

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Юхвид, Э. И. Максимов и др. ФГВ, 1973, 9, 2.
2. П. Ф. Похил, А. Ф. Беляев и др. Горение порошкообразных металлов в активных средах. М., «Наука», 1972.
3. В. К. Боболев, А. П. Глазкова, С. Е. Зенин. ПМТФ, 1964, 3.
4. Андерсен, Рейхенбах. РТК, 1968, 2.
5. Б. Б. Серков, Э. И. Максимов, А. Г. Мержанов. ФГВ, 1968, 4, 4.
6. Н. И. Бахман, А. Ф. Беляев. Горение гетерогенных конденсированных систем. М., «Наука», 1967.
7. Ю. М. Максимов, Э. И. Максимов. ФГВ, 1972, 8, 4.
8. Н. И. Гельперин, В. Г. Айнштейн, Б. Г. Кваша. Основы техники псевдооживления. М., «Химия», 1967.
9. С. С. Забродский. Гидродинамика и теплообмен в псевдооживленном слое. М., Госэнергоиздат, 1963.
10. Г. Б. Манелис, Ю. И. Рубцов. ЖФХ, 1966, 4.
11. А. Г. Мержанов, Ф. И. Дубовицкий. Докл. АН СССР, 1959, 129, 153.
12. А. Ф. Беляев. ЖФХ, 1938, 12, 94.
13. Я. Б. Зельдович. ЖЭТФ, 1942, 12, 498.

УДК 536.46

АВТОМОДЕЛЬНЫЙ РЕЖИМ ГОРЕНИЯ ПОРОХА С ПЕРЕМЕННЫМИ ОПТИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

Ю. А. Гостинцев, И. Г. Ассовский

(Москва)

1. В пределах феноменологической теории нестационарное горение пороха под действием поглощаемого в конденсированной фазе (к-фаза) монохроматического излучения и переменного давления описывается системой уравнений [1]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - u \frac{\partial T}{\partial x} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\gamma I}{\rho c} \exp(-\gamma x), \quad (0 \leq x < \infty), \quad (1)$$

$$u = u(p, \varphi), \quad T = T_s(p, \varphi) \quad \text{при } x=0, \quad T = T_0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty,$$

$$I = I(t), \quad p = p(t), \quad \varphi = (\partial T / \partial x)_{x=0},$$

где I и γ — интенсивность и коэффициент поглощения излучения. В (1) вид зависимостей $u(p, \varphi)$, $T_s(p, \varphi)$ предполагается тем же, что и при горении без облучения. Такое допущение оправдано в случае тонкой зоны химических превращений к к-фазе и отсутствия фотохимических реакций в ней.

Исследование (1) при $I=0$, проведенное в [2, 3], показало, что в пренебрежении действием теплового излучения существует автомоделный режим распространения температурной волны к к-фазе, определяемый падением скорости горения и давления во времени по закону $u \sim t^{-1/2}$, $p \sim t^{-1/2}$ ($v = (\partial \ln u / \partial \ln p)_t$ — показатель степени в законе горения).

Полный анализ (1) с учетом поглощения теплового излучения показывает, что при совместном действии переменных во времени давления и интенсивности радиации также имеется автомоделное решение, если коэффициент поглощения γ пропорционален мощности потока $\gamma \sim I$ (чем больше световой поток, тем непрозрачнее порох и тем меньше расстояние, на котором поглощается излучение). В самом деле, пусть

$u = \beta t^{-1/2}$, $I = \delta t^{-1/2}$, $\gamma = \alpha t^{-1/2}$. Тогда в безразмерных переменных

$$\vartheta = \frac{T - T_0}{T_s - T_0}, \quad \eta = \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}, \quad \alpha_0 = \alpha\sqrt{\kappa}, \quad \beta_0 = \frac{\beta}{\sqrt{\kappa}},$$

$$\xi_0 = \frac{\delta}{\rho c \sqrt{\kappa} (T_s^0 - T_0)}$$

уравнение теплопроводности из (1) примет вид

$$\frac{d^2\vartheta}{d\eta^2} + 2\frac{d\vartheta}{d\eta}(\beta_0 + \eta) = -2\alpha_0\delta_0 \exp(-\alpha_0\eta) \quad (2)$$

с граничными условиями

$$\vartheta = 1, \quad \eta = 0, \quad \vartheta \rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow \infty \quad (3)$$

(для простоты в дальнейшем принята постоянная температура на поверхности разложения). Введем новую функцию $\vartheta^{(1)}$ в соответствии с

$$\vartheta = \vartheta_0 - 2\alpha_0\delta_0\vartheta^{(1)} \exp \alpha_0 \beta_0, \quad (4)$$

где ϑ_0 — решение соответствующего (2) однородного уравнения с граничными условиями (3). Тогда для $\vartheta^{(1)}$ имеем

$$\frac{d^2\vartheta^{(1)}}{dy^2} + 2y\frac{d\vartheta^{(1)}}{dy} = \exp(-\alpha_0 y), \quad \vartheta^{(1)}(\beta_0) = \vartheta^{(1)}(\infty) = 0 \quad (y = \beta_0 + \eta).$$

Используя далее зависимость $\vartheta^{(1)} = f \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right)$, получим

$$\frac{d^2f}{dy^2} - f(1 + y^2) = \exp\left(\frac{1}{2}y^2 - \alpha_0 y\right), \quad (5)$$

$$f(\beta_0) = f(\infty) = 0.$$

Однородная задача для (5) не имеет нетривиальных решений, следовательно, ее общее решение определяется с помощью одной только функции Грина

$$f = \int_{\beta_0}^{\infty} \Gamma(y, \xi) \exp\left(-\alpha_0 \xi + \frac{1}{2}\xi^2\right) d\xi,$$

которая для данной задачи имеет вид [4]

$$\Gamma(y, \xi) = \begin{cases} -\frac{M(\beta, y)}{M(\beta, \infty)} M(\xi, \infty) \exp \frac{1}{2}(y^2 + \xi^2), & y \leq \xi \\ -\frac{M(\beta, \xi)}{M(\beta, \infty)} M(y, \infty) \exp \frac{1}{2}(y^2 + \xi^2), & y \geq \xi, \end{cases} \quad (6)$$

где $M(u, v) = \int_u^v \exp(-t^2) dt$. Выполняя обычное преобразование, получим

$$f = -\frac{M(y, \infty)}{M(\beta, \infty)} e^{\frac{1}{2}y^2} \int_{\beta_0}^y f(\xi) M(\beta_0, \xi) e^{\frac{1}{2}\xi^2} d\xi - \int_y^{\infty} \frac{M(\beta_0, y)}{M(\beta_0, \infty)} \times M(\xi, \infty) \times$$

$$\times f(\xi) \exp \frac{1}{2}(y^2 + \xi^2) d\xi.$$

После перехода к первоначальным безразмерным переменным, с учетом того, что $\vartheta_0 = \operatorname{erfc}(\eta_0 + \beta_0) / \operatorname{erfc} \beta_0$ (решение для ϑ_0 получено в [3]),

найдем окончательное выражение для автомодельного решения задачи (1) о распределении температуры в к-фазе в виде

$$\vartheta = \frac{\operatorname{erfc}(\eta + \beta_0)}{\operatorname{erfc} \beta_0} + \alpha_0 \delta_0 e^{\alpha_0 \beta_0} \sqrt{\pi} \frac{\operatorname{erfc}(\eta + \beta_0)}{\operatorname{erfc} \beta_0} \int_{\beta_0}^{\beta_0 + \eta} e^{\xi^2 - \alpha_0 \xi} (\operatorname{erfc} \beta_0 - \operatorname{erfc} \xi) d\xi + \left(1 - \frac{\operatorname{erfc}(\beta_0 + \eta)}{\operatorname{erfc} \beta_0}\right) \int_{\beta_0 + \eta}^{\infty} \operatorname{erfc} \xi \exp(\xi^2 - \alpha_0 \xi) d\xi. \quad (7)$$

Дифференцируя (7), найдем градиент температуры у поверхности

$$\varphi = \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = - \frac{T_s^0 - T_0}{\sqrt{\kappa \pi t}} \frac{\exp(-\beta_0^2)}{\operatorname{erfc} \beta_0} \left\{ 1 - \alpha_0 \delta_0 e^{\alpha_0 \beta_0} \sqrt{\pi} \int_{\beta_0}^{\infty} \operatorname{erfc} \xi \exp(\xi^2 - \alpha_0 \xi) d\xi \right\}. \quad (8)$$

Теперь встает вопрос о согласовании величин α_0 , δ_0 и β_0 на основании уравнения для скорости горения. Принимая экспоненциальную зависимость стационарной скорости от начальной температуры [2]

$$u = u_1 p^v \exp \tilde{\beta} T_0$$

и выполняя обычный в феноменологической теории градиентный пересчет, будем иметь для нестационарных процессов выражение

$$u = u_1 p^v \exp \tilde{\beta} \left(T_s^0 + \frac{\varphi \kappa}{u} \right).$$

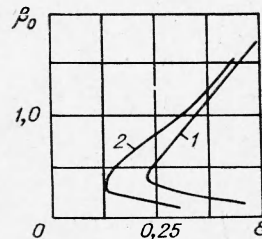
Так как $u \sim t^{-1/2}$, то видно, что автомодельный режим горения при действии заданного светового излучения ($I \sim t^{-1/2}$) на порох с переменным коэффициентом поглощения ($\gamma \sim I$) реализуется только при падении давления по закону $p = \epsilon t^{-1/2}$. При этом тепловая радиация не меняет характера зависимости скорости горения и давления от времени в автомодельном режиме по сравнению с таковыми в отсутствие излучения, но существенно изменяет распределение температуры в к-фазе и амплитуду отклика скорости горения (коэффициент) на возмущения внешних параметров. Из закона нестационарной скорости горения в (8) следует соотношение

$$\beta_0 = A \epsilon^v \exp k \left\{ 1 - \frac{\exp(-\beta_0^2)}{\sqrt{\pi} \beta_0 \operatorname{erfc} \beta_0} \left[1 - \alpha_0 \delta_0 e^{\alpha_0 \beta_0} \sqrt{\pi} \int_{\beta_0}^{\infty} \operatorname{erfc} \xi \times \exp(\xi^2 - \alpha_0 \xi) d\xi \right] \right\},$$

$$\text{где } A = u_1 \kappa^{-1/2} \exp \tilde{\beta} T_0, \quad k = \tilde{\beta} (T_s^0 - T_0). \quad (9)$$

Если светового потока нет ($I=0$), выражение (9) вырождается в рассмотренный в [2, 3] режим, причем, как и там, решение неоднозначно: заданным скоростям сброса давления и интенсивности излучения соответствуют два значения скорости горения.

По аналогии с [3], где проведен анализ устойчивости обеих ветвей кривой $\beta_0(\epsilon)$, вероятно, можно утверждать, что и в данной ситуации устойчивой будет верхняя ветвь, соответствующая большей скорости горения, большему значению градиента температуры на поверхности к-фазы. Для иллюстрации сказанного выше



на рисунке приведены результаты численного счета (9) при значениях параметров $A=4$, $k=0,80$, $\nu=1,0$, $\alpha_0=1,0$ (для кривой 1 — $\delta_0=0$ и излучения нет, для кривой 2 — $\delta_0=1$).

2. Найдем теперь автомодельное решение, отвечающее изменению скорости горения вида

$$u(t) = A \sqrt{x/t}, \quad (10)$$

в случае горения пороха с переменной температурой поверхности.

Для этой цели используем интегральное соотношение между скоростью горения, температурой поверхности, градиентом температуры φ и потоком облучения I

$$\begin{aligned} T_s - T_0 = & \int_0^\infty (T(x, 0) - T_0) \exp \left[-\frac{(U(0, t) - x)^2}{4\kappa t} \right] \frac{dx}{\sqrt{\pi\kappa t}} + \int_0^t \exp \times \\ & \times \left[-\frac{U^2(t', t)}{4\kappa(t-t')} \right] \left[\frac{\kappa\varphi(t')}{T_s - T_0} - u(t') + \frac{U(t', t)}{2(t-t')} \right] \frac{(T_s - T_0) dt'}{\sqrt{\pi\kappa(t-t')}} + \\ & + \int_0^t \frac{I\gamma(t')}{\rho c} \exp[\gamma^2\kappa(t-t') - \gamma U(t', t)] \left[1 - \operatorname{erf} \left(\gamma \sqrt{\kappa(t-t')} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{U(t', t)}{2\sqrt{\kappa(t-t')}} \right) \right] dt', \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$U(t', t) = \int_{t'}^t u dt''. \quad (12)$$

(Вывод этого уравнения будет опубликован в ФГВ, № 6, 1973 г.)

Будем предполагать, что изменение градиента $\varphi(t)$ связано с изменением температуры поверхности пороха соотношением

$$\varphi(t) = (T_s(t) - T_0) \frac{B}{\sqrt{\kappa t}}, \quad (13)$$

в то время как температура поверхности T_s меняется со временем по степенному закону

$$T_s(t) = T_0 + Ct^{-n}. \quad (14)$$

Изменения светового потока $I(t)$ и показателя прозрачности $\gamma(t)$, при которых осуществляется режим горения (10) будем искать в виде

$$I(t) = D \frac{t^{-n}}{\sqrt{t}} \rho c \sqrt{\kappa}, \quad \gamma(t) = G/\sqrt{\kappa t}. \quad (15)$$

Подставляя (10), (13)—(15) в уравнение (11) и пренебрегая влиянием начального распределения $T(x, 0)$, получим соотношение между постоянными коэффициентами $A - G$.

$$\begin{aligned} 1 = & \int_0^1 \eta^{-n} \left[B - A + \frac{A\sqrt{\eta}}{1 + \sqrt{\eta}} \right] \exp \left(-A^2 \frac{1 - \sqrt{\eta}}{1 + \sqrt{\eta}} \right) \frac{d\eta}{\sqrt{\pi\eta(1-\eta)}} + \\ & + \int_0^1 \frac{DG}{C} \eta^{-n} \exp \left[G^2 \frac{1-\eta}{\eta} - 2GA \frac{1-\sqrt{\eta}}{\sqrt{\eta}} \right] \left[1 - \operatorname{erf} \left(G \sqrt{\frac{1-\eta}{\eta}} - \right. \right. \\ & \left. \left. - A \frac{1-\sqrt{\eta}}{\sqrt{1-\eta}} \right) \right] \frac{d\eta}{\eta}. \end{aligned} \quad (16)$$

Требование сходимости интегралов в (16) накладывает ограничение на показатель n

$$n < 1/2. \quad (17)$$

При $n=0$ соотношение (16) согласуется с соотношением (8). В случае отсутствия облучения ($I=0$) или абсолютно прозрачного пороха ($G=0$) выражение (16) совпадает с полученным в работе [3]. Кроме соотношения (16) коэффициенты A и C должны удовлетворять еще двум соотношениям, вытекающим из законов горения

$$u = u(p, \varphi), \quad T_s = T_s(p, \varphi). \quad (18)$$

Четвертым условием может быть зависимость показателя прозрачности γ от потока I . Однако изменение γ может и не зависеть от потока I , а определяться, например, изменением со временем частоты излучения. Соотношения (18) обычно имеют вид

$$u = f_1(p) f_2\left(T_s - \frac{\varphi}{u}\right), \quad T_s - T_0 = f_3\left(p, T_s - \frac{\varphi}{u}\right). \quad (19)$$

Подставляя (10), (13)–(15) в (19), получим условия на коэффициенты

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{t/\kappa} f_1(p) f_2[T_0 + Ct^{-n}(1 - B/A)], \\ C &= t^n f_3[p, T_0 + Ct^{-n}(1 - B/A)]. \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом, для того чтобы существовало автомодельное решение, необходимо, чтобы функции f_1 , f_2 и f_3 были определенного вида (при котором соотношения (20) не зависели бы от времени). В случае постоянной температуры поверхности ограничений на вид функций f_1 и f_2 нет. При этом для существования автомодельного решения лишь требуется, чтобы давление изменялось со временем по закону

$$p(t) \sim f_1^{-1}(1/\sqrt{t}),$$

где f_1^{-1} — функция, обратная f_1 . При переменной температуре поверхности закон изменения часто представляют в форме $T_s = T_s(u)$, которая приближенно может быть записана в виде [3]:

$$u = F(T_s - T_0)^m. \quad (21)$$

Подставляя (10), (14) в (21), получим соотношения между коэффициентами A , C и F и показателями m и n , которые должны выполняться для существования автомодельного решения

$$A = F \cdot C^m, \quad n = \frac{1}{2m}. \quad (22)$$

Обычно $m \gg 1$, поэтому условие (17) выполняется. При этом температура поверхности с течением времени убывает (аналогично тому, как и в отсутствии облучения [3]). Изменение давления, необходимое для существования режима горения (10), в этом случае определяется выражением

$$p(t) \sim f_1^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{t}} f_2\left(T_0 + \left(1 - \frac{B}{A}\right) Ct^{-n}\right)\right].$$

Полученное здесь в пределах феноменологической модели автомодельное решение пополняет весьма ограниченный класс аналитических решений [2, 3, 5] нелинейной задачи о нестационарном горении порохов при переменных внешних условиях и может быть использовано как для качественного описания процессов при воздействии излучения

