

ЛИТЕРАТУРА

1. Гапонов С. А., Маслов А. А. Развитие возмущений в сжимаемых потоках. Новосибирск: Наука, 1980.
2. Володин А. Г. Устойчивость плоского пограничного слоя с учетом непараллельности.— Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук, 1973, № 8, вып. 2.
3. Bouthier M. Stabilité linéaire des écoulements presque parallèles.— J. Mec., 1973, vol. 12, N 1.
4. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Развитие колебаний малой амплитуды в ламинарном пограничном слое.— Учен. зап. ЦАГИ, 1975, т. 6, № 5.
5. Гапонов С. А. Влияние непараллельности течения на развитие возмущений в сверхзвуковом пограничном слое.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 2.
6. El-Hady M. M., Nayfeh A. H. Nonparallel stability of compressible boundary layer flows. VPI-79-13, 1979.
7. Гапонов С. А. Развитие трехмерных возмущений в слабонепараллельном сверхзвуковом потоке. Препринт ИТПМ СО АН СССР, № 29, 1980.
8. Laufer J., Vrebatovich T. Stability and transition of a supersonic laminar boundary layer on an insulate plate.— J. Fluid Mech., 1960, vol. 9, pt 2.
9. Багаев Г. И., Лебига В. А., Приданов В. Г., Черных В. В. Сверхзвуковая аэродинамическая труба Т-325 с пониженной степенью турбулентности.— В кн.: Аэрофизические исследования. Новосибирск: изд. ИТПМ СО АН СССР, 1972.
10. Лебига В. А., Маслов А. А., Приданов В. Г. Экспериментальное исследование устойчивости сверхзвукового пограничного слоя на пластине с притуплением передней кромки.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 4.
11. Елфимов А. Г., Лебига В. А., Черных В. В. Термоанемометр постоянного тока для измерения турбулентности при сверхзвуковых скоростях.— Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук, 1976, № 13, вып. 3.
12. Lebiga V. A., Maslov A. A., Pridanov V. G. Experimental investigation of the stability of supersonic boundary layer on a flat insulate plate.— Archives of Mechanics, 1979, vol. 31, N 3.
13. Лебига В. А. Экспериментальные исследования характеристик турбулентных течений при сверхзвуковых скоростях. Дис. на соиск. учен. степени канд. техн. наук. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1977.

УДК 532.526

ПРИБЛИЖЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ГРАДИЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

В. Т. Мовчан

(Киев)

Оценить возможности многих полуэмпирических гипотез, уточнить границы применимости ряда эмпирических зависимостей и коэффициентов помогло численное интегрирование уравнений турбулентного пограничного слоя [1—12]. Анализ численных расчетов многих авторов показал, что при резком изменении градиента давления расчетные кривые заметно отклоняются от экспериментальных зависимостей [2—6, 11—14]. Особенно значительное отклонение наблюдается при приближении к зоне отрыва, объясняемое обычно неучетом нормальных рейнольдсовых напряжений и пространственностью течения [2, 3, 11, 13]. Определенную роль играет неучет влияния градиента давления и малых чисел Рейнольдса на эмпирические коэффициенты, которые применяются в алгебраических и дифференциальных моделях [2, 3, 10, 11]. Первоначально поправка на градиент учитывалась в коэффициенте Ван Дриста [2, 3, 5, 11, 12]. Оказалось, что приближенные формулы Себечи [2, 12] и Кейса [5] для учета влияния градиента давления на коэффициент Ван Дриста дают очень разные числовые значения. Известно, что влияние градиента давления проявляется значительно слабее в пристеночной области, чем во внешней [3, 11, 16]. Поэтому влияние градиента давления на коэффициент внешней области будет наиболее существенным. На это указывает не только настоящее исследование. Численный эксперимент работы [4] по материалам Стенфордской конференции [15] показал, что отнесенная к толщине пограничного слоя δ длина пути перемешивания l , принимаемая постоянной в нормальном сечении внешней области по модели Праудтля — Ескудье, изменяется в градиентном потоке. Она зависит от градиента давления и при неблагоприятном градиенте убывает с его ростом от значения 0,09 в безградиентных потоках до значения 0,045 в предотрывных сечениях. Постоянство величины l/δ в расчете приводило к систематическому завышению коэффициента поверхностного трения c_f , занижению

значений формпараметра H и не позволяло предсказывать возможный отрыв потока [4]. Еще большее уменьшение значений l/δ с ростом неблагоприятного градиента давления показано в [6] (от 0,089 до 0,0125). В ряде исследований вводились поправки на градиент или малые числа Рейнольдса в отдельные коэффициенты [2—6, 11, 12, 14]. Однако полного исследования влияния градиента давления и малых рейнольдсовых чисел, по-видимому, не проводилось. Оценка влияния градиента давления или малых чисел Рейнольдса проводится, как правило, на основании сравнения значений коэффициента поверхностного трения c_f , формпараметра H и толщины потери импульса δ^{**} с опытом. Представляет поэтому несомненный интерес использование приближений для профилей скорости в этих целях. Кроме этого, в численном счете с применением алгебраических моделей реализуется двухслойная схема: в пристеночной и внешней областях берутся разные формулы для коэффициента турбулентной вязкости. Это приводит к необходимости «срачивания» решений из пристеночной и внешней областей. Решения срачиваются или на заранее выбранной ординате, или ее находят в процессе решения задачи путем уравнивания значений коэффициента турбулентной вязкости из пристеночной и внешней областей [2, 3, 5, 11, 12]. Однако задача срачивания по коэффициенту турбулентной вязкости оказывается некорректной [14]. Ордината точки срачивания должна убывать с ростом положительного градиента давления, а она или постоянна, или еще и возрастает [14]. Таким образом, возникает необходимость дальнейших исследований и уточнений алгебраических моделей. Тем более, что в инженерной практике при численном расчете предпочтение отдается алгебраическим моделям [11]. Более того, при попытках численного расчета пространственного турбулентного пограничного слоя первоначально применяются алгебраические модели [7, 10].

1. Цель данной работы — уточнение единой формулы коэффициента турбулентной вязкости для всего пограничного слоя [17—19], построение приближенных выражений для профилей скорости с учетом положительного и отрицательного градиентов давления: изучение влияния градиента давления на эмпирические коэффициенты зон и областей турбулентного пограничного слоя. Для достижения поставленных целей применен приближенно-аналитический подход. Разумное сочетание численных экспериментов и расчетов с приближенно-аналитическими решениями позволяет значительно расширить возможности исследований. В основу данной работы взята единая для всего пограничного слоя полуэмпирическая формула для коэффициента турбулентной вязкости вида [17]

$$(1.1) \quad \varepsilon = \rho \kappa \Delta v_* \gamma \operatorname{th} l \sqrt{\tau_+} / \kappa \Delta,$$

где ε — коэффициент турбулентной вязкости; κ — эмпирическая постоянная; γ — функция типа коэффициента перемежаемости; v_* — динамическая скорость; Δ — параметр длины Клаузера; l — длина пути перемеживания; δ — толщина пограничного слоя; τ_0 — напряжение трения в окрестности стенки; τ_w — напряжение трения на стенке; $\eta = y/\delta$; $\tau_+ = \tau_0/\tau_w$; $\tau_+ = 1 + \Phi\eta$ для положительного градиента давления и $\tau_+ = 1/(1 - \Phi\eta)$ — для отрицательного; $\Phi = (\delta/\tau_w) \partial p/\partial x$; p — давление; ρ — плотность. В потоке с ускорением линейная зависимость распределения касательных напряжений в окрестности стенки при $\Phi < -1$ может привести к отрицательным значениям, а поэтому в этом случае уместно использовать приведенную нелинейную зависимость из [18]. Внешняя область пограничного слоя и потенциальное течение разделяются тонким надслоем, через который за счет вязких сил происходит обмен турбулизированных и нетурбулизированных объемов жидкости. Вблизи стенки турбулентность практически полностью непрерывна по времени, а у внешней границы пограничного слоя становится все более перемежающейся. В качестве меры перемежаемости выбирается отношение интервала времени, в течение которого наблюдается турбулентное движение, к полному промежутку времени, называемое коэффициентом перемежаемости. Если проследить за ходом изменения коэффициента турбулентной вязкости во внешней области, то обнаруживается, что вблизи пристенной области он изменяется очень слабо, а при подходе к потенциальному течению начинает быстро уменьшаться. Подобное поведение коэффициента турбулентной вязкости наблюдается в следах и струях. Таунсенд показал, что можно значительно улучшить расчетные значения профилей скорости для течения плоского следа, если эффективный коэффициент турбулентной

вязкости рассматривать как произведение коэффициента турбулентной вязкости и коэффициента перемежаемости. Для приближенного учета перемежающегося характера течения в струях, следах и пограничных слоях во многих работах [2, 3, 9, 12] теперь используется предложение Таунсенда. В данной работе для коэффициента перемежаемости использовались приближенные формулы Клебанова и Себечи [2], линейная [17] и предлагаемая ниже. Оказалось, что линейная формула позволяет получить удовлетворительные результаты для профилей напряжения трения и дефекта скорости с постоянными коэффициентами как при положительном, так и при отрицательном градиенте давления [17, 18]. Однако наблюдается существенное расхождение расчета [19] и эксперимента [16] по коэффициенту турбулентной вязкости на плоской пластине. Формулы Клебанова и Себечи позволяли получать хорошее соответствие опыту коэффициента турбулентной вязкости, если длина пути перемешивания в поперечном сечении задается несколькими интерполяционными формулами [19]. Совместно с методом прямых этот подход позволил организовать численный расчет на плоской пластине [8, 9]. Расчет проводился и по двухслойной (вязкий подслой, турбулентное ядро) и по непрерывной моделям [8, 9]. Анализ полученных результатов указывает на преимущество непрерывной модели. Формула $\gamma = \sqrt{1 - \eta}$ позволила получить неплохое соответствие расчета по коэффициенту турбулентной вязкости опыту [16] на плоской пластине, если вне вязкой и переходной зон для l воспользоваться известной формулой Прандтля $l = ky$. Учет специфики течения в вязкой и переходной зонах [3, 11, 16] приводит в этом случае к формуле для длины пути перемешивания всего пограничного слоя:

$$l = ky \operatorname{th} \frac{\operatorname{sh}^2 [\kappa_1 y^+ (1 + \kappa_2 |y^+ - 30|)] \operatorname{th} [\operatorname{sh}^2 (\kappa_2 y^+)]}{ky^+ \sqrt{\tau_+}},$$

где $y^+ = yv_* / \nu$, k , κ_1 , κ_2 , κ_3 — эмпирические коэффициенты; ν — коэффициент кинематической вязкости. При построении интерполяционной формулы для l учтено, что в области стенки коэффициент турбулентной вязкости пропорционален y^m , а m различно в каждой из зон [16]. Как и в [16], предполагалось, что в вязком подслое $m = 4$, в переходной зоне $m = 2$, а в зоне закона стенки $m = 1$. Сравнение расчетных значений коэффициента турбулентной вязкости с экспериментом на плоской пластине указывает на вполне удовлетворительное соответствие при $k = 0,4$, $\kappa_1 = 0,064$, $\kappa_2 = 0,0125$, $\kappa_3 = 0,17458$. Линеаризация аргумента функции $\operatorname{sh}^2 [y^+ \kappa_1 (1 + \kappa_2 |y^+ - 30|)]$ позволяет получить упрощенную формулу [19]

$$(1.2) \quad l = ky \operatorname{th} \frac{\operatorname{sh}^2 (\kappa_1 y^+) \operatorname{th} [\operatorname{sh}^2 (\kappa_2 y^+)]}{ky^+ \sqrt{\tau_+}},$$

удобную тем, что она позволяет находить приближенные решения для профилей скорости в переходной и вязкой зонах. Расчетные значения коэффициента турбулентной вязкости по (1.1), (1.2) при сравнении с экспериментом [16] указывают на незначительное превышение расчета при $20 < y^+ < 40$. Численные расчеты [9] и приведенная модифицированная модель позволяют заключить, что формулы (1.1), (1.2) удобны в применении.

2. Для выявления влияния положительного градиента давления на профили скорости, на коэффициенты зон и областей строились приближенно-аналитические решения. При получении приближенных решений в зонах пристеночной области полагалось, что $\gamma = 1$. Из формул (1.1), (1.2) в переходной зоне для коэффициента полной вязкости по принципу суперпозиции находится приближенная формула [19]

$$(2.1) \quad \overline{\varepsilon_*} = \mu \operatorname{ch}^2 (\kappa_1 y^+),$$

где μ — коэффициент динамической вязкости. Последнее выражение поз-

воляет найти зависимость для профиля скорости в переходной зоне при положительном градиенте давления вида

$$(2.2) \quad u^+ = \frac{1+p^+y^+}{\kappa_1} \operatorname{th}(\kappa_1 y^+) - \frac{p^+}{\kappa_1^2} \ln[\operatorname{ch}(\kappa_1 y^+)],$$

$$u^+ = \frac{u}{v_*}, \quad p^+ = \frac{v}{\rho v_*^3} \frac{\partial p}{\partial x},$$

если считать для напряжения трения в пристеночной области справедливым приближение

$$(2.3) \quad \tau = \tau_w(1 + p^+y^+).$$

Для безградиентного течения формула (2.2) переходит в формулу Рэнни [16, 19, 20, 21]:

$$(2.4) \quad u^+ = (1/\kappa_1) \operatorname{th}(\kappa_1 y^+),$$

которая неплохо описывает опыт и для течения в трубе при $\kappa_1 = 0,0688$ в переходной и вязкой зонах. Известно, что в вязкой зоне при определении профиля скорости турбулентной составляющей пренебрегают. Этот же профиль будет получен, если разложить в ряд $\operatorname{th}(\kappa_1 y^+)$ и ограничиться одним членом. К такому же результату приходим и из формулы (2.1), так как при $y^+ \rightarrow 0$ $\operatorname{ch}(\kappa_1 y^+) \rightarrow 1$. Анализ формул (2.1), (2.2) и (2.4) позволяет заключить, что и (2.2) применима в вязкой зоне. В работе [20] профиль (2.4) используется для течений с положительным градиентом давления при $y^+ = 27,5$ и $\kappa_1 = 0,0688$. Однако в исследовании течения [21] на плоской пластине получено $\kappa_1 = 1/14$. Близкое значение $\kappa_1 = 0,072$ найдено в численном эксперименте работы [9]. Кроме того, с ростом неблагоприятного градиента давления толщина вязкой и переходной зон должна убывать. Формулы (1.1), (1.2) и (2.4) позволяют в зоне закона стенки найти такую зависимость

$$(2.5) \quad u^+ = \frac{1}{k} \left[\ln \frac{\sqrt{1+p^+y^+} - 1}{\sqrt{1+p^+y^+} + 1} + 2\sqrt{1+p^+y^+} \right] + C.$$

В случае нулевого градиента давления формула (2.5) переходит в известный закон стенки

$$(2.6) \quad u^+ = (1/k) \ln y^+ + C.$$

Зависимость (2.5) является как бы «обобщенным законом стенки», из которого следует два предельных «закона». Действительно, при $\tau_w \gg (y/\rho) \partial p / \partial x$ приходим к «закону стенки» (2.6), а в случае $\tau_w \ll (y/\rho) \partial p / \partial x$ — «закону степени 1/2» [3, 20]:

$$u = (2/k) \sqrt{(y/\rho) \partial p / \partial x} + \text{const.}$$

Профили скорости (2.2), (2.5) и (2.4), (2.6) позволяют получить следующие зависимости для вычисления C :

$$(2.7) \quad C = \frac{1+p^+y^+}{\kappa_1} \operatorname{th}(\kappa_1 y_*) - \frac{p^+}{\kappa_1^2} \ln[\operatorname{ch}(\kappa_1 y_*)] -$$

$$- \frac{1}{k} \left[\ln \frac{\sqrt{1+p^+y_*} - 1}{\sqrt{1+p^+y_*} + 1} + 2\sqrt{1+p^+y_*} \right];$$

$$(2.8) \quad C = \operatorname{th}(\kappa_1 y_*) / \kappa_1 - \ln y_* / k,$$

где y_* — значение y^+ , при котором сращиваются профили скорости переходной зоны и закона стенки. Для течения в трубе профиль скорости (2.4) при $y_* = 27,5$ плавно переходит в (2.6). Значение $y_* = 27,5$ позволяет

найти $C = 5,6$ при $k = 0,4$. Течение на пластине предполагает такое значение y_* , которое зависит от выбора значений κ_1, k . В свою очередь от y_* зависит постоянная C . Анализ экспериментальных результатов и эмпирических значений постоянной C указывает на заметный разброс числовых значений этой величины [16]. Причина разброса, как известно, кроется в выборе экспериментаторами значений C , которые давали бы лучшее соответствие расчетных значений по формуле (2.6) их собственным экспериментам [16]. В данной работе используются два численных значения C : $C = 4,78$ при $k = 0,4$ по Клебанову и Диллю [16] и $C = 5,0$ при $k = 0,41$ по Коулсу [15]. Из формулы (2.8) видно, что при $\kappa_1 = 0,0688$, $y_* = 49$ и $k = 0,4$ $C = 4,77$, а при $k = 0,41$ $C = 5,008$. Если же принять $\kappa_1 = 0,072$, $y_* = 35$, то при $k = 0,4$ $C = 4,821847$, а при $k = 0,41$ $C = 5,038637$. Таким образом, увеличение κ_1 от 0,0688 до 0,072 приводит к падению y_* от 49 до 35. Возникает естественный вопрос, как определять y_* в случае положительного градиента давления и какой из двух вариантов применять. Для этой цели рассматривалась величина

$$(2.9) \quad \alpha_0 = \text{sh}^2(\kappa_1 y_*) / (k y_* \sqrt{1 + p^+ y_*}),$$

которая считалась постоянной и равной своему значению при нулевом градиенте. Другими словами, формула (2.9) использовалась как уравнение для нахождения y_* . При нулевом градиенте давления и при $\kappa_1 = 0,0688$, $y_* = 49$, $k = 0,4$ находим $\alpha_0 = 10,7856$, а при $\kappa_1 = 0,072$, $y_* = 35$, $k = 0,4$ имеем $\alpha_0 = 2,723$. Расчеты и сравнения с экспериментами [15] показали, что профили скорости из зоны закона стенки малочувствительны к тому, какое из двух найденных значений α_0 взять. В переходной и вязкой зонах при нулевом градиенте давления предпочтение можно отдать $\kappa_1 = 0,072$, а значит, и $\alpha_0 = 2,723$. В случае течения с положительным градиентом давления коэффициенты k, κ_1 и κ_2 испытывают влияние градиента [2, 5, 12, 22]. Тщательный анализ расчетов по приведенным формулам и сравнений их с экспериментальными результатами [15, 23] и другими расчетами [5, 12] позволил получить зависимости для коэффициентов k, κ_1 и κ_2 в условиях положительного градиента давления:

$$(2.10) \quad k = 0,4 + 0,182275(1 + p^+)(1 - e^{-0,32068\beta});$$

$$(2.11) \quad \kappa_1 = \kappa_{10} \kappa_{1R} \left\{ [1 + 30,179p^+ (1 - e^{-0,009528\beta})] f_1(p^+) + \sqrt[4]{1 + 120,716p^+ f_2(p^+)} \right\};$$

$$(2.12) \quad \kappa_2 = \kappa_{20}(1 + 30,178p^+),$$

где $f_1(p^+) = \frac{1}{8} \frac{0,007 - p^+}{|0,007 - p^+|} + \frac{3}{32} \frac{0,04 - p^+}{|0,04 - p^+|} + \frac{17}{32} \beta - \frac{\delta^*}{\tau_w} \frac{\partial p}{\partial x}$; $f_2(p^+) = 1 - f_1(p^+)$; $\kappa_{10} = 0,072$; $\kappa_{20} = 0,223$; κ_{1R} — поправка на малые числа Рейнольдса, равная $\kappa_{1R} = 1 + 0,01(1 - e^{-14/(1+z^2)})$, $z = 10^{-3} R^{**}$, $R^{**} = \delta^* u_n / \nu$; u_n — скорость внешнего течения; δ^* — толщина вытеснения. На фиг. 1 приводится сравнение расчетных значений u^+ (штриховая линия) по формулам (2.2), (2.5), (2.7), (2.9)–(2.12) с экспериментальными результатами (точки) Ф. Клаузера (*id.* 2200, $x = 11$) — а, А. Перри (*id.* 2900, $x = 12,5$) — б, В. Ньюмена (*id.* 3500, $x = 2,759$) — в [15]; там же показан закон стенки (сплошная линия) (2.6) при $k = 0,41$ и $C = 5,0$ [15]. Как и следовало ожидать, в случае малых значений y^+ наблюдается весьма удовлетворительное соответствие с экспериментальными данными расчетных значений по формулам (2.5), (2.6). Поэтому при малых значениях y^+ для практических целей можно применять формулу (2.6) с постоянными коэффициентами C и k . С ростом значений y^+ расчетные значения u^+ начинают отклоняться от экспериментальных. Первыми отклоняются числовые значения из формулы (2.6).

Известно, что во внешней области справедлив закон дефекта скорости и существует промежуточная зона перекрытия законов дефекта скорости и стенки [3, 11, 16]. Для получения приближенных зависимостей для профилей скорости в зонах дефекта скорости и перекрытия использовалась методика работ [17, 18], а $\sqrt{1-\eta}$ предварительно раскладывался в ряд с удержанием двух членов. Были найдены формулы:

$$(2.13) \quad u^- = \frac{1}{k} \left[\ln \eta - 2 \ln (\sqrt{1+\Phi\eta} + 1) + (2\Phi^2 + 2\Phi + 1) \frac{\sqrt{1+\Phi\eta}}{\Phi^2} - \frac{\Phi+1}{3\Phi^2} (1+\Phi\eta)^{\frac{3}{2}} \right] - \frac{2\Phi}{\kappa\Delta_1} \left(\frac{\eta^{n+1}-1}{n+1} - 0,5 \frac{\eta^{n+2}-1}{n+2} \right) + R_1 \text{ при } \eta \leq \eta_1;$$

$$(2.14) \quad u^- = \frac{1}{\kappa\Delta_1} \left[\eta - 1 + \frac{1+2\Phi}{4} (\eta^2 - 1) - \frac{\Phi+1}{6} (\eta^3 - 1) - (2+\Phi) \left(\frac{\eta^{n+1}-1}{n+1} - 0,5 \frac{\eta^{n+2}-1}{n+2} \right) \right] \text{ при } \eta \geq \eta_1,$$

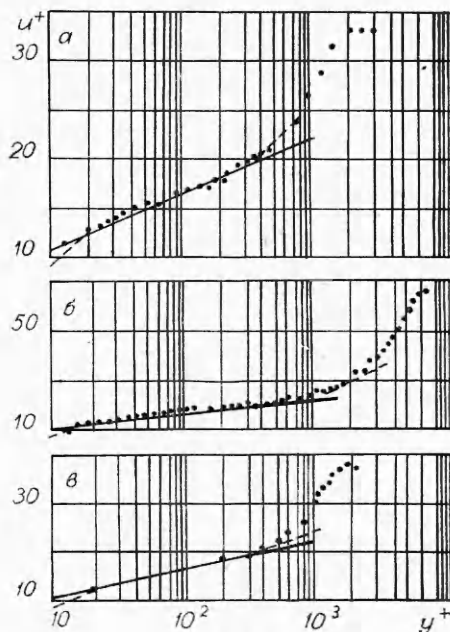
где $u^- = \frac{u-u_n}{v_*}$; $R_1 = \frac{1}{k} \left[-\ln \eta_1 + 2 \ln (\sqrt{1+\Phi\eta_1} + 1) - (2\Phi^2 + 2\Phi + 1) \frac{\sqrt{1+\Phi\eta_1}}{\Phi^2} + \frac{\Phi+1}{3\Phi^2} (1+\Phi\eta_1)^{\frac{3}{2}} \right] + \frac{1}{\kappa\Delta_1} \left[\eta_1 - 1 + \frac{1+2\Phi}{4} (\eta_1^2 - 1) - \frac{(1+\Phi)}{6} (\eta_1^3 - 1) \right];$

$$n = -2,5 - \frac{2+\Phi}{4F} + \sqrt{\left(2,5 + \frac{2+\Phi}{4F}\right)^2 - 6 - \frac{2(2+\Phi)}{F}}; \Delta_1 = \frac{\Delta}{\delta};$$

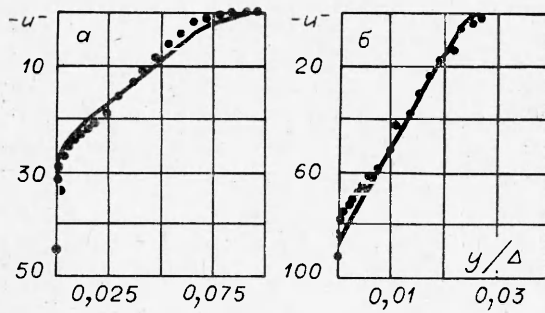
$$F = \kappa\Delta_1^2 + \frac{\kappa\Delta_1}{k} F_1 + F_2; F_1 = -\frac{2}{\Phi} \sqrt{1+\Phi\eta_1} + (2\Phi^2 + 2\Phi + 1) \times \frac{2-\Phi\eta_1}{3\Phi^3} \sqrt{1+\Phi\eta_1} - (1+\Phi) \frac{2-3\Phi\eta_1}{15\Phi^3} (1+\Phi\eta_1)^{\frac{5}{2}} + 2 \frac{5\Phi^2 - 9\Phi - 4}{15\Phi^3};$$

$$F_2 = 0,5\eta_1^2 + \frac{1+2\Phi}{6} \eta_1^3 - \frac{\Phi+1}{4} \eta_1^4 - \frac{5}{24} \Phi - \frac{13}{24}.$$

η_1 — ордината раздела зоны дефекта скорости и перекрытия. Ордината η_1 сшива профилей скорости из зоны дефекта (2.14) и перекрытия (2.13) определялась из условия $l\sqrt{\tau_+}/\kappa\Delta_1 = \alpha_1$. Для безградиентных течений при значениях $\alpha_1 = 1$ и $\Delta_1 = 3,875$ [18] находим $\eta_1 = 0,2$. Если же принять $\alpha_1 = 0,72$ и $\Delta_1 = 3,785$, то получим $\eta_1 = 0,15$. Оба эти значения η_1 лежат в интервале общепринятых значений [2, 16, 22]. Однако логарифмическое распределение скорости (2.6) при значениях η_1 , превышающих 0,15, начинает отклоняться от экспериментальных [16]. Таким образом, $\eta_1 = 0,15$ может рассматриваться как приближенная граница между пристеночной и внешней областями [16]. Зона перекрытия не должна выходить за рамки пристеночной области, а поэтому значение $\eta_1 = 0,15$ принято за ординату сшива профилей скорости зон дефекта и перекрытия.



Ф и г. 1



Ф и г. 2

В случае наличия положительного градиента давления коэффициенты κ и α_1 зависят от последнего. Для определения зависимости κ и α_1 от градиента использовались эксперименты Стенфордской конференции [15], численные эксперименты на ЭЦВМ «Мир-2» по приведенным приближенным формулам, зависимости других авторов [2, 5, 12]. Анализ ре-

зультатов расчетов и сравнений с экспериментами позволил получить приближенные зависимости в виде

$$(2.15) \quad \kappa = \kappa_R [0,00905 + 1/(74,6 + (2,4 + \beta)^2)];$$

$$(2.16) \quad \alpha_1 = 0,0953211/(1 + p^+) + 24,090229/(6,21 + \beta)^2,$$

где κ_R — поправка на малые числа Рейнольдса по Себеси [12], равная

$$\kappa_R = \frac{1,55}{1 + 0,55 \left(1 - e^{-0,243 \sqrt{z_1 - 0,298 z_1}}\right)}, \quad z_1 = \frac{R^{**}}{425} - 1.$$

На фиг. 2 показано сравнение расчетных дефектов скорости (сплошная линия) с экспериментальными результатами (точки) Г. Людвига и В. Тиллмана (*id.* 1200, $x = 3,532$) — а и Г. Шубауера и П. Клебанова (*id.* 2100, $x = 25,4$) — б. В результате расчетов обнаружилось, что сохранение в течениях с положительным градиентом значений коэффициентов из безградиентных потоков приводит к росту значений η_1 и n . Наблюдается поворот профиля скорости вокруг некоторой внутренней точки. Значения скорости по абсолютной величине около стенки возрастают, а вблизи внешней границы убывают.

3. В случае течения с отрицательным градиентом давления при $\Phi \geq -1$ можно использовать результаты п. 2. Остановимся поэтому на течении с $\Phi < -1$. В переходной и вязкой зонах $|p^+ y^+| < 1$ [15], а поэтому для распределения скорости здесь снова пригодны результаты из п. 2. В зоне закона стенки для распределения скорости получено выражение

$$u^+ = \frac{1}{k} \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1 - p^+ y^+}}{1 + \sqrt{1 - p^+ y^+}} \right| + C,$$

$$C = \frac{1 + p^+ y_*^+}{\kappa_1} \operatorname{th}(\kappa_1 y_*) - \frac{p^+}{\kappa_1^2} \ln [\operatorname{ch}(\kappa_1 y_*)] - \frac{1}{k} \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1 - p^+ y_*^+}}{1 + \sqrt{1 - p^+ y_*^+}} \right|.$$

Для вычисления y_* использовалась зависимость (2.9). Для получения распределений скорости в зонах дефекта и перекрытия использовался подход п. 2 и работ [17, 18]. Получены приближения:

$$u^- = \frac{1}{k} \left[\ln \frac{\sqrt{1 - \Phi \eta} - 1}{\sqrt{1 - \Phi \eta} + 1} \right] - \frac{2\Phi + 1}{(-\Phi - 1)^{3/2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{1 - \Phi \eta} \sqrt{-\Phi - 1}) + \frac{\sqrt{1 - \Phi \eta}}{1 + \Phi} + \frac{1}{\kappa_{\Delta 1}} \left[\frac{1}{\Phi} \frac{\eta^{n+1} - 1}{n+1} - \frac{0,5 \eta^{n+2} - 1}{\Phi} \frac{1}{n+2} \right] + R_1 \text{ при } \eta \leq \eta_1,$$

$$u^- = \frac{1}{\kappa_{\Delta 1}} \left[-\frac{\Phi + 0,5}{(\Phi + 1)^2} \ln \frac{1 - (\Phi + 1)\eta}{-\Phi} + \frac{0,5(\eta - 1)}{\Phi + 1} + \frac{1}{\Phi} \left(\frac{\eta^{n+1} - 1}{n+1} - 0,5 \frac{\eta^{n+2} - 1}{n+2} \right) \right] \text{ при } \eta \geq \eta_1,$$

$$\text{где } \eta_1 = -0,5 \left(\alpha_1 \frac{\kappa \Delta_1}{k} \right)^2 \Phi + \sqrt{0,25 \left(\alpha_1 \frac{\kappa \Delta_1}{k} \right)^4 \Phi^2 + \left(\alpha_1 \frac{\kappa \Delta_1}{k} \right)^2};$$

$$R_1 = \frac{1}{k} \left[\ln \frac{\sqrt{1-\Phi\eta_1}+1}{\sqrt{1-\Phi\eta_1}-1} + \frac{2\Phi+1}{(-\Phi-1)^{3/2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{1-\Phi\eta_1} \sqrt{-\Phi-1} \right) - \frac{\sqrt{1-\Phi\eta_1}}{\Phi+1} \right] + \frac{1}{\kappa \Delta_1} \left[\frac{0,5(\eta_1-1)}{\Phi+1} - \frac{\Phi+0,5}{(\Phi+1)^2} \ln \frac{1-(\Phi+1)\eta_1}{-\Phi} \right];$$

$$r = \sqrt{1-\Phi\eta_1};$$

$$n = -2,5 - \frac{1}{2F} + \sqrt{\left(2,5 + \frac{1}{2F}\right)^2 - 6 - \frac{4}{F}}; F = 2\Phi \left(\kappa \Delta_1^2 + \frac{\kappa \Delta_1}{k} F_1 + F_2 \right);$$

$$F_1 = \frac{2\Phi^2 + 2\Phi + 1}{(\Phi + 1)^2} \frac{r-1}{\Phi} - \frac{r\eta_1}{\Phi+1} - \frac{2\Phi+1}{(-\Phi-1)^{5/2}} \times \operatorname{arctg} \frac{(r-1)\sqrt{-1-\Phi}}{1-(\Phi+1)r} - \frac{2}{3} \frac{r^3-1}{\Phi(\Phi+1)};$$

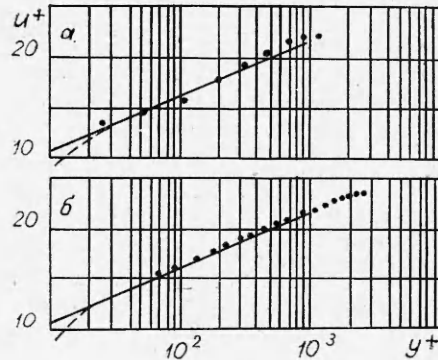
$$F_2 = -\frac{\Phi+0,5}{(\Phi+1)^3} \ln \frac{1-(\Phi+1)\eta_1}{-\Phi} + \frac{1-\eta_1}{(\Phi+1)^2} (0,5 + \Phi) + \frac{\eta_1^2-1}{4(\Phi+1)}.$$

Обработка результатов расчетов по приведенным формулам, анализ сравнений вычислений с экспериментами [15] показывают, что и при отрицательном градиенте давления для κ , α_1 и κ_1 могут использоваться формулы (2.15), (2.16), (2.11). Что же касается коэффициента k , то и для его вычисления можно применить формулу (2.10), но к более удачным результатам приводит зависимость

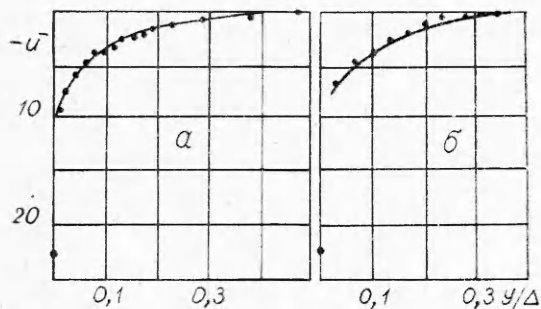
$$k = 0,4 + 58,510275(p^+/\beta)(1 - e^{-0,32068\beta}).$$

На фиг. 3 показано сравнение расчетных значений (штриховая линия) u^+ по приведенным формулам с экспериментальными данными (точки) Г. Шубауера и П. Клебанова (*id.* 2100, $x = 1,0$) — *a*, Г. Герринга и И. Норбюри (*id.* 2800, $x = 3$) — *b*. Сплошной линией показан закон стенки (2.6) при $k = 0,41$ и $C = 5,0$ [15]. Из сравнения видно, что в зоне закона стенки с достаточной для практики точностью можно применять формулу (2.6) с постоянными коэффициентами. Расчетные значения по указанным формулам в зоне закона стенки практически совпадают.

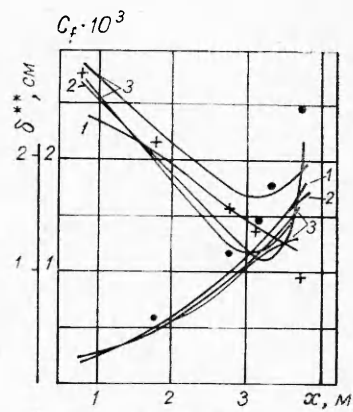
На фиг. 4 сравниваются расчетные значения дефекта скорости (штриховая линия) u^- и эксперимент (точки) Г. Людвига и В. Тиллмана (*id.* 1300, $x = 2,282$) — *a*, И. Белла (*id.* 3100, $x = 2,041$) — *b* [15]. Сравнение расчетных и опытных значений показывает, что при отрицательном градиенте давления [15] удовлетворительные результаты по дефекту скорости могут быть получены как с учетом поправок в коэффициентах κ и k на малые числа Рейнольдса и градиент, так и без него. Расхождения между числовыми значениями расчетов не выходят за пределы разброса экспериментальных результатов. На фиг. 4, *a* сравниваются эксперимент и расчетные значения с учетом указанных поправок, а на фиг. 4, *b* — без такого учета. Расчеты по дефекту скорости как при отрицательном, так и при положительном градиенте показали, что профили чувствительны к изменению и выбору значения внешней границы пограничного слоя δ .



Ф и г. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

На фиг. 5 показано сравнение расчетных значений (кривая 1) по методу прямых с применением формул (1.1), (1.2) без учета поправок в коэффициентах с экспериментом Г. Людвига и В. Тиллмана (*id.* 1200) по коэффициенту трения c_f (крестики) и толщине потери импульса δ^{**} (точки), а также расчетами из [3] (кривая 2) и [13] (кривые 3). Расчет показывает на отсутствие резких отклонений от эксперимента при значительном неблагоприятном градиенте.

Поступила 23 III 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочерыжников Г. В., Матвеев С. К. Об опыте численного интегрирования турбулентного пограничного слоя.— В сб.: Гидромеханика и теория упругости. Вып. 13, 1968.
2. Computation of turbulent boundary layers — 1968. AFOSR—IFP—Stanford Conference. Vol. 1. Ed. Kline S. J., Morkovin M. V., Sovran G., Cockrell G. J. S. I., 1969.
3. Федяевский К. К., Гиневский А. С., Колесников А. В. Расчет турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости. Л.: Судостроение, 1973.
4. Долгов В. П., Шулемович В. М. Турбулентная вязкость для несжимаемых градиентных течений в предотрывных областях и на шероховатой поверхности.— ПМТФ, 1977, № 3.
5. Хортмен. Модель турбулентности для расчета неравновесных течений при положительном градиенте давления.— Ракетн. техника и космонавтика, 1977, т. 15, № 2.
6. Плетчер. Расчет несжимаемого турбулентного отрывного течения.— Теор. основы инж. расчетов, 1978, № 4.
7. Шенг Дж. С., Хенкли В. Л., Петти Дж. С. Трехмерное сверхзвуковое турбулентное течение внутри двугранного угла.— Ракетн. техника и космонавтика, 1977, т. 17, № 7.
8. Мовчан В. Т., Захарюгин Б. Д. Расчет турбулентного пограничного слоя на плоской пластине методом прямых.— В сб.: Гидромеханика. Вып. 40, 1979.
9. Мовчан В. Т., Захарюгин Б. Д. Расчет турбулентного пограничного слоя на основе единого представления турбулентной вязкости поперек пограничного слоя.— В сб.: Прикладная аэродинамика, 1979.
10. Чэпмен Д. Р. Вычислительная аэродинамика и перспективы ее развития.— Ракетн. техника и космонавтика, 1980, т. 18, № 2.
11. Турбулентность/Под. ред. П. Брэдшоу. М.: Машиностроение, 1980.
12. Себечи, Мосинскис. Расчет несжимаемого турбулентного пограничного слоя при малых числах Рейнольдса.— Ракетн. техника и космонавтика, 1971, т. 9, № 8.
13. Новожилов В. В. Теория плоского турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости. Л.: Судостроение, 1977.
14. Лапин Ю. В., Ярин А. Л. Проблема «срачивания» в теории неравновесных турбулентных течений.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 3.
15. Computation of turbulent boundary layers — 1968. AFOSR—IFP—Stanford Conference. Vol. 2. Ed. Coles D. E., Hirst E. A. S. I., 1969.
16. Хинце И. О. Турбулентность. М.: Физматгиз, 1963.
17. Мовчан В. Т. Приближенный метод вычисления профилей напряжения трения и скорости в турбулентном потоке с положительным градиентом давления.— В сб.: Гидромеханика. Вып. 26, 1975.
18. Мовчан В. Т. К исследованию турбулентных течений.— В сб.: Стратифицированные и турбулентные течения, 1979.

19. Мовчан В. Т. К вычислению коэффициента турбулентной вязкости.— В сб.: Гидромеханика. Вып. 41, 1980.
20. Кадр Б. Д., Яглом А. М. Профили средней скорости и закон сопротивления в турбулентных пограничных слоях с тормозящим градиентом давления.— В кн.: Механика турбулентных потоков. М.: Наука, 1980.
21. McDonald H. The effect pressure gradient on the law of the wall in turbulent flow.— J. Fluid Mech., 1969, vol. 35, p. 2.
22. Кутателадзе С. С. Три проблемы теории теплообмена и физической гидрогазодинамики.— Инж.-физ. журн., 1980, т. 39, № 6.
23. Кутателадзе С. С., Миронов Б. П., Накоряков В. Е., Хабахпашева Е. М. Экспериментальное исследование пристенных турбулентных течений. Новосибирск: Наука, 1975.

УДК 533.601.1

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ С РЕШЕТКОЙ ПЛАСТИН

Е. Ф. Жигалко, В. Д. Шевцов

(Ленинград)

Особенности задачи о взаимодействии ударных волн с проницаемыми преградами от практических до чисто научных привлекают внимание исследователей. Имеющаяся библиография большей частью относится к взаимодействию ударных волн с проволочными сетками, т. е. преградами, не имеющими пространственной протяженности в направлении распространения ударной волны.

Рассмотрена задача о нестационарном течении газа, возникающем при падении плоской ударной волны на однородный набор полубесконечных призм. Предполагается, что в этой задаче имеют место характерные особенности явления, происходящего при падении ударной волны на жесткую проницаемую стенку. Результаты экспериментов дают хорошую основу для разработки и совершенствования теоретических моделей. В частности, сравнение данных, полученных в эксперименте по теории Честера — Чизнелла — Уизема и из расчета методом «крупных частиц», приводит к отчетливому представлению о качестве различных подходов.

На пути к решению практических вариантов задачи о взаимодействии ударной волны с проницаемой преградой остановимся на одной простой и характерной модели, представляющей собой однородный набор призматических пластин (фиг. 1). Передняя грань набора параллельна падающей волне и возможна квазиодномерная трактовка плоской задачи о нестационарном течении газа при таком взаимодействии. Отметим, что модель исчерпывающе описывается одним параметром

$$(1) \quad \alpha = 1 - \delta/(\delta + d),$$

где δ — ширина зазора между пластинами толщиной d .

На первой стадии рассматриваемого процесса происходит индивидуальное взаимодействие ударной волны с элементом набора. Далее, по мере углубления интерференции все более существенным оказывается то обстоятельство, что компоновка является системой многих тел. Равномерность распределения элементов обуславливает близость явления в этой фазе к взаимодействию ударной волны с прямой стенкой из жесткого материала однородной проницаемости α (гомогенное приближение). При ином подходе задача эквивалентна явлению, вызванному прохождением ударной волны в канале места (x_0) , где его сечение внезапно уменьшается, так что перепад площади соответствует величине параметра α . В первом случае с самого начала, а во втором в приближении больших времен задача является автомодельной (в нее не входят явно параметры размерности длины и времени) и, как показывает опыт ее изучения [1—3], допускает в предельном смысле точное решение типа «распад разрыва» при условии, что в месте, где сечение канала изменяется (x_0) , предусматривается разрыв импульса. Возникает вопрос о содержании волновой диаграммы. В [1] доказано, что в наших условиях возможна только вол-