в редакцию 5/IX 2006 г.,  
в окончательном варианте — 13/II 2008 г.*

---