

ЛИТЕРАТУРА

1. Локшин А. А. Нелинейные ударные волны в средах с памятью и метод разрывов // ДАН СССР.— 1982.— Т. 263, № 24.
2. Локшин А. А. Нелинейная ударная волна в наследственной среде и точная факторизация нелинейного волнового оператора // Изв. АН СССР. МТТ.— 1985.— № 6.
3. Работнов Ю. И. Элементы наследственной механики твердых тел.— М.: Наука, 1977.
4. Бабич В. М., Алексеев А. С. О лучевом методе вычисления интенсивности волновых фронтов // Изв. АН СССР. Сер. геофиз.— 1958.— № 1.
5. Алексеев А. С., Гельчинский Б. Я. О лучевом методе вычисления полей волн в неоднородных средах с криволинейными границами раздела // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1959.— Т. 3.
6. Алексеев А. С., Бабич В. М., Гельчинский Б. Я. Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1961.— Т. 5.
7. Бабич В. М. Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов в упругой неоднородной анизотропной среде // Там же.
8. Бабичева Л. А., Быковцев Г. И., Вервейко Н. Д. Лучевой метод решения динамических задач в упруговязкопластических телах // ПММ.— 1973.— Т. 37, № 1.
9. Россихин Ю. А. Лучевой метод решения динамических задач в анизотропной термомупругой среде // Изв. АН СССР. МТТ.— 1977.— № 4.
10. Буренин А. А., Шаруда В. А. Косой удар по упругому полупространству // Изв. АН СССР. МТТ.— 1984.— № 6.
11. Гузь А. Н., Махорт Ф. Г., Гуца О. И. Введение в акустоупругость.— Киев: Наук. думка, 1977.
12. Нигул У. К. Асимптотический анализ эволюции формы импульса в наследственно упругих средах и возможные приложения в акустодиагностике // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.— 1979.— Вып. 41.
13. Буренин А. А., Чернышов А. Д. Ударные волны в изотропном упругом пространстве // ПММ.— 1978.— Т. 42, № 4.
14. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах.— М.: Мир, 1964.
15. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны.— М.: Мир, 1977.
16. Найфё А. Х. Методы возмущений.— М.: Мир, 1976.

г. Владивосток

Поступила 2/II 1989 г.

УДК 532.5:551.324

Ф. Х. Ахмедова, Л. М. Котляр

АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСТЕКАНИЯ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Известно [1, 2], что исследование гидродинамических процессов в погранслошной приближении можно свести к решению уравнения, описывающего форму свободной поверхности нелинейно-вязкой жидкости, с помощью методов теории подобия и анализа размерностей. Однако краевые задачи, возникающие при математическом моделировании, существенно нелинейны, и их решения в общем случае могут быть найдены лишь численными методами. Отсутствие априорных оценок точности численных методов делает необходимым построение их аналитических решений хотя бы в частных автомодельных случаях для тестирования на них соответствующих разностных схем.

В [3] с помощью аппарата группового анализа [4, 5] проведена групповая классификация уравнения, определяющего форму свободной поверхности нелинейно-вязкой жидкости в одномерном приближении, а именно ледника. Полученные инвариантные решения использовались для построения автомодельных задач, иллюстрирующих качественные особенности течения жидкости со степенным реологическим законом.

В настоящей работе решается двумерная автомодельная задача растекания жидкости по ложу сложной конфигурации.

1. Основное уравнение. Рассматривая нестационарное течение нелинейно-вязкой жидкости в изотермическом приближении, можно показать [2], что функция $l(x, y, t)$, описывающая свободную поверхность, удовлетворяет нелинейному дифференциальному уравнению второго по-

рядка в частных производных

$$(1) \quad \frac{\partial l}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[\frac{\partial l}{\partial x} \sqrt{\left(\frac{\partial l}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial l}{\partial y}\right)^2} \right] \int_{l_0}^l (l - z) \Gamma \left[(l - z) \sqrt{\left(\frac{\partial l}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial l}{\partial y}\right)^2} dz \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left[\frac{\partial l}{\partial y} \sqrt{\left(\frac{\partial l}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial l}{\partial y}\right)^2} \right] \int_{l_0}^l (l - z) \Gamma \left[(l - z) \sqrt{\left(\frac{\partial l}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial l}{\partial y}\right)^2} dz \right] \right\},$$

где t — время; x, y — пространственные координаты; $l_0(x, y)$ — профиль поверхности, по которой растекается жидкость; $\Gamma(z) = kz^\alpha$ — функция, характеризующая реологические свойства жидкости, взятая в степенной зависимости.

Из (1) при соответствующих граничных условиях $l(x, y, t)$ можно определить все другие характеристики течения, в частности скорости по любому направлению, напряжения, возникающие в жидкости, и т. д.

2. Инвариантные решения. Построение полного спектра инвариантных решений конкретного дифференциального уравнения базируется на его групповых свойствах [4, 5]. Поэтому с целью получения инвариантных решений уравнения (1) проведена его групповая классификация. Подробно результаты группового анализа даны в [3]. Здесь же приведем необходимые в дальнейшем инвариантные решения лишь второго ранга (табл. 1).

3. Решение задачи пространственного растекания жидкости. Обратимся к табл. 1. Наиболее общим и нетривиальным среди инвариантных решений является $\langle \lambda \tilde{X}_4 + X_5 \rangle$ — решение, зависящее от произвольных параметров α и λ . Как следует из табл. 1, его можно искать в виде $I_3 = \psi(I_1, I_2)$ или

$$(2) \quad u = t^{\frac{\alpha+1-\lambda}{\lambda(2\alpha+1)}} \psi(I_1, I_2), \quad I_1 = \frac{x}{y}, \quad I_2 = \frac{y}{t^{1/\lambda}}$$

($u = l - l_0$ — толщина слоя нелинейно-вязкой жидкости, ψ — искомая функция, зависящая от инвариантов I_1 и I_2).

С помощью инвариантного решения (2) найдем точное решение задачи пространственного растекания жидкости, сосредоточенной в исходный момент времени в начале координат $O(0, 0)$, по ложу $l_0 = (x^2/y^2 + C)/y^2$ ($C = \text{const}$). Примем в (2) $\lambda = 5\alpha + 3$ и добавим в правую часть уравнения (1) функцию

$$(3) \quad F = t^{-\frac{5(\alpha+1)}{5\alpha+3}} f_0(I_1, I_2)$$

($f_0(I_1, I_2)$ — произвольная функция).

Для замыкания системы уравнений запишем начальное и граничные условия

$$(4) \quad t = 0: \Omega_1(t) \rightarrow 0;$$

$$(5) \quad r \rightarrow 0: l = l_0 + t^{-\frac{2}{5\alpha+3}} \Phi(t, \varphi);$$

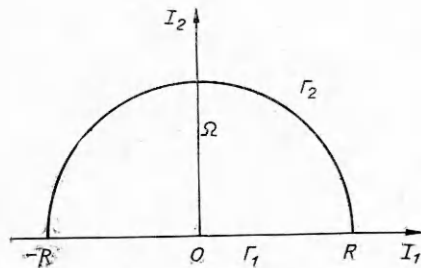
$$(6) \quad (l - l_0)|_\Gamma = 0;$$

$$(7) \quad Q|_\Gamma = Q_0 = 0,$$

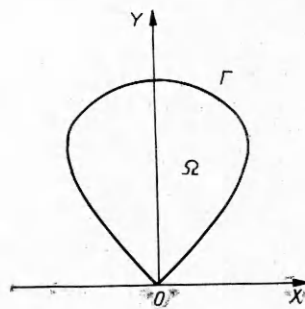
где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\varphi = \text{arctg}(x/y)$; $\Phi(t, \varphi)$ — произвольная, задаваемая функция; Q — поток массы жидкости; $\Omega_1(t)$ — область расчета; Γ — граница области. Подставляя (2), (3) в (1), получим дифференциальное урав-

Таблица 1

Однопараметрические оптимальные под- алгебры	Инварианты	Инвариантные решения II ранга	Вид локка
$\langle \lambda X_4 + X_5 \rangle$	$I_1 = \frac{x}{y}, I_2 = \frac{y^\lambda}{t}, I_3 = \frac{t}{\lambda(2\alpha+1)u^{\alpha+1-\lambda}}$	а) $u = t^{\frac{\alpha+1-\lambda}{\lambda(2\alpha+1)}} \psi(I_1, I_2)$	а) $l_3 = C + y^{\frac{\alpha+1-\lambda}{2\alpha+1}} f(I_1)$
$\forall \lambda$	$I_4 = \frac{1-2\lambda}{u^{\alpha+1-\lambda}v}, I_5 = \frac{v}{w}$	б) $u = t^{\frac{\alpha+1-\lambda}{\lambda(2\alpha+1)}} \psi\left(\frac{v^\lambda}{t}\right)$	б) $l_0 = Cr^{\frac{\alpha+1-\lambda}{2\alpha+1}},$ $C = \text{const}$
$\langle \sin \beta X_1 + \cos \beta X_2 \rangle$	$I_1 = x \cos \beta - y \sin \beta, I_2 = t,$	$u = \psi(I_1, I_2)$	$l_0 = \text{const}$
$\forall \beta$	$I_3 = u, I_4 = v, I_5 = w$		
$\langle X_3 \rangle$	$I_1 = x, I_2 = y, I_3 = u, I_4 = v, I_5 = w$	$u = \psi(I_1, I_2)$	l_0 — произвольный
$\langle \sin \beta X_1 + \cos \beta X_2 + \gamma X_4 \rangle$	$I_1 = x \cos \beta - y \sin \beta, I_2 = \gamma y - \cos \beta \ln t,$	$u = t^{-\frac{1}{2\alpha+1}} \psi(I_1, I_2)$	$l_0 = \text{const}$
$\gamma \neq 0$	$I_3 = tu^{2\alpha+1}, I_4 = \frac{u^2}{v}, I_5 = \frac{v}{w}$		



Р и с. 1



Р и с. 2

нение для определения функции $\psi(I_1, I_2)$, в котором независимых переменных на единицу меньше:

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial I_1} \left\{ \psi^{\alpha+2} \left[\left(\frac{1}{I_2} \frac{\partial \psi}{\partial I_1} + \frac{2I_1}{I_2^3} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial I_2} - \frac{I_1}{I_2} \frac{\partial \psi}{\partial I_1} - \frac{2(C + 2I_1^2)}{I_2^3} \right)^2 \right]^{\frac{\alpha-1}{2}} \times \right. \\ \left. \times \left[\left(\frac{1}{I_2} \frac{\partial \psi}{\partial I_1} + \frac{2I_1}{I_2^3} \right) - I_1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial I_2} - \frac{I_1}{I_2} \frac{\partial \psi}{\partial I_1} - \frac{2(C + 2I_1^2)}{I_2^3} \right) \right] \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial I_2} \left\{ \psi^{\alpha+2} \left[\left(\frac{1}{I_2} \frac{\partial \psi}{\partial I_1} + \frac{2I_1}{I_2^3} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial I_2} - \frac{I_1}{I_2} \frac{\partial \psi}{\partial I_1} - \frac{2(C + 2I_1^2)}{I_2^3} \right)^2 \right]^{\frac{\alpha-1}{2}} \times \right. \\ \left. \times \left[I_2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial I_2} - \frac{I_1}{I_2} \frac{\partial \psi}{\partial I_1} - \frac{2(C + 2I_1^2)}{I_2^3} \right) \right] + \frac{I_2 \psi}{3 + 5\alpha} \right\} = -I_2 f_0.$$

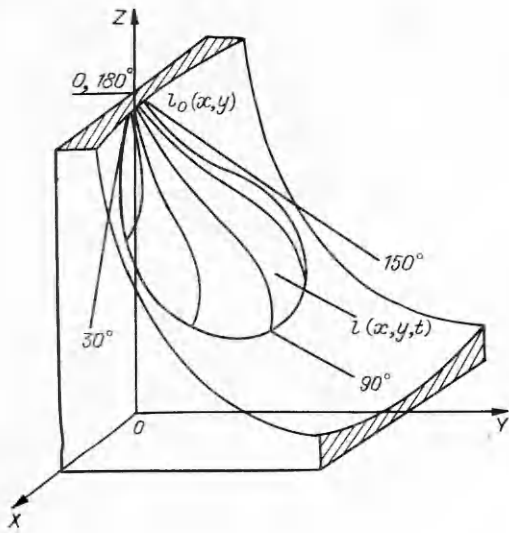
Таким образом, при решении задач о растекании жидкости необходимо задавать границу области расчета Γ и два граничных условия (6), (7). Но в силу того что уравнение (8) нелинейно и не известна граница Γ , выберем иной подход к решению поставленной задачи (1), (3)–(7). Зададим в инвариантных переменных область расчета $\Omega_2 = \Omega + \Gamma_1 + \Gamma_2$ (рис. 1), где Ω — внутренняя часть полукруга $I_1^2 + I_2^2 = R^2$; Γ_1, Γ_2 — границы области. Тогда, имея область расчета, достаточно указать лишь одно условие на Γ_2 . В переменных I_1, I_2 это условие, а также условие в нуле (5) примут вид

$$(9) \quad \psi|_{\Gamma_1} = \psi_0(I_1), \quad \psi|_{\Gamma_2} = 0.$$

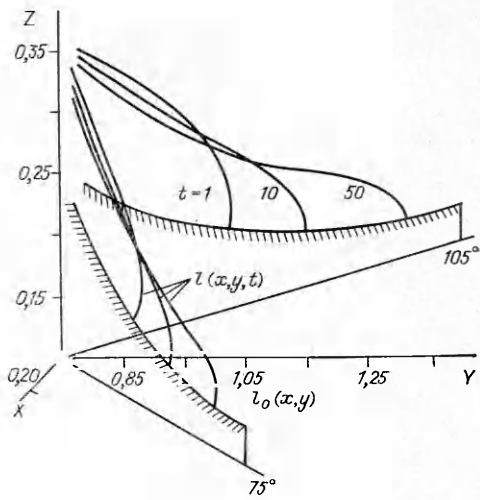
Далее, найдем решение задачи (8), (9). По нему восстановим вид решения для задачи (1), (3)–(7) в области $\Omega_1 = \Omega + \Gamma + O(0, 0)$ (рис. 2), в кото-

Т а б л и ц а 2

r	φ°					
	15, 175	30, 150	45, 135	60, 120	75, 105	90
$\psi(r, \varphi)$						
0	1,2732	1,2732	1,2732	1,2732	1,2732	1,2732
0,1	1,0957	1,0953	1,0951	1,0951	1,0953	1,0955
0,2	0,7744	0,7744	0,7744	0,7721	0,7735	0,7744
0,3	0,5227	0,5211	0,5195	0,5192	0,5202	0,5209
0,4	0,3591	0,3576	0,3564	0,3563	0,3569	0,3573
0,5	0,2554	0,2544	0,2538	0,2539	0,2543	0,2545
0,6	0,1885	0,1879	0,1877	0,1878	0,1881	0,1882
0,7	0,1439	0,1436	0,1435	0,1437	0,1438	0,1438
0,8	0,1131	0,1128	0,1128	0,1131	0,1132	0,1132
0,9	0,0915	0,0910	0,0910	0,0924	0,0954	0,0972
1,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000



Р и с. 3

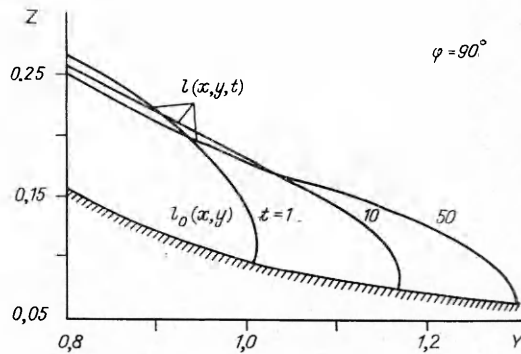


Р и с. 4

рую перейдет Ω_2 , и определим поток массы жидкости на границе Γ следующим образом:

$$q_x = \left\{ \frac{\partial l}{\partial x} (l - l_0)^{\alpha+2} \times \left[\sqrt{\left(\frac{\partial l}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial l}{\partial y} \right)^2} \right]^{\alpha-1} \right\}_{\Gamma},$$

$$q_y = \left\{ \frac{\partial l}{\partial y} (l - l_0)^{\alpha+2} \times \left[\sqrt{\left(\frac{\partial l}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial l}{\partial y} \right)^2} \right]^{\alpha-1} \right\}_{\Gamma}$$



Р и с. 5

(q_x — поток массы жидкости в направлении оси OX , q_y — в направлении оси OY). Таков один из возможных путей решения модельной задачи (1), (3)—(7).

4. Разностная схема и численное решение. В силу нелинейности уравнения (8), задача (8), (9) решена численно с помощью способа, предложенного в [6]. Построена разностная схема второго порядка точности на основе сумматорного тождества. Для ее численной реализации применен двухступенчатый итерационный процесс с сеточным оператором Лапласа на верхнем слое. Обращение оператора Лапласа проведено методом переменных направлений.

При решении задачи (8), (9) в качестве исходных данных для функции ψ использовали внутри области Ω и на границе Γ_1 аналог дельта-функции Дирака в форме

$$\psi(r, \varphi) = \beta/\pi(\beta^2 r^2 + 1), \quad \beta = 4, \quad \forall \varphi, \quad \alpha = 2,5.$$

Через 200 итераций получили решение, представленное в табл. 2. Относительная погрешность составила 0,03 %.

Общий вид двумерного растекания жидкости по ложу $l_0 = (x^2/y^2 + 0,1)/y^2$, а также профиль поверхности при сечениях 75°, 90°, 105° приведены на рис. 3—5. Причем при подсчете потока массы жидкости на границе Γ по найденному решению оказалось, что поток равен нулю с точностью до пятого знака, что свидетельствует о хорошем выборе области расчета Ω_2 для поставленной задачи (1), (3)—(7).

Форму поверхности жидкости и координаты на любой момент времени можно определить из (2):

$$(10) \quad \begin{aligned} x &= yr \cos \varphi, \quad r \in [0, 1], \quad \varphi \in [0, \pi], \\ y &= \frac{1}{t^{5\alpha+3}} r \sin \varphi, \quad l = l_0 + t^{-\frac{2}{5\alpha+3}} \psi(r, \varphi) \end{aligned}$$

(r, φ, ψ указаны в табл. 2). Из вида решения (10) и рис. 4, 5 имеем, что со временем край нелинейно-вязкой жидкости наступает вперед, толщина ее уменьшается, т. е. наблюдается пространственное растекание.

Полученное автомоделное решение отражает качественные закономерности течения и может служить обоснованием при разработке численных методов решения задач реального пространственного растекания нелинейно-вязкой жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян С. С., Шумский П. А. Простейшая математическая модель трехмерного нестационарного ледника // Науч. тр./Ин-т механики МГУ.— 1975.— № 42.
2. Саламатин А. Н. Анализ простейших математических моделей куполовидных ледников // Исследования по прикладной математике.— Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1979.— Вып. 7.
3. Ахмедова Ф. Х., Чугунов В. А. Групповые свойства и инвариантные решения уравнения, описывающего двумерное течение ледников // ПМТФ.— 1987.— № 1.
4. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.
5. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике.— М.: Наука, 1983.
6. Карчевский М. М., Ляшко А. Д. Разностные схемы для нелинейных задач математической физики. Ч. 1. Квазилинейные эллиптические уравнения.— Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1976.

г. Набережные Челны

Поступила 14/VI 1989 г.

УДК 532.5

Ю. А. Березин, В. П. Жуков

КОНВЕКЦИЯ В СРЕДЕ СО СПИРАЛЬНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ

В [1] нами подробно изучена линейная стадия конвективной неустойчивости крупномасштабных возмущений при наличии гиротропной или спиральной турбулентности на основе уравнений [2]. Было показано, что с увеличением спиральности горизонтальный размер конвективных ячеек возрастает и при достижении критической спиральности происходит полная перестройка течения с образованием вихря, размер которого определяется горизонтальной неоднородностью задачи.

Проведем теперь в рамках уравнений [1, 2] исследование нелинейной стадии конвективной неустойчивости. Исходные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{u} / \partial t + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} &= (-1/\rho_0) \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \beta g \theta \mathbf{e} + \beta g A \mathbf{f}, \\ \partial \theta / \partial t + (\mathbf{u} \nabla) \theta &= A(\mathbf{e} \mathbf{u}) + \chi \Delta \theta, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{f} &= \mathbf{e}(\mathbf{e} \operatorname{rot} \lambda \mathbf{u}) - (\mathbf{e} \nabla)[\mathbf{e} \cdot \lambda \mathbf{u}], \quad \mathbf{e} = (0, 0, 1), \end{aligned}$$

где $\lambda = \lambda_0 \alpha(r, z)$ — коэффициент спиральности; $\lambda_0 = \text{const}$; остальные обозначения совпадают с [1]. В безразмерных переменных получим

$$(1) \quad \begin{aligned} \partial \mathbf{u} / \partial t + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \Delta \mathbf{u} + \text{Ra} \theta \mathbf{e} + \mathbf{f}, \\ \partial \theta / \partial t + (\mathbf{u} \nabla) \theta &= (\mathbf{e} \mathbf{u}) + \Delta \theta, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{f} &= \mathbf{e}(\mathbf{e} \operatorname{rot} \alpha \mathbf{u}) - (\mathbf{e} \nabla)[\mathbf{e} \cdot \alpha \mathbf{u}]. \end{aligned}$$