

вается, а сами напряжения сильно релаксируют. Расчеты показывают, что в формировании напряженного состояния под кольцом проявляются две тенденции: к изменению контактных напряжений за счет неоднородности цилиндра и к уменьшению напряжений за счет релаксации. Первая может проявиться двояко в зависимости от характера неоднородности. Это можно четко проследить по результатам первого примера, когда влияние релаксации мало. Второй пример демонстрирует взаимодействие двух тенденций. Здесь за счет неоднородности материалов происходит, с одной стороны, сглаживание распределения контактных напряжений, когда максимальные напряжения уменьшаются, а минимальные растут. С другой стороны, контактные напряжения уменьшаются за счет процесса релаксации. Для максимальных напряжений обе тенденции ведут к их уменьшению. Для минимальных в начальный период преобладающей является первая тенденция, поэтому напряжения несколько возрастают. Однако с течением времени более сильной становится вторая тенденция и минимальные напряжения начинают уменьшаться.

Авторы благодарят Н. Х. Арутюняна за помощь и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно стареющих тел // Изв. АН СССР. МТТ.— 1976.— № 3.
2. Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б. Теория ползучести неоднородных тел.— М.: Наука, 1983.
3. Манжиров А. В. Плоские и осесимметричные задачи о действии нагрузок на тонкий неоднородный вязкоупругий слой // ПМТФ.— 1983.— № 5.
4. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками.— М.: Наука, 1983.
5. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести.— М.; Л.: Гостехиздат, 1952.
6. Шапиро Г. С. О сжатии бесконечного полого и кругового цилиндра давлением, приложенным на участке боковой поверхности // ПММ.— 1943.— Т. 7, вып. 5.
7. Александров В. М., Манжиров А. В. О двумерных интегральных уравнениях в прикладной механике деформируемых твердых тел // ПМТФ.— 1987.— № 5.
8. Манжиров А. В. Контактные задачи о взаимодействии вязкоупругих оснований, подверженных старению, с системами неодновременно прикладываемых штампов // ПММ.— 1987.— Т. 51, вып. 4.
9. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике.— М.: Наука, 1970.
10. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов.— М.: Наука, 1967.
11. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды: Специальные функции.— М.: Наука, 1983.
12. Struik L. C. I. Physical aging in amorphous polymers and other materials.— Amsterdam: Elsevier, 1978.

г. Москва

Поступила 14/XII 1987 г.,
в окончательном варианте — 14/VI 1989 г.

УДК 539.3

В. Н. Аптуков, А. В. Фонарев

РАСЧЕТ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ НА НЕРЕГУЛЯРНЫХ ТРЕУГОЛЬНЫХ СЕТКАХ С ПЕРЕСТРОЙКОЙ

1. Введение. Методы решения задач динамического деформирования твердых тел очень разнообразны, что определяется широким диапазоном процессов высокоскоростной деформации и различными технологическими приложениями. Не существует каких-либо универсальных методов, каждый метод ограничен сравнительно узкими рамками согласно области его эффективного применения. Анализ современного состояния вопроса по численному моделированию нестационарных задач динамики упругопластических тел приведен в [1].

© 1990 Аптуков В. Н., Фонарев А. В.

Краткую классификацию методов можно провести по разным признакам, обусловленным характером исследуемых процессов. Явные методы применяются для изучения волновых процессов, неявные — для решения динамических задач неволнового характера с малыми градиентами. Можно назвать схемы сквозного счета, использующие искусственную или аппроксимационную вязкость, и схемы с явным выделением поверхностей разрыва (характеристические). Нерешенной проблемой остается моделирование процессов с большим формоизменением расчетной области. При эйлеровой сетке возникают серьезные трудности по удовлетворению граничных условий на контактных поверхностях. Большие формоизменения затрудняют использование и чисто лагранжевых сеток. В настоящее время в связи с этим развиваются различные «гибридные» схемы [2, 3].

Весьма простой и эффективный метод расчета упругопластических течений — схема Уилкинса [4]. Естественные попытки ее применения для задач с большими формоизменениями приводят к перестройке сетки в области сильных искажений. Частный случай перестройки с исключением искаженных элементов на четырехугольной сетке реализован в [5]. Позднее авторами [5] перестройка сетки использовалась для явного выделения поверхности откольной трещины [6]. Альтернативный алгоритм учета поверхностей трещинообразования или скольжения путем раздвоения узлов сетки применялся в [7, 8]. Более эффективен алгоритм нерегулярной перестройки сетки, развиваемый для метода конечных элементов [9]. Топология регулярных сеток становится непригодной при больших искажениях и для аппроксимации областей сложной геометрии.

Таким образом, представляет интерес построение и реализация схемы Уилкинса на нерегулярных треугольных сетках с общим алгоритмом перестройки. Первая попытка реализации такого алгоритма осуществлена в [10].

2. Триангуляция. Метод естественной аппроксимации производных [4] не накладывает никаких ограничений на тип разностной сетки. Поэтому для областей сложной геометрии или областей с большими искажениями расчетной сетки естественно брать уже в качестве исходной нерегулярную треугольную сетку. Кроме того, требование регулярности вводит в противоречие со стремлением повысить точность аппроксимации в локальных областях, где проходит перестройка.

Есть множество алгоритмов автоматической триангуляции сложных областей [11, 12], использование которых определяется характером задачи, типом области и др. По нашему мнению, при триангуляции целесообразна такая последовательность этапов: разбиение исходной области на подобласти в соответствии с физическим смыслом задачи или геометрии; построение в каждой подобласти грубой сетки независимо от соседних подобластей; сгущение сетки путем введения новых узлов и (или) изменением топологии; сглаживание сетки по всей области в целом или отдельно по подобластям.

Указанная последовательность этапов реализована в виде модулей на языке ФОРТРАН. Качество сетки зависит в основном от первых двух этапов. Базовый модуль второго этапа основан на триангуляции путем сокращения области [13], с применением в ходе формирования сетки нерегулярной перестройки.

Операция сглаживания сетки заключается в последовательном переносе каждого внутреннего узла сетки в центр тяжести его «звезды». Величина переноса зависит от номера итерации и веса данного узла, задаваемых заранее как константы для всей сетки.

3. Нерегулярная перестройка и интерполяция. С целью улучшения сетки в локальной области больших формоизменений или при исходной адаптации сетки к возможным особенностям решения разработана программа нерегулярной перестройки. Алгоритмы перестройки рассмотрены в ряде работ, например [6, 9, 11, 14, 15]. Обычная процедура улучшения сетки состоит в ее измельчении или укрупнении.

В данной работе используется расширенный набор базовых операций перестройки [9, 11]: смена диагонали; введение нового узла на ребре; ликвидация ребра; новая триангуляция «звезды» элементов; введение нового внутреннего узла. Расширение возможностей алгоритма достигается учетом большего числа узлов и элементов, участвующих в локальном улучшении сетки. В качестве критерия искажения сетки, контролирующего необходимость перестройки, берется функция меры искажения элемента, предложенная в [9].

При интерполяции переменных со старой сетки на новую применяется алгоритм консервативной интерполяции, использующий интеграл сохранения массы [16]

$$(1) \quad m_k = \int_{V_k} \rho(\mathbf{r}) dV$$

(m_k, V_k — масса и объем нового элемента, $\rho(\mathbf{r})$ — функция распределения плотности по состоянию на старой сетке).

На основе (1) вычисляется приращение объема ΔV_{ij} в новом элементе i из старого элемента j . Интерполяция переменных (кроме массы, плотности, объема), используя ΔV_{ij} , принимает вид

$$\bar{\psi}_i = \frac{1}{V_i} \sum_{j=1}^n \Delta V_{ij} \psi_j, \quad i = \overline{1, m},$$

где $\bar{\psi}_i, \psi_j$ — значения переменной на новой и старой сетке; n, m — число элементов новой и старой сетки в перестраиваемом фрагменте.

Вычисление приращений объемов ΔV_{ij} наталкивается на некоторые трудности, связанные с нахождением на несогласованных сетках части объема старого элемента j , входящего в состав объема нового элемента i . Для этого на старую сетку «вбрасывается» набор точек (около 100 точек на элемент). Каждая точка обладает собственным объемом, величина которого зависит от количества точек, попадающих в старый элемент. Приращение объема ΔV_{ij} — сумма объемов данных точек, одновременно принадлежащих новому i и старому j элементам.

Отметим, что при перестройке может происходить изменение числа узлов и элементов. Скорости линейно интерполируются по скоростям трех старых узлов, окружающих данный узел.

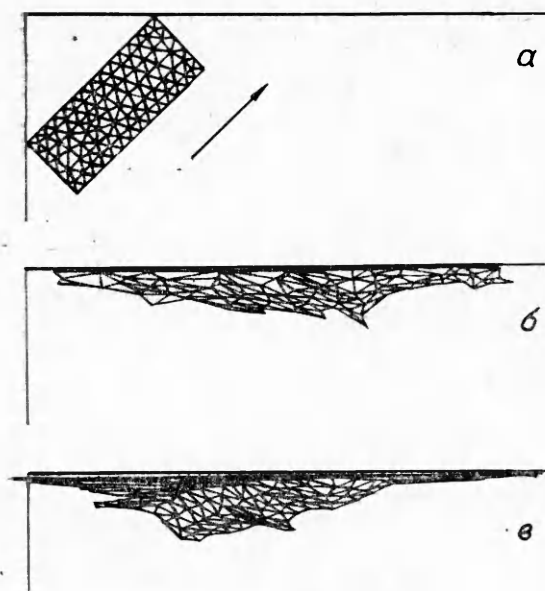
4. Дифференциальные уравнения и их аппроксимация. Для нахождения скоростей узлов на нерегулярной треугольной сетке применена разностная аппроксимация [17]. Определение скоростей деформаций использует интегральное представление частных производных [4] с учетом треугольной сетки [17]. Остальные разностные соотношения и интегрирование по времени построены аналогично [4].

Топология сетки описывается косвенной адресацией, связывающей номера элементов с номерами трех окружающих его узлов. Данное описание связей реализовано в виде списка, примеры применения которого содержатся в [11, 13]. Косвенная адресация позволяет сравнительно просто производить следующие операции: применять произвольные треугольные сетки; вводить и удалять узлы и элементы; использовать нерегулярную перестройку; учитывать появление трещин.

5. Тестовые расчеты. Для проверки общего алгоритма рассмотрим соударение деформируемых стержней с жесткой стенкой.

В первом примере в плоской двумерной постановке исследуются удар под углом 45° и растекание алюминиевого прямоугольного в плане бойка с нулевым пределом текучести. Скорость удара $v_0 = 1$ км/с, начальная плотность $\rho_0 = 2,7$ г/см³, параметры уравнения состояния $p = A(\rho_0/\rho)^n - B$ следующие: $n = 3,8, A = B = 23,7$ ГПа, объемный модуль $K = 74,4$ ГПа, модуль сдвига $G = 28,5$ ГПа.

На рис. 1 показано начальное положение бойка (а) и положение бойка при безразмерном времени $t = 4$ с перестройкой (б) и без нее (в). Для расчета до момента $t = 4,2$ без перестройки потребовалось 1840 шагов, а до $t = 5,7$ с перестройкой — 1000 шагов. Причем если уменьшение шага по времени для расчета с перестройкой составило $\Delta t/\Delta t_0 = 0,4$, то без перестройки — $\Delta t/\Delta t_0 = 0,09$. Значит, дальнейший расчет без перестройки практически невозможен. Сравнение компонент импульса P_x/P_0 и P_y/P_0 в расчетах с перестройкой и без моментов времени $t = 1, 2, 3, 4$ показало их практически полное совпадение. Погрешности полной энергии $1 - E/E_0$ для этих же моментов времени составили соответ-



Р и с. 1

ственно: 0,02; 0,07; 0,065; 0,09 и 0,025; 0,045; 0,06; 0,07. До времени $t = 5,7$ было осуществлено 14 перестроек.

Во втором примере в осесимметричной постановке решалась задача удара цилиндрического алюминиевого стержня о жесткую стенку. Предел текучести алюминия $Y_0 = 0,5$ ГПа. На рис. 2 приведены деформируемые сетки и линии равных уровней интенсивности деформаций (%) без (а) и с перестройкой (б) сетки в конечный момент времени. Видно, что перестройка сохраняет качественные и количественные характеристики процесса.

Серия расчетов, моделирующих эксперимент по удару деформируемых стержней

о жесткую стенку [18], показала, что отклонение величин укорочения стержней для $v_0 \sim 400$ м/с не превышает 3 %, а для $v_0 \sim 600$ м/с — 10 %.

6. Взаимодействие бойка с деформируемой плитой. Рассмотрим проникание жесткого цилиндрического бойка с плоским торцом в плиту из алюминиевого сплава 1911. Механические характеристики сплава указаны в [19]. Отношение диаметра бойка к толщине плиты и к ее диаметру составляет 0,3 и 0,1 соответственно. При расчетах учитывались температурные эффекты, возникающие из-за изменения объема ΔV и пластической работы формоизменения:

$$(2) \quad \rho c \Delta T = -3\alpha K T \Delta V + (1/\sqrt{3})\sigma_u \Delta \epsilon_u,$$

где c — удельная теплоемкость; ΔT — приращение температуры; α — коэффициент температурного расширения; σ_u , ϵ_u — интенсивности напряжений и деформаций; K — текущий модуль объемного сжатия.

В соотношении (2)

$$(3) \quad \alpha(T) = \alpha_0(1 + 0,2T/T_{пл}), \quad c(T) = c_0(1 + 0,3T/T_{пл})$$

$$(\alpha_0 = 2,2 \cdot 10^{-5} \text{ град}^{-1}, \quad c_0 = 5,75 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{град)}, \quad T_{пл} = 600 \text{ }^\circ\text{C}).$$

Предел текучести материала плиты предполагался зависящим от температуры, накопленной деформации и скорости деформирования:

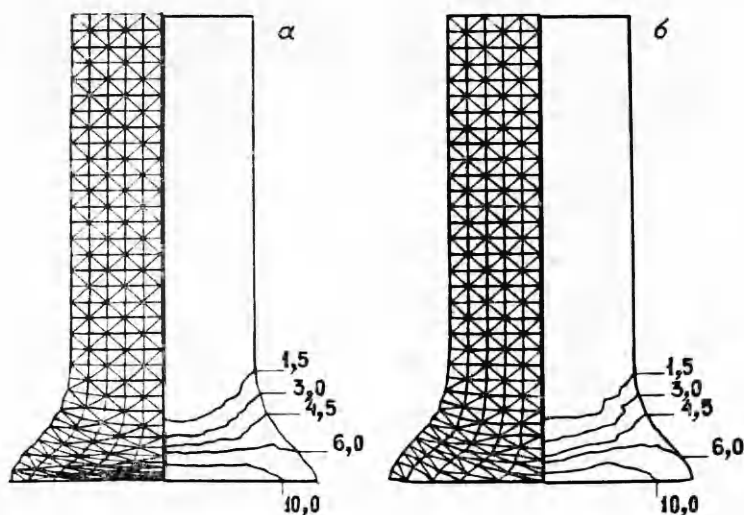
$$(4) \quad \sigma_u = \exp[-1,4(2,07T/T_{пл})^{1/8}][\sigma_s(\epsilon_u) + \sigma_\mu(\dot{\epsilon}_u)];$$

$$(5) \quad \sigma_s(\epsilon_u) = \sigma_s^0 [k - (k - 1) \exp(b\epsilon_u)];$$

$$(6) \quad \sigma_\mu(\dot{\epsilon}_u) = \begin{cases} \mu_T \dot{\epsilon}_u, & \dot{\epsilon}_u \leq J, \\ \mu_T J + \mu_T \frac{J}{1-B} \left[\left(\frac{\dot{\epsilon}_u}{J} \right)^{1-B} - 1 \right], & \dot{\epsilon}_u > J, \end{cases}$$

где $\sigma_s^0 = 0,45$ ГПа; $b = -25$; $k = 1,1-1,5$; $J = 100 \text{ с}^{-1}$; $B = 0,65-0,7$; $\mu_T = \mu_0(1 - 0,32 T/T_{пл})$; $\mu_0 = 0,25 \cdot 10^{-3}$ ГПа·с.

Температурные зависимости в (3), (4) записаны на основе справочных данных [20]; зависимость (5) — аппроксимация экспериментов по сплаву 1911; выражение (6), учитывающее влияние скорости деформации, заимствовано из [21].



Р и с. 2

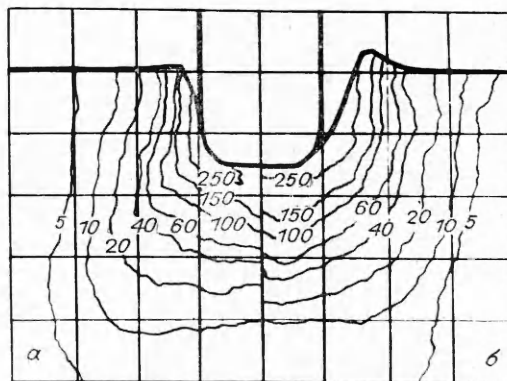
Влияние температуры на модуль сдвига задается в виде

$$G = G_0 \exp[-1,4(1,5T/T_{пл})^3].$$

Вычислительный эксперимент показал, что учет температуры в определяющих уравнениях алюминиевого сплава при средних скоростях удара $v_0 \sim 300-800$ м/с незначительно влияет на процесс проникания и ведет к более сильной локализации деформаций в окрестности боковой поверхности и дна кратера. Распределение температуры в окрестности кратера аналогично распределению интенсивности деформаций ϵ_u . Таким образом, при глубоком проникании при средних скоростях диссипация энергии, связанная с работой пластических деформаций, дает основной вклад в температурные изменения.

Исследование влияния деформационного упрочнения и уровня предела текучести на процесс проникания показало следующее. При малых $k \sim 1,05$ (для слабоупрочняющегося материала) рост σ_s^0 (рассматривались варианты $\sigma_s^0 = 0,4; 0,5; 0,6$ ГПа) практически не влияет на характер распределения деформаций в окрестности кратера, хотя и ведет к небольшому увеличению сопротивления прониканию. При $k = 1,4$ (для сильноупрочняющегося материала) наблюдается расширение области развитых деформаций в радиальном направлении. Например, граница области интенсивности деформаций $\epsilon_u = 10\%$ по радиусу (по отношению к диаметру бойка) составляет 1,6 для материала без упрочнения и 2,4 — с упрочнением. И в том и другом случае размеры деформированной зоны под торцом бойка одинаковы. Большой объем плиты вовлекается в работу для сильноупрочняющегося материала за счет его неравномерного сопротивления пластическому деформированию.

Исследования влияния скорости прохождения бойком некоторого сечения плиты на характер распределения деформаций в окрестности кратера показали незначительные отличия, связанные лишь с поведением лицевых тыльных слоев. Так, при текущей глубине кратера, равной половине толщины плиты, для скоростей $v_0 = 550$ и 800 м/с тыльная выпучина на



Р и с. 3



Рис. 4

плите меньше в последнем случае, тогда как инерционный выброс и расширение кратера вблизи лицевой поверхности, естественно, меньше в первом случае. При увеличении скорости удара происходит небольшое сужение конической области максимального сдвига под бойком. Сказанное выше иллюстрируется изотермами и сечением кратера для $v_0 = 300$ м/с (а) и 800 м/с (б) при глубине проникания порядка 1,5 радиусов бойка (рис. 3).

В качестве оценки влияния скорости проникания на характер деформирования и тестирования расчетного алгоритма проведено сравнение процессов статического (опыт) и динамического (расчет) проникания с $v_0 = 300$ м/с. На рис. 4 показаны расчетные и экспериментальные линии равных перемещений U_z (а) и U_r (б). Опытные данные любезно предоставлены Ю. Ю. Лесниченко. Методика проведения эксперимента, использующего метод муаровых полос, аналогична описанной в [19, 22]. На основе рис. 4 можно сделать вывод о работоспособности предложенного алгоритма и о подобии деформационных процессов для статического и динамического проникания бойка в пластичные металлы при малых и средних скоростях удара.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кукуджанов В. Н. Численное моделирование динамических процессов деформирования и разрушения // Успехи механики.— 1985.— Т. 8, № 4.
2. Петров И. Б. Численное исследование процессов проникания с помощью подвижных расчетных сеток/Моск. физ.-техн. ин-т.— М., 1981.— Деп. в ВИНТИ 8.01.82, № 103—82 Деп.
3. Запаров К. И., Кукуджанов В. Н. Математическое моделирование задач импульсного деформирования, взаимодействия и разрушения упругопластических тел.— М., 1986.— (Препр./АН СССР, Ин-т проблем механики; № 280).
4. Уилкинс М. Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике.— М.: Мир, 1967.
5. Гулидов А. И., Фомин В. М. Модификация метода Уилкинса для решения задач соударений тел.— Новосибирск, 1980.— (Препр./АН СССР, Спб. отд-ние, Ин-т теор. и прикл. механики; № 49).
6. Гулидов А. И., Фомин В. М., Шабалин И. И. Алгоритм перестройки разностной сетки при численном решении задач соударения с образованием трещин // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Материалы конф., Миасс, 1981.— Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1982.
7. Ringers В. E. New sliding surface techniques enable Lagrangian code to handle deep target penetration/perforation problems // Lect. Notes Engng.— 1983.— V. 3.
8. Гриднева В. А., Немирович-Данченко М. М. Метод раздвоения точек сетки для численного расчета разрушения твердых тел/Том. гос. ун-т.— Томск, 1983.— Деп. в ВИНТИ 14.06.83, № 3258—83 Деп.
9. Садьрин А. И. Алгоритм нерегулярной перестройки плоских треугольных сеток в МКЭ // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб./Горьк. гос. ун-т.— 1985.— Вып. 31.
10. Фонарев А. В. Применение нерегулярных треугольных разностных сеток к решению задач импульсного деформирования упругопластических тел // Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики: Материалы VI Всесоюз. шк.— Горький: Изд-во ГГУ, 1986.

11. Полежаев В. И., Федосеев А. И. Метод конечных элементов в задачах гидромеханики, тепло- и массообмена.— М., 1980.— (Препр./АН СССР, Ин-т проблем механики; № 160).
12. Thasker W. C. A brief review of techniques for generating Irregular computational grids // Intern. J. Numer. Meth. Engng.— 1980.— N 16.
13. Уманский С. Э. Алгоритм и программа триангуляции двумерной области произвольной формы // Пробл. прочности.— 1978.— № 6.
14. Rivara M. C. Algorithm for refining triangular grids suitable for adaptive and multigrid techniques // Intern. J. Numer. Meth. Engng.— 1984.— V. 20, N 4.
15. Frey W. H. Selective refinement: a new strategy for automatic node placement in graded triangular meshes // Intern. J. Numer. Meth. Engng.— 1987.— V. 24, N 3.
16. Dikowicz J. K. Conservative rezoning (remapping) for general quadrilateral meshes // J. Comp. Phys.— 1984.— V. 54, N 3.
17. Фонарев А. В. Применение произвольных треугольных разностных сеток к решению задач импульсного деформирования упругопластических тел // Модели деформирования и разрушения композитных материалов.— Свердловск: УрО АН СССР, 1988.
18. Уилкинс М. Л., Гуинан М. У. Удар цилиндра по жесткой преграде // Механика (сб. пер.).— М.: Мир, 1973.— Вып. 3.
19. Аптуков В. Н., Каширин В. Ф., Мурзакаев Р. Т. и др. Применение метода муара в исследовании процесса откольного разрушения // ДАН СССР.— 1986.— Т. 290, № 2.
20. Бессерер К. У. Инженерный справочник по управляемым снарядам.— М.: Воениздат, 1962.
21. Аптуков В. Н., Николаев П. К. Распространение волн в термоупруго-вязкопластическом материале // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.— 1984.— Вып. 51.
22. Аптуков В. И., Лесниченко Ю. Ю. Экспериментальное изучение сопротивления пластин из алюминиевых сплавов статическому внедрению жесткого индентора // Динамика и прочность механических систем: Межвуз. сб. науч. тр./Перм. политехи. ин-т.— 1984.

г. Пермь

Поступила 16/V 1989 г.

УДК 539.376

М. А. Задоян, Н. Б. Сафарян

ОСЕВОЕ СЖАТИЕ НЕОДНОРОДНОГО КОНУСА

Рассматривается сжатие бесконечного конуса, к вершине которого приложена осевая сосредоточенная сила. Материал принимается несжимаемым неоднородным и подчиняется степенному закону упрочнения. Соответствующая однородная задача изучена в [1, 2].

Дифференциальные уравнения равновесия в случае осесимметричной деформации в сферических координатах в обычных обозначениях имеют вид

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_\varphi + \tau_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta) &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} [(\sigma_\theta - \sigma_\varphi) \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{r\theta}] &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (3\tau_{r\varphi} + 2\tau_{\theta\varphi} \operatorname{ctg} \theta) &= 0. \end{aligned}$$

Закон упрочнения материала

$$(2) \quad \sigma_0 = k\omega(\theta) \varepsilon_0^m, \quad 0 < m < 1,$$

© 1990 Задоян М. А., Сафарян Н. Б.

8*