

УДК 519.642.5

Численное решение обратной граничной задачи теплопроводности с помощью уравнений Вольтерра I рода*

С.В. Солодуша¹, Н.М. Япарова²

¹Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева Сибирского отделения Российской академии наук, ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033

²Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), просп. Ленина, 76, Челябинск, 454080

E-mails: solodusha@isem.sei.irk.ru (Солодуша С.В.), ddjy@math.susu.ac.ru (Япарова Н.М.)

Солодуша С.В., Япарова Н.М. Численное решение обратной граничной задачи теплопроводности с помощью уравнений Вольтерра I рода // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2015. — Т. 18, № 3. — С. 327–335.

Рассмотрена одна обратная граничная задача теплопроводности. Для ее решения используется подход, основанный на преобразовании Лапласа, который позволяет свести исходную задачу к решению уравнений Вольтерра I рода. Для численного решения соответствующих интегральных уравнений разработаны алгоритмы, базирующиеся на применении метода интегрирования произведения и квадратуры средних прямоугольников. С целью проверки эффективности численных методов проведены серии тестовых расчетов.

DOI: 10.15372/SJNM20150307

Ключевые слова: *интегральные уравнения Вольтерра, численное решение, метод интегрирования произведения.*

Solodusha S.V., Yaparova N.M. A numerical solution of an inverse boundary value problem of heat conduction using the Volterra equations of the first kind // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2015. — Vol. 18, № 3. — P. 327–335.

We consider an inverse boundary value problem of heat conduction. To solve it, we propose a new approach based on the Laplace transform. This approach allows us to confine the original problem to solving the Volterra equations of the first kind. We have developed algorithms of the numerical solution to the resulting integral equations. The algorithms developed are based on the application of the product integration method and the quadrature of middle rectangles. A series of test calculations were performed to test the efficiency of the numerical methods.

Keywords: *Volterra integral equations, numerical solution, product integration method.*

Введение

В прикладных задачах, связанных с исследованием нестационарных тепловых процессов, довольно часто возникает ситуация, когда невозможно осуществить прямые измерения требуемой физической величины и ее характеристики восстанавливаются по результатам косвенных измерений. При этом единственный путь отыскания требуемых значений связан с решением обратной задачи теплопроводности с исходными данными, известными только на части границы. Подобного рода задачи возникают не только при

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-01425а).

исследовании тепловых процессов, но и при исследовании процессов диффузии и изучении свойств материалов, связанных с тепловыми характеристиками [1–3]. Так же многие задачи из области нанотехнологий, метрологии, оптимального управления сводятся к решению обратных граничных задач [4–6].

В статье исследуется уравнение Вольтерра I рода, полученное в работе [7] в результате применения интегральных преобразований Лапласа для решения уравнения теплопроводности. Решение уравнений Вольтерра вызывает большой интерес у исследователей. Для примера приведем монографию [8], где дана обширная библиография. Разработке специальных регуляризирующих алгоритмов, учитывающих специфику интегральных уравнений Вольтерра I рода, также посвящены работы Н.А. Магницкого [9], А.М. Денисова [10], В.В. Васина [11], М.М. Лаврентьева и его школы [12, 13].

Практическая реализация регуляризирующего алгоритма решения интегрального уравнения I рода вольтерровского типа связана с применением процедуры дискретизации исходного уравнения. При этом эффект перехода от исходного уравнения к регуляризованному может быть полностью потерян. Одна из причин такой потери может быть обусловлена неустойчивостью разностной схемы. В данной статье используются устойчивые разностные методы, в которых в качестве параметра регуляризации выступает шаг дискретизации. Саморегуляризирующий эффект численных методов решения уравнений Вольтерра I рода впервые был обоснован в работе А.С. Апарцина и А.Б. Бакушинского [14] и изучался в дальнейшем в трудах многих авторов, например [15, 16].

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу:

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in (0, 1), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

с краевыми условиями:

$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0, \quad (2)$$

$$u_x(0, t) = g(t), \quad x \in (0, 1), \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Требуется найти граничное значение функции

$$u(1, t) = \phi(t), \quad t \geq 0. \quad (4)$$

Пусть $g \in C_{[0, T]}^{2+\eta}$ при всех $T > 0$, $\eta \in (0, 1)$, и существуют константы $M > 0$, $m \geq 0$ такие, что $|g(t)| \leq Me^{mt}$ для $t \in [0, T]$ при всех $T > 0$. Известно, что при $g(t) = g_0(t)$ существует точное решение $u(1, t) = \phi_0(t)$. Рассмотрим случай, когда вместо $g_0(t)$ нам известны некоторые приближения $g_\delta(t)$ и уровень погрешности $\delta > 0$ так, что

$$\|g_\delta - g_0\|_C \leq \delta, \quad u_x(0, t) = g_\delta(t), \quad x \in (0, 1), \quad t \geq 0. \quad (5)$$

Единственность решения задачи (1)–(3) доказана в работе [12].

Поиск численного решения (4) обратной граничной задачи (1), (2), (5) выполняем с помощью подхода, предложенного в [7] и основанного на применении прямого и обратного преобразований Лапласа. Для этого предполагаем, что существуют константы $C > 0$ и $\beta_0 \geq 0$ такие, что $\forall x \in [0, 1]$, $t \in [0, \infty)$ имеет место $|u(x, t)| \leq Ce^{\beta_0 t}$, причем $\phi(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле $\forall t \in [0, T]$ при всех $T > 0$. В [7] показано, что аппроксимация (4) может быть получена из интегрального уравнения Вольтерра типа свертки

$$A\phi = 2 \int_0^t \pi^2 \sum_{p=1}^N (-1)^{p+1} p^2 e^{-\pi^2 p^2 (t-s)} \phi(s) ds = g_0(t), \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \quad (6)$$

где N — некоторое фиксированное натуральное число. Основная цель работы — показать применимость метода квадратурных сумм для приближенного решения (6).

2. Алгоритм численного решения уравнения (6)

Рассмотрим задачу приближенного решения (6). Представим уравнение (6) в эквивалентном виде

$$A\phi = \int_0^t K_N(t-s)\phi(s) ds = y(t), \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \quad (7)$$

где

$$K_N(t-s) = \pi^2 \sum_{p=1}^N (-1)^{p+1} p^2 e^{-\pi^2 p^2 (t-s)}, \quad y(t) = \frac{1}{2} g_0(t). \quad (8)$$

Как хорошо известно [17], уравнение Вольтерра I рода является частным случаем уравнения Фредгольма, в котором ядро обращается в нуль на треугольнике $0 \leq t < s \leq T$, а на диагонали $t = s$ имеет разрыв первого рода. Для устойчивого приближенного решения (7), (8), вообще говоря, можно использовать стандартные методы регуляризации некорректных задач, например [18]. С другой стороны, рассматриваемая задача относится к классу условно корректных задач, а сеточный аналог (7), (8) имеет единственное решение в силу $K_N(0) \neq 0$. Специфика ядер Вольтерра $K_N \in C_\Delta$, $\Delta = \{t, s \mid 0 \leq s \leq t \leq T\}$, при фиксированных значениях N проиллюстрирована в [19, табл. 1]. В ней указаны значения $K_N \neq 0$ на диагонали $t = s$, а также корни t^* уравнений $K_N(\lambda) = 0$, $N = \overline{10, 21}$, $\lambda = t - s$.

Таблица 1. Числовые характеристики ядер Вольтерра K_N

N	t^*	$K_N(0)$	N	t^*	$K_N(0)$
10	0.01378	-542.828	16	0.00913	-1342.266
11	0.01221	651.394	17	0.00631	1510.049
12	0.01173	-769.829	18	0.00809	-1687.702
13	0.01022	898.134	19	0.00516	1875.225
14	0.01019	-1036.308	20	0.00735	-2072.617
15	0.00789	1184.353	21	0.00429	2279.879

На рисунке дана характеристика зависимости t^* от величины N в ядре (8). График “линия 1” соответствует случаю, когда N четно, а график “линия 2” — когда N нечетно. Из рисунка видно, что с ростом N значение t^* убывает (при этом монотонность имеется только отдельно по четным и нечетным N). Значения t^* используем далее для ограничения величины шага сетки h сверху, чтобы значение сеточной функции K_N^h в первом узле было отличным от нуля. Из табл. 1 и рисунка

видно, что шаг сетки h зависит от параметра N , равного количеству слагаемых в (8).

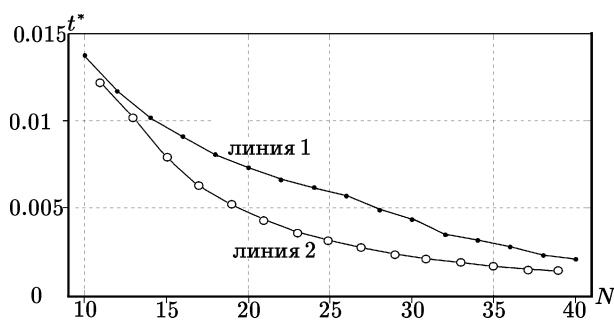


Рис. Зависимость t^* от числа слагаемых N в (8)

Введем равномерную сетку $t_i = ih$, $t_{i-\frac{1}{2}} = (i - \frac{1}{2})h$, $i = \overline{1, n}$, $nh = T$. Для достаточно малых значений h рассмотрим алгоритмы численного решения уравнения Вольтерра I рода (7), (8), основанные на саморегуляризирующем свойстве процедуры дискретизации [14, 20]. В качестве “базовых” методов используем метод средних прямоугольников и метод интегрирования произведения [21], который особенно эффективен в случаях, когда $K(t - s)$ — сильно осциллирующая функция. Критериями выбора указанных методов для численного решения уравнения (7), (8) стали простота реализации численной процедуры и возможность получения приближенного решения с погрешностью порядка $\mathcal{O}(h^2)$ при точно заданных исходных данных.

Решим (7), (8) с помощью метода средних прямоугольников. Аппроксимируем интеграл в (7) суммой. Для вычисления $\phi(t)$ в $(i - \frac{1}{2})$ -м узле сетки выпишем уравнение относительно $\phi^h(t_{i-\frac{1}{2}}) \equiv \phi_{i-\frac{1}{2}}^h$. Интересующую нас сеточную функцию, полученную с помощью метода средних прямоугольников, обозначим через $\check{\phi}_{i-\frac{1}{2}}^h$. Тогда решение задачи (7), (8) определяется следующим образом:

$$\check{\phi}_{i-\frac{1}{2}}^h = \frac{y_i^h - \pi^2 h \sum_{p=1}^N (-1)^{p+1} p^2 \sum_{j=1}^{i-1} e^{-\pi^2 p^2 h(i-j+\frac{1}{2})} \check{\phi}_{j-\frac{1}{2}}^h}{\pi^2 h \sum_{p=1}^N (-1)^{p+1} p^2 e^{-\frac{1}{2}\pi^2 p^2 h}}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (9)$$

Используя метод интегрирования произведения, переходим от (7), (8) к конструкции

$$\pi^2 \sum_{p=1}^N (-1)^{p+1} p^2 \sum_{j=1}^i \phi_{j-\frac{1}{2}}^h \int_{(j-1)h}^{jh} e^{-\pi^2 p^2 (ih-s)} ds = y_i^h, \quad i = \overline{1, n}. \quad (10)$$

Обозначив значения $\phi(t)$ в $(i - \frac{1}{2})$ -м узле сетки через $\hat{\phi}_{i-\frac{1}{2}}^h$, сгруппируем слагаемые в (10). Тогда приближенное решение (7), (8) определяется по следующей расчетной схеме:

$$\hat{\phi}_{i-\frac{1}{2}}^h = \frac{y_i^h - \pi^2 \sum_{p=1}^N (-1)^{p+1} p^2 \sum_{j=1}^{i-1} \hat{\phi}_{j-\frac{1}{2}}^h \int_{(j-1)h}^{jh} e^{-\pi^2 p^2 (ih-s)} ds}{\pi^2 \sum_{p=1}^N (-1)^{p+1} p^2 \int_{(i-1)h}^{ih} e^{-\pi^2 p^2 (ih-s)} ds}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (11)$$

3. Вычислительный эксперимент

Рассмотрим теперь вопрос о сходимости численных методов и об устойчивости каркаса приближенного решения $\phi_{i-\frac{1}{2}}^h$ к возмущениям исходных данных. Проведем вычислительные эксперименты для тестовых примеров. Выполним расчеты с одинарной точностью. При подсчете решений $\phi_{i-\frac{1}{2}}^h$ по (9) и (11) используем сеточный аналог

$$y(t) = \pi^2 \sum_{p=1}^N (-1)^{p+1} p^2 \int_0^t e^{-\pi^2 p^2 (t-s)} \bar{\phi}(s) ds, \quad (12)$$

где $\bar{\phi}(t)$ — некоторая тестовая функция. Зададим $N = 2, 4$. Для сравнения точности численных методов выберем единое значение N в формулах (9), (11), (12). Предварительно определим для заданных N корни t^* уравнения $K_N(t^*) = 0$: $K_2(0.0468) = 0$, $K_4(0.0292) = 0$. Значения h выбираем из условия $h < 2t^*$ так, чтобы в знаменателе (9) $K_N(\frac{h}{2}) \neq 0$.

Основные этапы вычислительного эксперимента, позволяющего оценить порядок сходимости численного метода, состояли в следующем:

- для модельной функции $\bar{\phi}(t)$ решаем задачу (7), (8) при фиксированных значениях N и точно заданной $y(t)$ методом средних прямоугольников по формуле (9);
- для модельной функции $\bar{\phi}(t)$ решаем задачу (7), (8) при фиксированных значениях N и точно заданной $y(t)$ с помощью метода интегрирования произведения по формуле (11);
- для $\check{\phi}_{i-\frac{1}{2}}^h$ вычисляем величину погрешности $\|\varepsilon_1^h\|_{C_h} = \max_{1 \leq i \leq n} |\bar{\phi}_{i-\frac{1}{2}} - \check{\phi}_{i-\frac{1}{2}}^h|$;
- для $\hat{\phi}_{i-\frac{1}{2}}^h$ вычисляем величину погрешности $\|\varepsilon_2^h\|_{C_h} = \max_{1 \leq i \leq n} |\bar{\phi}_{i-\frac{1}{2}} - \hat{\phi}_{i-\frac{1}{2}}^h|$.

Результаты расчетов приведены в таблицах 2–5. В качестве тестов воспользуемся функциями из [7]:

1. $\bar{\phi}_1(t) = te^{-t}$, $t \in [0, 1]$,
2. $\bar{\phi}_2(t) = t(e^{-t} - e^{-1})$, $t \in [0, 1]$;
3. $\bar{\phi}_3(t) = e^{-t} \sin 3\pi t$, $t \in [0, 1]$,
4. $\bar{\phi}_4(t) = e^{-t} \sin 10\pi t$, $t \in [0, 1]$.

Таблица 2. Погрешности сеточного решения для функции $\bar{\phi}_1$

h	$\ \varepsilon_1\ _{C_h}^{N=2}$	$\ \varepsilon_2\ _{C_h}^{N=2}$	$\ \varepsilon_1\ _{C_h}^{N=4}$	$\ \varepsilon_2\ _{C_h}^{N=4}$
1/64	0.068768	0.002936	2.957998	0.008284
1/128	0.015911	0.000734	0.024131	0.002235
1/256	0.003908	0.000184	0.048312	0.000570
1/512	0.000973	0.000046	0.011468	0.000143
1/1024	0.000243	0.000011	0.002831	0.000036

Таблица 3. Погрешности сеточного решения для функции $\bar{\phi}_2$

h	$\ \varepsilon_1\ _{C_h}^{N=2}$	$\ \varepsilon_2\ _{C_h}^{N=2}$	$\ \varepsilon_1\ _{C_h}^{N=4}$	$\ \varepsilon_2\ _{C_h}^{N=4}$
1/64	0.018248	0.001024	1.151524	0.002865
1/128	0.004145	0.000256	0.069993	0.000774
1/256	0.001013	0.000064	0.012994	0.000197
1/512	0.000252	0.000016	0.003049	0.000049
1/1024	0.000063	0.000004	0.000751	0.000012

Таблица 4. Погрешности сеточного решения для функции $\bar{\phi}_3$

h	$\ \varepsilon_1\ _{C_h}^{N=2}$	$\ \varepsilon_2\ _{C_h}^{N=2}$	$\ \varepsilon_1\ _{C_h}^{N=4}$	$\ \varepsilon_2\ _{C_h}^{N=4}$
1/64	0.044545	0.010429	3.865317	0.032355
1/128	0.010762	0.002614	0.148115	0.008839
1/256	0.002668	0.000654	0.032231	0.002266
1/512	0.000666	0.000163	0.007899	0.000570
1/1024	0.000166	0.000041	0.001965	0.000143

Таблица 5. Погрешности сеточного решения для функции $\bar{\phi}_4$

h	$\ \varepsilon_1\ _{C^h}^{N=2}$	$\ \varepsilon_2\ _{C^h}^{N=2}$	$\ \varepsilon_1\ _{C^h}^{N=4}$	$\ \varepsilon_2\ _{C^h}^{N=4}$
1/64	0.036243	0.028743	1.269215	0.101544
1/128	0.009016	0.007529	0.096495	0.028924
1/256	0.002246	0.001911	0.023435	0.007432
1/512	0.000561	0.000481	0.005814	0.001868
1/1024	0.000140	0.000120	0.001451	0.000468

Из таблиц видно, что оба разностных метода имеют порядок сходимости $\mathcal{O}(h^2)$.

Перечислим теперь основные этапы алгоритма по иллюстрации саморегуляризирующего эффекта процедуры дискретизации.

- Зададим пилообразное возмущение правой части сеточного аналога (7), так что $\tilde{y}(t_i) = y(t_i) + (-1)^i \delta$, $i = \overline{1, n}$, $nh = T$.
- Для модельной функции $\bar{\phi}(t)$ решаем сеточный аналог задачи (7), (8) с возмущенной правой частью $\tilde{y}(t)$ одним из рассмотренных разностных методов. В результате получаем $\tilde{\phi}^h(t_{i-\frac{1}{2}}) \equiv \tilde{\phi}_{i-\frac{1}{2}}^h$.
- Для функции $\tilde{\phi}_{i-\frac{1}{2}}^h$ вычисляем величину погрешности

$$\|\tilde{\varepsilon}^{h(\delta)}\|_{C_h} = \max_{1 \leq i \leq n(\delta)} \left| \bar{\phi}_{i-\frac{1}{2}}^h - \tilde{\phi}_{i-\frac{1}{2}}^h \right|.$$

В табл. 6, 7 даны значения $h_{r \text{ opt}}(\delta)$, минимизирующие при фиксированном δ величину $\|\tilde{\varepsilon}_r^{h(\delta)}\|_{C_h}$, где $r = \overline{1, 4}$ соответствует номеру примера. Оптимизация шага сетки осуществлялась методом Фибоначчи с десятью испытаниями. При заполнении табл. 6 использовались значения сеточных функций $\tilde{\phi}_{r, i-\frac{1}{2}}^h$, вычисленные по (9), где $N = 2$, $T = 0.0468$.

В табл. 7 учитывались $\tilde{\phi}_{r, i-\frac{1}{2}}^h$, подсчитанные с помощью (9) для $N = 4$, $T = 0.0292$.

Как видно из таблиц, $h_{r \text{ opt}}(\delta) \asymp \delta^{\frac{1}{3}}$, $\|\tilde{\varepsilon}_r^{h \text{ opt}}(\delta)\|_{C_h} = \mathcal{O}(\delta^{\frac{2}{3}})$.

Аналогичные результаты были получены при вычислении $\tilde{\phi}_r^h(t_{i-\frac{1}{2}})$ по схеме (11).

Таблица 6. Оптимальные значения $h_r(\delta)$ при $N = 2$

δ	$h_{1 \text{ opt}}(\delta)$	$\ \tilde{\varepsilon}_1^{h \text{ opt}}(\delta)\ _{C_h}$	$h_{2 \text{ opt}}(\delta)$	$\ \tilde{\varepsilon}_2^{h \text{ opt}}(\delta)\ _{C_h}$
10^{-5}	0.001052	0.001162	0.033128	0.243383
10^{-6}	0.000366	0.000367	0.037335	0.020550
10^{-7}	0.000115	0.000116	0.005258	0.002819
10^{-8}	0.000036	0.000037	0.001052	0.000777
δ	$h_{3 \text{ opt}}(\delta)$	$\ \tilde{\varepsilon}_3^{h \text{ opt}}(\delta)\ _{C_h}$	$h_{4 \text{ opt}}(\delta)$	$\ \tilde{\varepsilon}_4^{h \text{ opt}}(\delta)\ _{C_h}$
10^{-1}	0.037861	0.186107	0.031551	0.256284
10^{-2}	0.022471	0.135337	0.015775	0.157313
10^{-4}	0.001052	0.008747	0.000526	0.009577
10^{-5}	0.000526	0.003362	0.000526	0.008719

Таблица 7. Оптимальные значения $h_r(\delta)$ при $N = 4$

δ	$h_{1 \text{ opt}}(\delta)$	$\ \tilde{\varepsilon}_1^{h_{\text{opt}}(\delta)}\ _{C_h}$	$h_{2 \text{ opt}}(\delta)$	$\ \tilde{\varepsilon}_2^{h_{\text{opt}}(\delta)}\ _{C_h}$
10^{-1}	0.011483	0.295398	0.011483	0.294276
10^{-2}	0.009843	0.030797	0.010171	0.030522
10^{-4}	0.002297	0.001929	0.009843	0.001238
10^{-5}	0.000656	0.000629	0.000984	0.000505
δ	$h_{3 \text{ opt}}(\delta)$	$\ \tilde{\varepsilon}_3^{h_{\text{opt}}(\delta)}\ _{C_h}$	$h_{4 \text{ opt}}(\delta)$	$\ \tilde{\varepsilon}_4^{h_{\text{opt}}(\delta)}\ _{C_h}$
10^{-1}	0.009515	0.307973	0.009186	0.332801
10^{-2}	0.009843	0.127983	0.009514	0.147060
10^{-4}	0.000656	0.006109	0.000656	0.008799
10^{-5}	0.000326	0.002146	0.000328	0.005709

4. Заключение

В работе рассмотрено уравнение Вольтерра первого рода специального вида, возникающее в обратной граничной задаче теплопроводности с постоянной границей. Разработаны алгоритмы численного решения соответствующих интегральных уравнений, которые основаны на применении метода средних прямоугольников и метода интегрирования произведения. Получено, что с ростом числа слагаемых N в (8) шаг дискретизации h уменьшается. Проведены серии тестовых расчетов. Вычислительный эксперимент показал, что используемые численные методы имеют второй порядок сходимости по шагу сетки, а при возмущенных исходных данных в метрике C обладают саморегуляризирующим свойством.

Литература

1. Алифанов О.М., Иванов Н.А., Колесников В.А. Методика и алгоритм определения температурных зависимостей теплофизических характеристик анизотропных материалов из решения обратной задачи // Вестник Московского авиационного института. — 2012. — Т. 19, № 5. — С. 14–20.
2. Алифанов О.М., Будник С.А., Ненарокомов А.В., Нетелев А.В. Идентификация математических моделей теплопереноса в разлагающихся материалах // Тепловые процессы в технике. — 2011. — № 8. — С. 338–347.
3. Балабанов П.В., Пономарев С.В., Трофимов А.В. Математическое моделирование теплопереноса в процессе хемосорбции // Вестник ТГТУ. — 2008. — Т. 14, № 2. — С. 334–341.
4. Гамов П.А., Дрозин А.Д., Дудоров М.В., Роцин В.Е. Модель роста нанокристаллов в аморфном сплаве // Металлы. — 2012. — № 6. — С. 101–106.
5. Товстоног В.А., Боровкова Т.В., Елисеев В.Н. Анализ погрешностей измерения тепловых потоков при испытаниях конструкций, нагреваемых излучением // Инженерный журнал: наука и инновации. — 2013. — Вып. 7. — (<http://www.engjournal.ru/catalog/machin/rocket/851.html>).
6. Короткий А.И., Ковтунов Д.А. Реконструкция граничных режимов в обратной задаче тепловой конвекции высоковязкой жидкости // Тр. Института математики и механики УрО РАН. — 2006. — Т. 12, № 2. — С. 88–97.
7. Япарова Н.М. Numerical methods for solving a boundary value inverse heat conduction problem // Inverse Problems in Science and Engineering. — 2014. — Vol. 22, iss. 5. — P. 832–847.

8. **Brunner H., van der Houwen P.J.** The Numerical Solution of Volterra Equations. CWI Monographs, vol. 3. — Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1986.
9. **Магницкий Н.А.** Об одном методе регуляризации уравнений Вольтерра I рода // ЖВМиМФ. — 1975. — Т. 15, № 5. — С. 1317–1323.
10. **Денисов А.М.** О приближенном решении уравнения Вольтерра I рода // ЖВМиМФ. — 1975. — Т. 15, № 4. — С. 1053–1056.
11. **Васин В.В.** Итерационная регуляризация монотонных операторных уравнений первого рода в полуупорядоченных В-пространствах // ДАН. — 1995. — Т. 341, № 2. — С. 151–154.
12. **Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.** Некорректные задачи математической физики и анализа. — М.: Наука, 1980.
13. **Бухгейм А.Л.** Введение в теорию обратных задач. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988.
14. **Апарцин А.С., Бакушинский А.Б.** Приближенное решение интегральных уравнений Вольтерра I рода методом квадратурных сумм // Дифф. и интегр. уравнения — 1972. — Вып. I. — С. 248–258.
15. **Вайникко Г.М., Хямарик У.А.** Саморегуляризация для решения некорректных задач проекционными методами // Модели и методы исследования операций. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988. — С. 157–163.
16. **Гребенников А.И.** О регуляризирующих свойствах явных аппроксимирующих сплайнов // Методы матем. моделирования и автоматизированная обработка наблюдений и их приложения. — М.: МГУ, 1986.
17. **Смирнов В.И.** Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 1. — М.: Наука, 1974.
18. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986.
19. **Solodusha S.V., Yaparova N.M.** Numerical solution of the Volterra equations of the first kind that appear in an inverse boundary-value problem of heat conduction. — <http://arxiv.org/abs/1407.1678>.
20. **Апарцин А.С.** Дискретизационные методы регуляризации некоторых интегральных уравнений I рода // Методы численного анализа и оптимизации. — 1987. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние. — С. 263–297.
21. **Linz P.** Product integration method for Volterra integral equations of the first kind // BIT. — 1971. — Vol. 11. — P. 413–421.

*Поступила в редакцию 7 июля 2014 г.,
в окончательном варианте 17 октября 2014 г.*

Литература в транслитерации

1. **Alifanov O.M., Ivanov N.A., Kolesnikov V.A.** Metodika i algoritm opredeleniya temperaturnykh zavisimostej teplofizicheskikh kharakteristik anizotropnykh materialov iz resheniya obratnoj zadachi // Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo instituta. — 2012. — Т. 19, № 5. — С. 14–20.
2. **Alifanov O.M., Budnik S.A., Nenarokomov A.V., Netelev A.V.** Identifikatsiya matematicheskikh modelej teploperenosa v razlagayushchikhsya materialakh // Teplovye protsessy v tekhnike. — 2011. — № 8. — С. 338–347.
3. **Balabanov P.V., Ponomarev S.V., Trofimov A.V.** Matematicheskoe modelirovanie teploperenosa v protsesse khemosorbtsii // Vestnik TGTU. — 2008. — Т. 14, № 2. — С. 334–341.
4. **Gamov P.A., Drozin A.D., Dudorov M.V., Roshchin V.E.** Model' rosta nanokristallov v amorfnom splave // Metally. — 2012. — № 6. — С. 101–106.

5. **Tovstonog V.A., Borovkova T.V., Eliseev V.N.** Analiz pogreshnostej izmereniya teplovykh potokov pri ispytaniyakh konstruksij, nagrevaemykh izlucheniem // Inzhenernyj zhurnal: nauka i innovatsii. — 2013. — Vyp. 7. — (<http://www.engjournal.ru/catalog/machin/rocket/851.html>).
6. **Korotkij A.I., Kovtunov D.A.** Rekonstruktsiya granichnykh rezhimov v obratnoj zadache teplovoj konveksii vysokovyazkoj zhidkosti // Tr. Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN. — 2006. — T. 12, № 2. — S. 88–97.
7. **Yaparova N.M.** Numerical methods for solving a boundary value inverse heat conduction problem // Inverse Problems in Science and Engineering. — 2014. — Vol. 22, iss. 5. — P. 832–847.
8. **Brunner H., van der Houwen P.J.** The Numerical Solution of Volterra Equations. CWI Monographs, vol. 3. — Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1986.
9. **Magnitskij N.A.** Ob odnom metode regulyarizatsii uravnenij Vol'terra I roda // ZhVMiMF. — 1975. — T. 15, № 5. — S. 1317–1323.
10. **Denisov A.M.** O priblizhenom reshenii uravneniya Vol'terra I roda // ZhVMiMF. — 1975. — T. 15, № 4. — S. 1053–1056.
11. **Vasin V.V.** Iteratsionnaya regulyarizatsiya monotonykh operatornykh uravnenij pervogo roda v poluuporyadochennykh V-prostranstvakh // DAN. — 1995. — T. 341, № 2. — S. 151–154.
12. **Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskij S.P.** Nekorrektnye zadachi matematicheskoy fiziki i analiza. — M.: Nauka, 1980.
13. **Bukhgejm A.L.** Vvedenie v teoriyu obratnykh zadach. — Novosibirsk: Nauka. Sib. otd-nie, 1988.
14. **Apartsin A.S., Bakushinskij A.B.** Priblizhennoe reshenie integral'nykh uravnenij Vol'terra I roda metodom kvadraturnykh summ // Diff. i integr. uravneniya — 1972. — Vyp. I. — S. 248–258.
15. **Vajnikko G.M., Khyamarik U.A.** Samoregulyarizatsiya dlya resheniya nekorrektnykh zadach proektsionnymi metodami // Modeli i metody issledovaniya operatsij. — Novosibirsk: Nauka. Sib. otd-nie, 1988. — S. 157–163.
16. **Grebennikov A.I.** O regulyariziruyushchikh svojstvakh yavnykh approksimiruyushchikh splajnov // Metody matem. modelirovaniya i avtomatizirovannaya obrabotka nablyudenij i ikh prilozheniya. — M.: MGU, 1986.
17. **Smirnov V.I.** Kurs vysšej matematiki. T. 4. Ch. 1. — M.: Nauka, 1974.
18. **Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya.** Metody resheniya nekorrektnykh zadach. — M.: Nauka, 1986.
19. **Solodusha S.V., Yaparova N.M.** Numerical solution of the Volterra equations of the first kind that appear in an inverse boundary-value problem of heat conduction. — <http://arxiv.org/abs/1407.1678>.
20. **Apartsin A.S.** Diskretizatsionnye metody regulyarizatsii nekotorykh integral'nykh uravnenij I roda // Metody chislennogo analiza i optimizatsii. — 1987. — Novosibirsk: Nauka. Sib. otd-nie. — S. 263–297.
21. **Linz P.** Product integration method for Volterra integral equations of the first kind // BIT. — 1971. — Vol. 11. — P. 413–421.

