

ДЕФОРМАЦИИ И УПРОЧНЕНИЕ КУЛОНОВОЙ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ

В. Н. Николаевский, Н. М. Сырников, М. Э. Шаскольская

(Москва)

Приводятся уравнения упругопластического деформирования сыпучей среды и замыкающие экспериментальные зависимости (для песков). Для плоского случая составляются в общем виде уравнения характеристик. Показано, что данные опытов по зависимости скорости дилатансии — угол внутреннего трения отражают условие ортогональности характеристик поля скорости направлению действия сил сухого трения на площадках скольжения. Рассмотрена задача о течении в сдвиговом приборе. Расчет по универсальным зависимостям согласуется с данными опытов.

1. Определяющие уравнения. В работах [1,2] была предложена следующая система уравнений связи приращений упругих de_{ij}^e и пластических de_{ij}^p деформаций с напряженным состоянием:

$$\frac{de_{ij}}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right); \quad de_{ij} = de_{ij}^e + de_{ij}^p;$$

$$\frac{de_{ij}^e}{dt} = Q_{ijkl} \frac{\tilde{d}\sigma_{kl}}{dt};$$

$$Q_{ijkl} = \frac{1}{E} \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{\mu}{E} \delta_{ij} \delta_{kl};$$

$$de_{ij}^p = -(p + H) \delta_{ij} d\zeta + (\sigma_{ij} + p \delta_{ij}) d\lambda;$$

$$(1.1) \quad \Phi_\sigma(\sigma_{ij}, \alpha, H) = \frac{2}{\sqrt{3}} \kappa_\tau \tau - \alpha p - \alpha H = 0;$$

$$(1.2) \quad \Phi_e(de_{ij}^p, \Lambda) = de_p - \frac{2}{\sqrt{3}} \Lambda \kappa_\gamma d\gamma = 0,$$

где v_i — скорость смещения; e_{ij} — полная деформация; μ — коэффициент Пуассона; E — модуль Юнга; σ_{ij} — тензор напряжений; \tilde{d}/dt — символ Яуманновой производной; $p = -1/3 \sigma_{ij} \delta_{ij}$ — давление; $d\zeta$, $d\lambda$ — скалярные функции, отличные от нуля, если выполнены предельные условия пластического состояния (1.1) и дилатансионной связи (1.2); α — коэффициент внутреннего трения, αH — сцепление; Λ — скорость дилатансии; τ — интенсивность сдвигового напряжения; $d\gamma^p$ — интенсивность пластического сдвига

$$\tau^2 = \frac{1}{8} \{ (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + \\ + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2) \};$$

$$d\gamma_p^2 = \frac{1}{2} \{ (de_{11}^p - de_{22}^p)^2 + (de_{11}^p - de_{33}^p)^2 + (de_{22}^p - de_{33}^p)^2 + \\ + 6(de_{12}^{p2} + de_{23}^{p2} + de_{13}^{p2}) \}; \quad \kappa_\tau = \text{sgn } \tau; \quad \kappa_\gamma = \text{sgn } d\gamma.$$

Можно видеть, что использование (1.2) позволяет выразить $d\zeta$ через $d\lambda$ и получить следующую форму инкрементального закона пластичности:

$$(1.3) \quad de_{ij}^p = \left[\sigma_{ij} + \frac{2}{3} \Lambda \alpha H \delta_{ij} + \left(1 + \frac{2}{3} \Lambda \alpha \right) p \delta_{ij} \right] d\lambda,$$

где $d\lambda \geq 0$ при $\Phi_\sigma = 0$ и активном нагружении и $d\lambda = 0$, если идет разгрузка ($\Phi_\sigma < 0$) или $\Phi_\sigma = 0$, но нагружение нейтрально. Соотношение (1.3) переходит в закон течения, ассоциативный условию Мизеса — Шлейхера (1.1) при $\Lambda \equiv \alpha$; в общем случае при $\Lambda \neq \alpha$ связь (1.3) соответствует неассоциативному инкрементальному закону.

Будем считать, что α , Λ — функции параметра состояния χ . Примем, что $\chi = e_p/e_p^*$, где e_p^* — такая деформация, при которой среда не дилатирует (находится в так называемом критическом состоянии $\Lambda(\chi=1)=0$); $e_p^* = f(p)$ — некоторая функция давления. Поскольку $\alpha = \alpha(\chi)$ и $\Lambda = \Lambda(\chi)$ — функции одного и того же параметра, можно пользоваться также функциями упрочнения вида $\alpha = \alpha(\chi)$, $\Lambda = \Lambda(\alpha)$.

2. Плоское пластическое деформирование. Этот частный случай характеризуется условием $de_{33}^p = de_{13}^p = de_{23}^p = 0$. Тогда оказывается, что условия пластичности (1.1) и дилатансии (1.2) принимают вид

$$(2.1) \quad \sqrt{\frac{1}{4} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_{xy}^2} + \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \sin \varphi - H \sin \varphi = 0,$$

где φ — угол внутреннего трения, причем

$$(2.2) \quad \sin \varphi = \alpha \frac{\sqrt{3(3-\Lambda^2)}}{3-\alpha\Lambda};$$

$$(2.3) \quad de_x^p + de_y^p - \sin \nu \sqrt{(de_x^p - de_y^p)^2 + 4de_{xy}^2} = 0,$$

где ν — угол дилатансии, причем

$$(2.4) \quad \sin \nu = \Lambda \sqrt{\frac{3}{3-\Lambda^2}}.$$

Инкрементальный закон пластического деформирования имеет теперь вид

$$(2.5) \quad de_{ij}^p = \left[\sigma_{ij} + \sin \varphi \sin \nu H \delta_{ij} - (1 + \sin \varphi \sin \nu) \frac{1}{2} \sigma_{ij} \delta_{ij} \right] d\lambda,$$

где $i, j = x, y$.

Если пренебрегать теперь упругими составляющими деформаций, т. е. принять $de_{ij}^e = 0$, то приходим к модели жесткопластического дилатирующего материала, рассмотренной в работе [3]. Тогда

$$de_x = \frac{\partial u}{\partial x} dt; \quad de_y = \frac{\partial v}{\partial y} dt; \quad de_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dt.$$

Условия равновесия в плоском случае включают в себя три неизвестных

$$(2.6) \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = F_x, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = F_y$$

при заданных массовых силах F_x, F_y . Известная подстановка

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= -p + (p+H) \sin \varphi \cos 2\theta; & \sigma_y &= -p - (p+H) \sin \varphi \cos 2\theta; \\ \sigma_{xy} &= - (p+H) \sin \varphi \sin 2\theta, \end{aligned}$$

где θ — угол наклона максимального главного напряжения сжатия σ_2 к оси y (или, что то же самое, главного напряжения σ_1 к оси x), позволяет тождественно удовлетворить условию пластичности (2.1) и приводит уравнения (2.6) к виду

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} (1 - \psi'_p \cos 2\theta) + \frac{\partial p}{\partial y} \psi'_p \sin 2\theta - \psi'_p \cos 2\theta \frac{\partial \rho}{\partial x} + \\ + \psi'_p \sin 2\theta \frac{\partial \rho}{\partial y} - 2\psi \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} - 2\psi \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} = -F_x; \end{aligned}$$

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} \psi'_p \sin \alpha + (1 + \cos 2\theta \psi'_p) \frac{\partial p}{\partial y} + \sin 2\theta - \psi'_p \frac{\partial \rho}{\partial x} + \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} \cos 2\theta \psi'_p + 2\psi \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} - 2\psi \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} = -F_y, \end{aligned}$$

где $\psi = (p+H) \sin \varphi$, ψ'_p и ψ'_ρ — соответствующие частные производные.

Чтобы получить уравнение для поля скоростей u и v , подставим соотношение (2.7) в (2.5). После очевидных преобразований получим

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \sin 2\theta \frac{\partial u}{\partial x} + \cos 2\theta \frac{\partial v}{\partial y} + \cos 2\theta \frac{\partial v}{\partial x} - \sin 2\theta \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \\ \sin 2\theta \frac{\partial u}{\partial x} + \sin \nu \frac{\partial u}{\partial y} + \sin \nu \frac{\partial v}{\partial x} + \sin 2\theta \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Если из системы (2.10) исключить величину $\partial u/\partial y + \partial v/\partial x$, то можно сразу получить дилатансионную связь (2.3), выраженную через максимальную скорость сдвига для произвольной (ср. [4]) системы координат:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\sin \nu}{\cos 2\theta} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

Поскольку $\varphi = \varphi(\rho, p)$; $\nu = \nu(\rho, p)$, система уравнений плоского движения (2.8), (2.10) должна дополняться уравнением неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

3. Уравнения характеристик в плоском случае. Можно показать, что уравнения характеристик поля напряжений имеют вид

$$(3.1) \quad \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{1,2} = \frac{\sin 2\theta \pm \sqrt{1 - \psi_p'^2}}{-\cos 2\theta + \psi_p'} = \operatorname{ctg}(\theta \pm \varepsilon),$$

где $\psi_p' = \cos 2\varepsilon$; $|\psi_p'| \leq 1$.

Если $\psi_p' = \sin \varphi$, как и в классической статике [5], то $\varepsilon = \pi/4 - \varphi/2$.

Уравнения характеристик поля скоростей имеют вид

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{-\sin 2\theta + \sqrt{1 - \cos^2 2\delta}}{\cos 2\delta - \cos 2\theta} = \frac{\sin 2\theta + \sqrt{1 - \cos^2 2\delta}}{\cos 2\theta - \cos 2\delta} = \\ = \operatorname{ctg}(\theta \pm \delta), \end{aligned}$$

где $\sin v = \cos 2\delta$, т. е. $\delta = \pi/4 - v/2$. Наконец, пятая характеристика плотности при $\partial\rho/\partial t \equiv 0$ совпадает с траекторией частицы

$$(3.3) \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_5 = \frac{v}{u}.$$

Условия на характеристиках могут быть представлены в следующем общем виде:

$$(3.4) \quad [dx^2(\cos 2\theta - \cos 2\delta) - dy^2(\cos 2\theta + \cos 2\delta) + \\ + 2\sin 2\theta dx dy] \{dp(vdx - udy)[dx(-\cos 2\theta - \cos 2\delta) + \\ + \sin 2\theta dy] + \psi'_p d\rho dy(udx + vdy) - d\theta dy \psi(vdx - udy)\} - \\ - 2\rho dy \cos 2\delta (dudx + dvdy)(dx^2 + dy^2) \psi \psi'_p = 0.$$

Для получения из (3.4) условия вдоль конкретной характеристики, необходимо подставить в формулу (3.4) соответствующее значение dy/dx из соотношений (3.1) — (3.3).

Так, для характеристик скорости справедливы соотношения

$$(3.5) \quad \frac{\partial u}{\partial s_3} + \operatorname{ctg}(\theta + \delta) \frac{\partial v}{\partial s_3} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial s_4} + \operatorname{ctg}(\theta - \delta) \frac{\partial v}{\partial s_4} = 0.$$

Те же условия, записанные относительно проекций скорости на направление характеристик, даны в [4]

$$\frac{\partial U}{\partial s_3} - (V \operatorname{cosec} 2\delta - U \operatorname{ctg} 2\delta) \frac{\partial(\theta - \delta)}{\partial s_3} = 0; \\ \frac{\partial V}{\partial s_4} + (U \operatorname{cosec} 2\delta - V \operatorname{tg} 2\delta) \frac{\partial(\theta + \delta)}{\partial s_4} = 0.$$

Условия, выполняемые вдоль характеристики плотности, имеют вид

$$(\cos 2\theta + \cos 2\delta) \left[\frac{v}{u} + \operatorname{tg}(\theta + \delta) \right] \left[\frac{v}{u} + \operatorname{tg}(\theta - \delta) \right] d\rho - \\ - \rho \cos 2\delta d(u^2 + v^2) = 0.$$

Полученные соотношения для характеристик обобщают результаты [4] на случай упрочняющегося тела.

Наконец, в гипотетическом случае, когда $v = \varphi$, результаты соответствуют условиям ассоциированного течения, а при $v = \varphi = \text{const}$ совпадают с результатами Шилда [6].

4. Нахождение замыкающих функций упрочнения. Определив вид зависимостей $\varphi = \varphi(\rho, p)$; $v = v(\rho, p)$, путем пересчета на общий трехмерный случай найдем упоминавшиеся выше функции упрочнения $\alpha(\chi)$ и $\Lambda = \Lambda(\alpha)$.

Рассмотрим относительное движение в элементарном объеме среды, характеризуемое скоростью деформации e_{ij} . Скорость относительного смещения двух частиц среды, лежащих на единичном отрезке r (фиг. 1), выражается через тензор e_{ij} в произвольной системе координат * x, y следующим образом:

* Для частного случая, когда оси x, y совпадают с главными осями тензора скоростей деформаций, аналогичный анализ был проведен в [4].

$$\Delta u_i = e_{ij} r_j, \quad r(\sin \gamma, -\cos \gamma),$$

где γ — угол между линией, соединяющей центры частиц, и осью y . Проекции вектора Δu_i на направление r и перпендикулярное к нему направление r' ($\cos \gamma, \sin \gamma$)

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \Delta u_i r_i &= \frac{\partial u}{\partial x} \sin^2 \gamma - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \sin \gamma \cos \gamma + \frac{\partial v}{\partial y} \cos^2 \gamma; \\ \Delta u_i r'_i &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sin 2\gamma - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos 2\gamma \right\}. \end{aligned}$$

Соотношение (4.1) будет моделировать микродвижение в сыпучей среде (система твердых шариков или в плоском случае — дисков), если, во-первых, градиенты скоростей удовлетворяют дилатансионному представлению (2.9) и, во-вторых, есть возможность относительного скольжения рассматриваемых соседних частиц. Оказывается, что

$$\Delta u_i r_i = 0; \quad \Delta u_i r'_i = A \sin 2(\theta \pm \delta) \neq 0$$

при $\gamma = \theta \pm \delta$, т. е. когда направление \bar{r} совпадает с характеристикой поля скоростей и вектор скорости Δu ортогонален к характеристике поля скоростей. Во всех иных случаях $\gamma \neq \theta \pm \delta$ и составляющая относительной скорости Δu_i вдоль \bar{r} отличны от нуля. Таким образом, чисто тангенциальная относительное движение частиц среды, при котором относительная скорость ортогональна к линии, соединяющей центры соседних частиц, происходит вдоль семейств линий, взаимортогональных к семействам характеристик поля скоростей. Как указывалось в [4], именно эти линии следует интерпретировать как линии скольжения. Характеристики поля скоростей будут являться одновременно линиями скольжения только в несжимаемой среде ($v=0$).

Микродвижение кулоновой среды происходит в условиях действия сил сухого трения вдоль линии скольжения. Соответствующее предположение о том, что сила сухого трения R , действующая на площадке предельного равновесия под углом $\bar{\beta}$ к ней, коллинеарна направлению линии скольжения (т. е. ортогональна к одной из характеристик поля скоростей), было высказано в работе [4]. Тогда между углами внутреннего трения и дилатансии среды в плоском случае оказывается справедливой связь

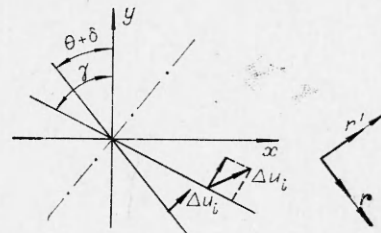
$$(4.2) \quad \varphi = 2 \left(\frac{\pi}{4} - \delta + \varphi_0 \right) = 2\varphi_0 + v,$$

причем величина φ_0 может быть интерпретирована как угол трения между двумя индивидуальными частицами.

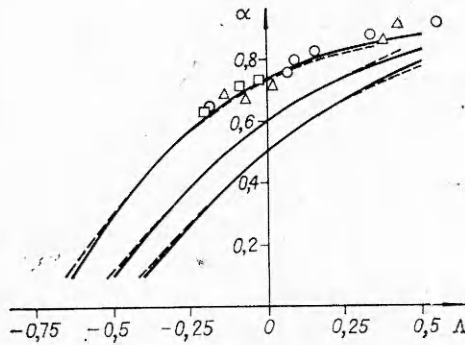
Связь (4.2) можно пересчитать на общий случай соотношения между функциями упрочнения α и Λ , зависящими от параметра $\chi = e^p / e_*^p$. Подставляя (4.2) в (2.2) и исключая v , с помощью соотношения (2.4) можно получить зависимость $\alpha(\Lambda)$. Результирующие кривые $\alpha(\Lambda)$ для трех значений параметра $\varphi_0 = 15; 18,5; 23^\circ$ приведены на фиг. 2. Эти зависимости с достаточной точностью аппроксимируются (штриховые линии) формулой

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \Lambda &= b - \sqrt{(1+2b\alpha_*) - (\alpha_* + 2b)\alpha}, \\ b &= \sqrt{1 - \alpha_*}, \end{aligned}$$

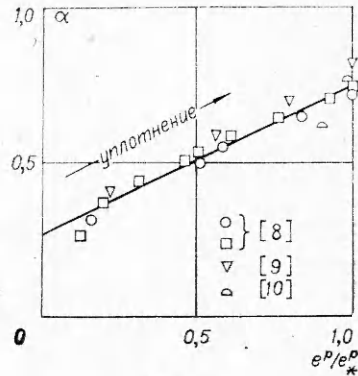
где $\alpha_* = \alpha(\Lambda=0) = \sin 2\varphi_0$.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

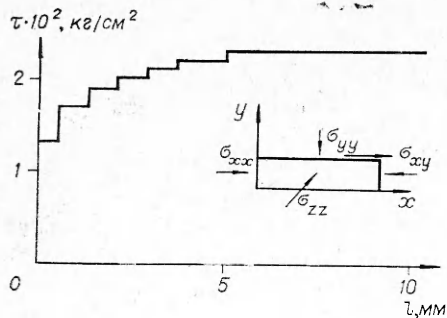
Сопоставим полученные зависимости со сводными экспериментальными данными [7] по зависимости коэффициента внутреннего трения от скорости дилатансии, измеренными в ходе трехосных испытаний различных речных песков. (В работе [7] экспериментальные данные представлены в виде зависимости $\varphi = \arcsin \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$ от величины de_v/de_1 , называемой там скоростью дилатансии, где e_1 и e_v — осевая и объемная деформации, а σ_1, σ_2 — осевое и боковое напряжение.) Результаты пересчетов к используемым здесь функциям нанесены на фиг. 2. Оказывается, что данные для разных песков (разные символы) хорошо аппроксимируются единой зависимостью (4.3) при $\varphi_0 = 23^\circ$. Отметим, что это значение φ_0 удовлетворительно коррелируется с данными об угле трения между двумя кварцевыми поверхностями: $17 - 26^\circ$.

Вторую замыкающую связь $\alpha(\chi)$ можно найти путем обработки экспериментальных данных по трехосным испытаниям речных песков [8-11]. Оказывается, что на значительном интервале значений зависимость $\alpha(\chi)$ может быть описана единым линейным соотношением вида (фиг. 3)

$$(4.4) \quad \alpha = \alpha_0 + (\alpha_* - \alpha_0)\chi,$$

где $\alpha_0 = \alpha(0)$; $\alpha_* = \alpha(1)$. Напомним, что $\chi = 1$ соответствует критическому значению объемной пластической деформации $e^p = e^p_*$, при которой скорость дилатансии Λ становится равной нулю.

5. Плоский сдвиг. С использованием выявленных связей (4.3), (4.4) в работе [11] были проведены расчеты одномерных осесимметричных предельных состояний, результаты которых вполне удовлетворительно



Фиг. 4

согласуются с трехосными испытаниями. Рассмотрим здесь плоское сечение сыпучей среды, соответствующее испытаниям в приборах простого среза при измерениях коэффициентов внутреннего трения сцепления.

Практически деформация сдвига в таких экспериментах изменяется ступенчатым образом при нарастании сдвигающего напряжения σ_{xy} (фиг. 4) вплоть до некоторой критической величины σ^*_{xy} (напряжение

$\sigma_{yy} = \text{const}$), когда наступает неограниченный рост сдвиговых деформаций (разрушение).

Переходя к формулировке определяющих уравнений для данной задачи, отметим, что упругими компонентами деформаций можно пренебречь, так как напряжения при испытаниях песков в приборах простого среза в большинстве случаев невелики ($\sigma_{yy} = 3 \div 4 \cdot 10^{-3}$ кг/см² по данным работы [12]).

В рассматриваемом случае $de_{xx} = de_{zz} = de_{xz} = de_{yz} = 0$; $de_{ij} = de_{ij}^p$; $de = de_{yy}$; $de_{xy} = d\gamma$ общие соотношения (1.3) принимают вид

$$(5.1) \quad de = \left[\sigma + \left(1 + \frac{2\alpha\lambda}{3} \right) p \right] d\lambda; \quad d\gamma = \tau d\lambda;$$

$$\sigma = \sigma_{yy}; \quad \tau = \sigma_{xy};$$

$$p = -1/3(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}),$$

причем

$$(5.2) \quad \frac{\sigma_{xx}}{\sigma} = \frac{\sigma_{zz}}{\sigma} = \frac{3 + 2\alpha\lambda}{3 - 4\alpha\lambda} = L(e);$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0.$$

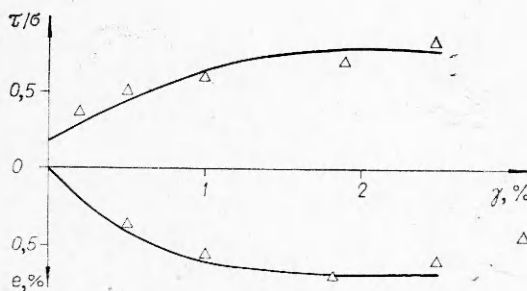
Условие текучести (1.1) можно представить в виде

$$(5.3) \quad \frac{\tau}{\sigma} = -\frac{1}{3} \{ \alpha^2 (1 + 2L(e))^2 - 3(1 - L(e))^2 \}^{1/2} = -k(e).$$

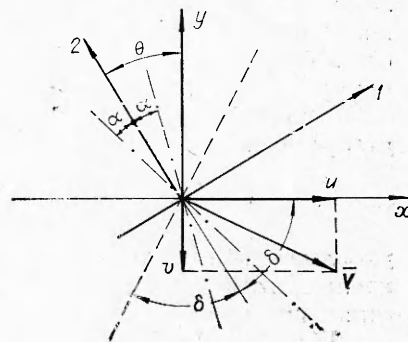
Исключая $d\lambda$ из уравнений (5.1), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение, связывающее объемную и сдвиговую деформации

$$\frac{de}{d\gamma} = -\frac{1}{k(e)} \{ 1 - (3 + 2\alpha\lambda)(1 + 2L/9) \}.$$

Интегрирование этого нелинейного уравнения позволяет найти функцию $e = e(\gamma)$, а затем вычислить зависимость отношения $k = \tau/\sigma$ от величины сдвиговой деформации e_{xy} . Результаты численного интегрирования приведены на фиг. 5. Там же даны экспериментальные данные из работы [12]. Величина критической объемной деформации e_*^p по данным [12] была выбрана равной 0,7%. Следует отметить удовлетворительное согласие расчета с экспериментальными данными. В данном случае из эксперимента взят лишь один параметр e_*^p , и совпадение расчета с экспериментом еще раз свидетельствует о возможности применения построенной модели для описания поведения гранулированных сред в различных условиях.



Фиг. 5



Фиг. 6

Как следует из соотношения (5.3), $L=1$ и $k=\alpha_*$ только при $e=e^p$. Параметр $k = \left| \frac{\tau^*}{\sigma} \right|$ измеряется в экспериментах по плоскому сдвигу и интерпретируется как $\operatorname{tg} \varphi_p$, где φ_p — измеряемый таким образом угол внутреннего трения песка в плоском случае. Поскольку α_* в модели принимается равной 0,72—0,76, критическое значение угла φ_p^* , измеряемое на приборе простого среза, должно равняться 36—38°, что также согласуется с экспериментальными данными [7, 12]. Отметим в этой связи, что критическое значение угла внутреннего трения, измеряемого в стандартных трехосных испытаниях как $\varphi_l = \arcsin (\sigma_1 - \sigma_2) / (\sigma_1 + \sigma_2)$, где σ_1 — осевое, $\sigma_2 = \sigma_3$ — боковое напряжения, отличается от величины φ_p^* для того же песка, оно равно 30—32° [7] и соответствует значению параметра $\alpha_* = 0,72 - 0,76$. Наконец, критическая величина эффективного угла внутреннего трения φ_* , введенная в [4] и определяющая положение площадок предельного равновесия по отношению к главным осям (эти площадки не совпадают с плоскостью сдвига), равна $\arcsin \alpha_*$ и составляет $\sim 46^\circ$.

Остановимся подробнее на характеристиках полей напряжений и скоростей при плоском сдвиге. Положение главных осей напряжений и скоростей деформаций определяется углом θ

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}.$$

Подставляя сюда компоненты напряжений, согласно (5.2), (5.3) и с учетом $\sin v = \Lambda \sqrt{3(3 - \Lambda^2)}$, получим

$$2\psi = \arccos \left(-\frac{\Lambda \sqrt{3}}{\sqrt{3 - \Lambda^2}} \right) = \frac{\pi}{2} + v = \pi - 2, \quad \psi = \frac{\pi}{2} - \delta.$$

Следовательно, угол между осью x и направлением максимального главного напряжения сжатия равен δ (фиг. 6) и ось x является характеристикой поля скоростей. Этот же результат может быть получен непосредственно из того факта, что

$$\frac{de_{xx}}{dt} = \frac{du}{dx} = 0.$$

Вторая характеристика, как показано в [4], ортогональна вектору скорости \mathbf{V} , направленному вдоль линии относительного скольжения частиц среды. В момент достижения объемной деформацией своего критического значения e_x^* скорость дилатансии Λ обращается в нуль и вектор \mathbf{V} направлен вдоль оси x , т. е. направление скольжения совпадает с характеристикой поля скоростей; происходит неограниченный сдвиг в направлении оси x без изменения объема. Угол между осью x и главной осью 2 в этом случае равен $\pi/4$.

В каждый момент времени в сдвигаемом слое существует [1] линейное распределение скоростей

$$(5.4) \quad u = \frac{U}{h} y; \quad v = \frac{U}{h} y \operatorname{tg} v,$$

удовлетворяющее дилатансионному соотношению (2.3). Из соотношений вдоль характеристик (3.5) можно получить, что вдоль первой характеристики при плоском сдвиге $u=U=\text{const}$, а вдоль второй — $\mathbf{V} \equiv 0$.

Штрихпунктирными линиями на фиг. 6 изображено положение площадок предельного равновесия, составляющих с направлением оси

максимального главного напряжения сжатия углы $\pi/4 - \varphi/2$. Именно на этих площадках выполняется условие Мора — Кулона (2.1) с эффективным углом внутреннего трения φ , определяемым соотношением (2.2). Эти площадки в реальных случаях при $\varphi \neq 0$ не совпадают с направлением скольжения, а при $\Lambda=0$ угол между осью x и площадкой предельного равновесия равен φ_0 , т. е. $\approx 23^\circ$.

Соотношения (2.7) для компонент тензора напряжений в рассматриваемом случае имеют вид

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \end{array} \right\} = -p(1 \pm \sin \varphi \sin \nu); \quad \sigma_{xy} = p \sin \varphi \cos \nu,$$

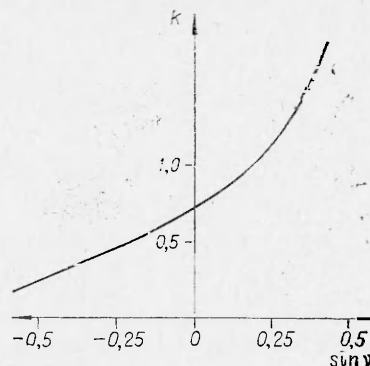
а потому

$$(5.5) \quad k - \frac{\tau}{\sigma} = \frac{\cos \nu \cdot \sin \varphi}{1 - \sin \nu \cdot \sin \varphi}.$$

Зависимость (5.5) может быть получена [1], если непосредственно исходить из распределения скоростей (5.4) по толщине слоя. Так как величина угла внутреннего трения φ является, согласно (4.2), функцией угла дилатансии ν , можно говорить о зависимости $k(\nu)$ для рассматриваемого течения. Эта зависимость изображена на фиг. 7 для значения параметра $\varphi_0 = 23^\circ$ (в работе [1] эта зависимость была приведена для значения $\varphi_0 = 30^\circ$).

Если же интерпретировать данные о плоском сдвиге на основе модели кулоновой несжимаемой среды, то $k = \operatorname{tg} \varphi_p$, и график (фиг. 7) можно было бы трактовать как свидетельство о наличии эффективной зависимости $\varphi_p = \varphi_p(e)$, однако фиксируемые в опытах перемещения (измерения кинематических переменных) остались бы необъяснимыми. Именно поэтому эффект дилатансии имеет особое значение в задачах, где на границах задаются смещения, например, при расчете усилия, действующего на поворачивающуюся подпорную стенку [13].

В заключение укажем, что опытные данные типа приведенных на фиг. 4, 5 качественно объяснялись в монографии [14] моделью пластического тела с ассоциативным законом течения и угловыми точками на поверхности текучести.



Фиг. 7

Поступила 1 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Николаевский В. Н. Механические свойства грунтов и теория пластичности. — «Итоги науки и техники, сер. Механ. твер. деформ. тел», т. 6, М., ВИНТИ, 1972.
2. Nikolaevskii V. N. Continuum theory of plastic deformation of a granular medium. — In: Foundation of plasticity. Ed. by A. Sawczuk. Noordhoff, Llyden, 1972.
3. Николаевский В. Н. Определяющие уравнения пластического деформирования сыпучих сред. — ПММ, 1971, т. 35, № 6.
4. Николаевский В. Н., Сырников Н. М. О плоском предельном течении сыпучей дилатирующей среды. — «Изв. АН СССР. Механ. тверд. тела», 1970, № 2.
5. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. М., Физматгиз, 1960.
6. Shield R. T. Mixed boundary value problems in soil mechanics. — «Quart. Appl. Math», 1953, 11, N 1.

7. *Bishop A. W.* The strength of soils as engineering materials. — «Geotechnique», 1966, 16, N 2.
8. *Vesic A.S., Clough G. W.* Behavior of granular materials under high stresses. — «J. Soil Mech. and Found. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng.», 1968, 94, N 3.
9. *Barden L., Ismail H., Tong P.* Plane strain deformation of granular material at low and high pressures. — «Geotechnique», 1969, 19, N 4.
10. *Fridman S., Zeitlen T. G.* Some pseudo — elastic properties of granular media. Proc. 7 th Int. Conf. Soil. Mech. and Found Eng. Mexico, 1969, vol. 1.
11. *Николаевский В. Н., Сырников Н. М., Шефтер Г. М.* Динамика упругопластических дилатирующих сред. — В кн.: Успехи и достиж. механ. деформ. тел. М., 1974.
12. *Адушкин В. В., Орленко Т. А.* Прочностные характеристики и разуплотнение песчаного грунта при сдвиге. — «Изв. АН СССР. Механ. тверд. тела», 1970, № 2.
13. *Roscoe K. H.* The influence of strain in soil mechanics. — «Geotechnique», 1970, 20, N 2.
14. *Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И.* Теория упрочняющегося пластического тела. М., «Наука», 1971.

УДК 535.44

О ВИЗУАЛИЗАЦИИ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ПОЛЕЙ

С. Р. Стефанов

(Москва)

Проанализированы выражения для распределения интенсивности светового поля, промодулированного ультразвуковой волной. Рассмотрены случаи фазовой модуляции и модуляции в приближении геометрической оптики. Оценено влияние обоих видов модуляции на структуру оптического изображения, согласно теории дифракции С. М. Рытова.

Одним из наиболее точных методов измерения длины ультразвуковой волны и скорости ее распространения в исследуемой среде является метод, основанный на эффекте вторичной интерференции световой волны после пересечения ею ультразвукового поля [1].

Распределение интенсивности светового поля в плоскостях, расположенных за бегущей ультразвуковой волной в случае перпендикулярного падения на нее параллельного светового луча, дается выражениями [2]

$$(1) \quad I = \sum_{S=-\infty}^{+\infty} B_S \exp \left[jS \left(\Omega t - \frac{2\pi}{\Lambda} X \right) \right];$$

$$(2) \quad B_S = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} a_r(L) a_{r-S}^*(L) \exp \left[j\pi (Z - L) \frac{\lambda}{\Lambda^2} S (S - 2r) \right],$$

где λ , Λ — длины волн света и ультразвука в невозмущенной среде соответственно; Ω — частота ультразвуковых колебаний; X , Z — направления распространения ультразвука и света соответственно; L — глубина ультразвукового поля по оси Z ; t — время; $a_r(L)$ — амплитуды дифрагированных на ультразвуке световых волн r -го порядка дифракции.

Применяя решение дифракционной задачи, согласно элементарной теории Рамана — Ната, учитывающей лишь изменение фазы светового луча при прохождении через ультразвуковое поле [3], имеем

$$(3) \quad a_r(L) \sim E_0 J'_r(v),$$