

ВЫНУЖДЕННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА В БОЛЬШОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ КОЛБЕ (РЕЗОНАТОРЕ), ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Р. И. Нигматулин, В. Ш. Шагапов, Г. Я. Галеева

Институт механики УНЦ РАН, 450000 Уфа

Рассматриваются радиальные колебания газового пузырька в большой сферической колбе, заполненной сжимаемой жидкостью. Получено уравнение изменения радиуса пузырька по известному закону изменения давления на границе жидкого объема (закону движения поршня) в течение времени, за которое передний фронт отраженных от пузырька возмущений, повторно отражаясь от поршня, доходит до пузырька. Для дальнейших расчетов изменения радиуса пузырька выведены рекуррентные соотношения, учитывающие отраженную от пузырька волну на предыдущем цикле и последующее ее отражение от поршня. При гармоническом воздействии поршня на систему жидкость — пузырек устанавливается некоторый периодический режим с пакетом колебаний пузырька.

Введение. Вибрационным или акустическим воздействием на систему жидкость — пузырек в некотором сосуде можно достигнуть коротких импульсов высоких температур и давлений в газовой фазе. При резонансном почти адиабатическом суперсжатии пузырька, приводящем к периодическим суперкратким ($\approx 10^{-11}$ с) и супервысоким температурам газа ($\approx 10^6$ К) в его центре, может наблюдаться даже свечение пузырька. Это явление называется сонолюминесценцией [1–3]. Возможность получения более высоких максимальных температур обсуждается в работах [4, 5]. Основным физическим механизмом при этом является радиально сходящееся инерционное движение жидкости, позволяющее значительную часть накачиваемой механической энергии сконцентрировать в пузырьке в виде внутренней энергии газовой фазы. При описании динамики радиально симметричных колебаний пузырьков обычно используется уравнение Рэлея — Ламба [6], полученное в рамках несжимаемой жидкости

$$a\ddot{a} + \frac{3}{2}\dot{a}^2 + 4\frac{\nu_l\dot{a}}{a} = \frac{p_g - p_{l\infty}}{\rho_l}$$

(a — радиус пузырька, p_g и $p_{l\infty}$ — давление в пузырьке и в жидкости вдали от пузырька, ρ — плотность жидкости, ν_l — кинематическая вязкость жидкости), или модифицированные его формы, например, учитывающие акустическое излучение. Такое использование предполагает, что характерное время прохождения звуковой волны через жидкий объем $t_c = R/C_l$ (R — характерный линейный размер объема, C_l — скорость звука в жидкости) значительно меньше периода t_M собственных колебаний пузырьков ($t_c \ll t_M$), определяемого формулой Минаерта. Однако, когда радиальное движение пузырька рассматривается в «большом» объеме ($t_c \geq t_M$), описание динамики пузырька с помощью уравнения Рэлея — Ламба с принятым для $p_{l\infty}$ значением давления на границе объема жидкости совершенно неправомерно. Оказывается, наибольший эффект при достижении сверхвысоких температур в газовых пузырьках можно получить именно в «больших» объемах. Такая особенность связана прежде всего с тем, что если в случае воздействия давления на

«малый» объем накопление энергии в основном происходит в виде кинетической энергии радиального движения жидкости, то в случае «большого» объема, во-первых, основная часть аккумуляции связана со сжимаемостью жидкости, во-вторых, происходят волновой перенос этой энергии к центру объема и ее концентрация (кумуляция). При этом наиболее энергетически выгодный режим реализуется при частотах, равных частотам собственных свободных колебаний сферического объема жидкости.

Отметим, что уравнение Херринга — Флина и уточнение, предложенное в [7], не пригодны для расчетов вынужденных колебаний газового пузырька в «большом», но конечном объеме. Уравнение Херринга — Флина описывает лишь начальную стадию динамики, когда возмущения, отраженные от внешней границы объема жидкости, еще не успели обратно вернуться к пузырьку. Кроме того, процедура получения уточненного уравнения проведена некорректно, поскольку фактически пренебрегли слагаемым, равным бесконечности. Причем физическое истолкование наличия такого слагаемого очень простое и связано с тем, что любое сходящееся от бесконечности сферически симметричное возмущение давления на конечном расстоянии имеет бесконечную амплитуду.

1. Основные уравнения. Рассмотрим радиальные колебания газового пузырька в сжимаемой жидкости. Уравнения движения для жидкости вокруг пузырька примем в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{w^2}{2} = -\frac{1}{\rho_l^0} \frac{\partial p_l}{\partial r}, \quad \frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho_l w r^2) = 0, \quad p_l = p_0 + C_l^2 (\rho_l - \rho_{l0}) \quad (1.1)$$

(w — скорость жидкости). Здесь и далее индекс l соответствует параметрам жидкости, а нижний индекс 0 — невозмущенному состоянию системы. Сжимаемость жидкости принята в линейном приближении. Примем, что давление и температура в газовой фазе однородные. Полагаем, что поведение газа политропическое и, в частности, адиабатическое. Тогда его давление p_g однозначно определяется через текущее значение радиуса пузырька

$$p_g = p_0 (a_0/a)^{3\gamma} \quad (1.2)$$

(γ — показатель политропы газа).

Для слабых возмущений в жидкости ($w \ll C_l$) из уравнений (1.1) следует волновое уравнение для возмущений давления вдали от пузырька ($r \gg a$)

$$\frac{\partial^2 \Delta p_l}{\partial t^2} = C_l^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Delta p_l}{\partial r} \right) \quad (\Delta p_l = p_l - p_0). \quad (1.3)$$

Для распределения скоростей имеем

$$w = -\frac{1}{\rho_{l0}} \int_{-\infty}^t \frac{\partial \Delta p_l}{\partial r} dt. \quad (1.4)$$

Решение уравнения (1.3) в общем случае имеет вид $\Delta p_l = \Delta p_{dif} + \Delta p_{con}$, где $\Delta p_{con} = f_{con}(t + r/C_l)/r$; $\Delta p_{dif} = f_{dif}(t - r/C_l)/r$; Δp_{con} и Δp_{dif} соответствуют сходящейся и расходящейся волнам. На основе (1.4) для скорости можем записать

$$w = w_{con} + w_{dif}, \quad (1.5)$$

$$w_{dif} = \frac{\Delta p_{dif}}{\rho_l C_l} + \frac{1}{\rho_{l0} r} \int_{-\infty}^t \Delta p_{dif} dt, \quad w_{con} = -\frac{\Delta p_{con}}{\rho_l C_l} + \frac{1}{\rho_{l0} r} \int_{-\infty}^t \Delta p_{con} dt.$$

2. Начальная стадия колебаний. Пусть при $t = 0$ на систему жидкость — газовый пузырек, находящийся в равновесии ($w = 0$, $p_l = p_g = p_0$), через границу сферического

объема жидкости радиуса R начинает воздействовать поршень. Закон изменения давления за поршнем представим в виде

$$p^{(R)}(t) = p_0 + \Delta p^{(R)}(t). \quad (2.1)$$

Скорость поршня и возмущение давления за ним связаны соотношением $w^{(R)}(t) = -\Delta p^{(R)}(t)/\rho_{l0}C_l$. Тогда по первоначально покоящейся жидкости пойдет волна давления

$$\Delta p_{con} = \frac{R}{r} \Delta p^{(R)} \left(t + \frac{r-R}{C_l} \right). \quad (2.2)$$

При достижении переднего фронта волны, движущегося по закону $r_w = R - C_l t$, происходит ее отражение от поверхности пузырька ($r_w = a_0$). Возмущения давления, соответствующие отраженной волне, ищем в виде

$$\Delta p_{dif} = \frac{R}{r} \Delta p_{dif}^{(R)} \left(t - \frac{r}{C_l} \right). \quad (2.3)$$

Из условия непрерывности давления на поверхности пузырька ($r = a$) при $t \geq t_c$ ($t_c = (R - a_0)/C_l \approx R/C_l$) запишем

$$(\Delta p_{con} + \Delta p_{dif}) \Big|_{r=a} = p_g(t) - p_0. \quad (2.4)$$

Подставляя в (2.4) выражения (2.2) и (2.3), получим

$$\frac{R}{a} \left(\Delta p^{(R)} \left(t + \frac{a-R}{C_l} \right) + \Delta p_{dif}^{(R)} \left(t - \frac{a}{C_l} \right) \right) = p_g(t) - p_0.$$

Отсюда для отраженной от газовой полости волны имеем

$$\Delta p_{dif} = -\frac{R}{r} \Delta p^{(R)} \left(t + \frac{2a-r-R}{C_l} \right) + \frac{a}{r} \left(p_g \left(t + \frac{a-r}{C_l} \right) - p_0 \right). \quad (2.5)$$

Кроме того, сумма возмущений скоростей, соответствующих падающей и отраженным волнам, при $t \geq t_c$ должна удовлетворять условию

$$(w_{con} + w_{dif}) \Big|_{r=a} = \frac{da}{dt}. \quad (2.6)$$

На основе выражений (1.5) с учетом (2.2) и (2.5) для поля скоростей получим

$$\begin{aligned} w = w_{con} + w_{dif}, \quad w_{con} &= -\frac{R}{\rho_{l0}C_l r} p^{(R)} \left(t + \frac{r-R}{C_l} \right) + \frac{R}{\rho_{l0}r^2} \int_0^t \Delta p^{(R)} \left(t + \frac{r-R}{C_l} \right) dt, \\ w_{dif} &= -\frac{R}{\rho_{l0}C_l r} \Delta p^{(R)} \left(t + \frac{2a-r-R}{C_l} \right) + \frac{a}{\rho_{l0}C_l r} \left(p_g \left(t + \frac{a-r}{C_l} \right) - p_0 \right) - \\ &\quad - \frac{R}{\rho_{l0}r^2} \int_0^t \Delta p^{(R)} \left(t + \frac{2a-r-R}{C_l} \right) dt + \frac{1}{\rho_{l0}r^2} \int_0^t a \left(t + \frac{a-r}{C_l} \right) \left(p_g \left(t + \frac{a-r}{C_l} \right) - p_0 \right) dt \\ &\quad (t \geq t_c). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Отметим, что решение (2.7) описывает распределение скоростей в объеме жидкости $a(t) \leq r \leq R$ в течение времени $t_c \leq t \leq 2t_c$. Подставляя (2.7) в (2.6), получим интегродифференциальное уравнение

$$-2 \frac{R}{\rho_{l0}C_l a(t)} \Delta p^{(R)} \left(t + \frac{a(t)-R}{C_l} \right) + \frac{1}{\rho_{l0}C_l} (p_g(t) - p_0) + \frac{1}{\rho_{l0}a^2(t)} \int_0^t a(t)(p_g(t) - p_0) dt = \frac{da}{dt}.$$

Отсюда, пренебрегая $a(t)$ по сравнению с R , после некоторых преобразований получим

$$\rho_{l0} \frac{d}{dt} (a^2 \dot{a}) = a(p_g(t) - p_0) - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{2R}{C_l} \left[\frac{2R}{a} \Delta p^{(R)}(t - t_c) - (p_g(t) - p_0) \right] \right\}. \quad (2.8)$$

По известному закону изменения давления $\Delta p^{(R)}(t)$ на границе жидкого объема (или закону движения поршня $w^{(R)}(t)$) уравнение (2.8) позволяет определить изменение радиуса газового пузырька в течение времени, за которое передний фронт отраженных от него возмущений, повторно отражаясь от поршня ($r = R$), доходит до пузырька ($t_c \leq t \leq 3t_c$).

В случае, когда давление в пузырьке постоянно ($p_g = p_0$, что может иметь место для паровых пузырьков), из уравнения (2.8) получим

$$a \dot{a} = - \frac{2R}{\rho_{l0} C_l} \Delta p^{(R)}(t - t_c). \quad (2.9)$$

Здесь учтено, что при $t = t_c$ пузырек находится в равновесии ($\dot{a} = 0$). Тогда на основе (2.9) получим решение

$$a^2 - a_0^2 = - \frac{4R}{\rho_{l0} C_l} \int_{t_c}^t \Delta p^{(R)}(t - t_c) dt. \quad (2.10)$$

Для гармонического закона изменения давления на поршне

$$\Delta p^{(R)} = \Delta p_A^{(R)} \sin(\omega t). \quad (2.11)$$

Из (2.10) следует

$$a = \sqrt{a_0^2 - \frac{8R}{\rho_{l0} C_l \omega} \Delta p_A^{(R)} \sin^2 \left(\frac{\omega(t - t_c)}{2} \right)} \quad (t > t_c). \quad (2.12)$$

Используя решения (2.7) для распределения скоростей или (2.2) и (2.3) для распределения давлений (на основе уравнения импульсов), получим поле ускорений. Полагая, что на поверхности пузырька выполняется условие

$$\left(\frac{\partial w_{con}}{\partial t} + \frac{\partial w_{dif}}{\partial t} \right) \Big|_{r=a} = \frac{d^2 a}{dt^2},$$

имеем

$$\rho_{l0} a \frac{d^2 a}{dt^2} = p_g(t) - p_0 - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{2R}{C_l} \Delta p^{(R)}(t - t_c) - \frac{a}{C_l} (p_g(t) - p_0) \right\}. \quad (2.13)$$

Уравнение (2.13) несколько отличается от (2.8). Это связано с тем, что при получении этих нелинейных уравнений, вообще говоря, совершена не совсем корректная процедура с использованием решения линейной задачи. В первом случае на переменном значении радиуса пузырька состыкованы скорости (условие (2.6)), во втором — ускорения. В линеаризованном виде эти два уравнения совпадают.

Следует отметить, что уравнения (2.8) или (2.13), полученные на основе линейных волновых уравнений, можно использовать для достаточно слабых воздействий на систему жидкость — пузырек, при которых скорость изменения радиуса пузырька значительно меньше скорости звука в жидкости ($\dot{a} \ll C_l$) и смещения жидкости δr малы ($\delta r \ll r$, в частности, $\delta a \ll a$). Из сопоставления уравнения (2.13) с уравнением Рэля — Ламба видно, что в правой части «утрачено» слагаемое $(3/2)\rho_{l0}\dot{a}^2$. Дополняя уравнение этим слагаемым, а также слагаемым за счет вязкости, получим

$$\rho_{l0} \left(a \ddot{a} + \frac{3}{2} \dot{a}^2 + 4 \frac{\nu_l \dot{a}}{a} \right) = p_g - p_0 - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{a}{C_l} \left[\frac{2R}{a} \Delta p^{(R)}(t - t_c) - (p_g - p_0) \right] \right\}. \quad (2.14)$$

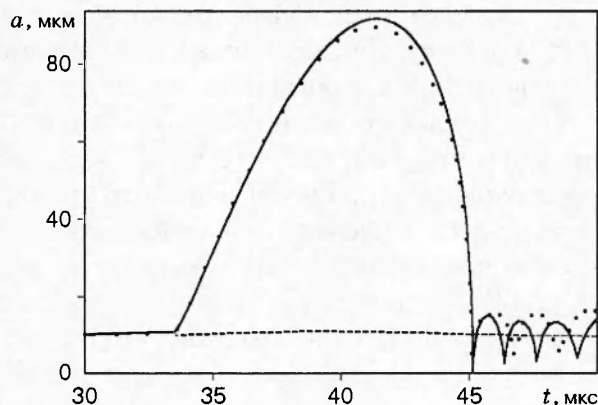


Рис. 1

По-видимому, диапазон применимости уравнения (2.14) значительно шире, чем уравнения (2.13). Это подтверждается сравнением решения уравнения (2.14) (сплошная кривая на рис. 1) с численным решением [5] (пунктирная кривая), полученным на основе интегрирования полной системы уравнений (1.1) при следующих параметрах системы вода — воздушный пузырек: $a_0 = 10^{-5}$ м, $R = 5 \cdot 10^{-2}$ м, $C_l = 1500$ м/с, $\gamma = 1,4$, $\nu_l = 0$. Закон изменения давления на границе объема жидкости ($r = R$) при $t > 0$ принят в виде (2.11). Для амплитуды давления и круговой частоты приняты значения: $\Delta p_A^{(R)} = 0,25 \cdot 10^5$ Па, $\omega = 2\pi \cdot 45$ кГц. Штриховая линия рассчитана по уравнению Рэлея — Ламба при тех же параметрах. Отметим, что в работе [5] решалась полная газодинамическая задача с учетом процессов диссоциации и ионизации в газовой фазе. Удивительная близость линий (сплошной и пунктирной), особенно в стадии первого медленного расширения и сжатия пузырька в режиме «обострения», говорит о достоинстве уравнения (2.14), так как его использование вместо полной системы гидродинамических уравнений в жидкости (1.1) принципиально облегчает процедуру численного анализа динамики системы жидкость — пузырек. Это обстоятельство особенно важно для проведения расчетов в циклическом режиме воздействия. Процесс счета должен состоять из двух этапов. На первом этапе на основе уравнения (2.14) (или его модификаций с учетом повторных отражений волн от границы жидкости) определяется движение в медленной стадии, в которой происходит накопление энергии в системе. Поведение газа в пузырьке на этом этапе вполне можно описать идеализированной схемой (1.2). Поэтому расчет процессов в жидкости и газе в более подробной постановке достаточно провести лишь для быстрой стадии сжатия и расширения газовой полости, используя в качестве начальных данных результаты первого этапа счета. Необходимо отметить, что для анализа сверхвысоких температур и давлений в газовой фазе решающим является изучение процессов вблизи момента максимального сжатия пузырька с учетом волн, сходящихся к центру и отражающихся от центра и стенок пузырька. Если рассматривать с макроскопической точки зрения поведение газового пузырька, когда представляет интерес изменение радиуса, давления и температуры в пузырьке как функций времени, то можно ограничиться приближенным описанием поведения газа в пузырьке. Это подтверждается рис. 1, где после первого и последующих отскоков сплошная и пунктирная линии неплохо согласуются между собой. Из этого следует, что использование уравнения Рэлея — Ламба для расчета колебаний радиуса пузырька неправомерно.

Достоверность уравнения (2.14) можно обосновать другим способом. При волновом воздействии на систему жидкость — пузырек в окрестности газового пузырька на расстоянии l , значительно меньшем длины волны λ ($l \ll \lambda$), эффекты сжимаемости несуществен-

ны. Выделим вблизи пузырька некоторый эффективный объем несжимаемой жидкости с внешним радиусом a_{ef} ($\lambda \gg a_{ef} \gg a$). Считаем, что в этом объеме ($a_{ef} \geq r \geq a$) движение жидкости происходит в соответствии с уравнением вязкой несжимаемой жидкости, а вне этого объема ($a_{ef} \leq r \leq R$) — согласно линейным уравнениям (1.3) и (1.4). Проведя выкладки, аналогичные тем, что и при получении (2.8), и предполагая выполнение условия $a_0 \ll a_{ef} \ll R$, получим уравнение (2.14). Иначе говоря, это уравнение следует из сращивания решения волнового уравнения с решением уравнения вязкой несжимаемой жидкости. Этим отмеченным аспектам описания динамики пузырька посвящена работа [4].

Поскольку уравнение (2.13) описывает динамику пузырька до момента времени $t = 3t_c$, для дальнейшего расчета ($t > 3t_c$) его необходимо уточнить с учетом отраженной от газового пузырька волны на предыдущем цикле и последующего ее отражения от поршня. При описании отражения волн от поршня можно принять две схемы. В первой схеме возмущение давления на поршне $\Delta p^{(R)}(t)$ всегда является известной заданной функцией, а во второй — задан закон движения поршня $\Delta R(t)$ относительно исходного положения. В соответствии с этими схемами граничные условия на поршне могут быть записаны в виде

$$(p_{con} + p_{dif})|_{r=R} = \Delta p^{(R)}(t) \quad (2.15)$$

или

$$(w_{con} + w_{dif})|_{r=R} = w^{(R)}(t), \quad w^{(R)}(t) = \frac{dR(t)}{dt} \quad (t \geq 2t_c). \quad (2.16)$$

С учетом соотношений на поверхности поршня $w_{con} = -\Delta p_{con}/(\rho_{l0}C_l)$, $w_{dif} = \Delta p_{dif}/(\rho_{l0}C_l)$ при $r = R$ граничное условие (2.16) может быть приведено к виду $(-\Delta p_{con} + \Delta p_{dif})|_{r=R} = \rho_{l0}C_l w^{(R)}(t)$. Используя выражение (2.5) и граничные условия (2.15) и (2.16), можно получить

$$\Delta p_{con}|_{r=R} = \Delta p_{(1)}^{(R)}(t) = \Delta p^{(R)}(t) + \Delta p^{(R)}\left(t + \frac{2(a-R)}{C_l}\right) - \frac{a}{R}\left(p_g\left(t + \frac{a-R}{C_l}\right) - p_0\right)$$

или

$$\Delta p_{con}|_{r=R} = \Delta p_{(1)}^{(R)}(t) = -\rho_{l0}C_l w^{(R)}(t) - \Delta p^{(R)}\left(t + \frac{2(a-R)}{C_l}\right) + \frac{a}{R}\left(p_g\left(t + \frac{a-R}{C_l}\right) - p_0\right).$$

Отсюда, пренебрегая слагаемым a по сравнению с R и используя (2.1), получим

$$\Delta p_{(1)}^{(R)}(t) = \Delta p^{(R)}(t) + \Delta p^{(R)}(t - 2t_c) - \frac{a(t-t_c)}{R}(p_g(t-t_c) - p_0)$$

или

$$\Delta p_{(1)}^{(R)}(t) = -\rho_{l0}C_l(w^{(R)}(t) - w^{(R)}(t - 2t_c)) + \frac{a(t-t_c)}{R}(p_g(t-t_c) - p_0).$$

Продолжая эти рассуждения далее, для n -го цикла $(2n+1)t_c \leq t \leq (2n+3)t_c$ ($n > 1$) получим

$$\begin{aligned} \Delta p_{(n)}^{(R)}(t) = & \Delta p^{(R)}(t) + \Delta p^{(R)}(t - 2t_c) + \dots + \Delta p^{(R)}(t - 2nt_c) - \frac{a(t-t_c)}{R}(p_g(t-t_c) - p_0) - \\ & - \frac{a(t-3t_c)}{R}(p_g(t-3t_c) - p_0) - \dots - \frac{a(t-(2n-1)t_c)}{R}(p_g(t-(2n-1)t_c) - p_0) \end{aligned} \quad (2.17)$$

или

$$\begin{aligned} \Delta p_{(n)}^{(R)}(t) = & -\rho_{l0}C_l(w^{(R)}(t) - w^{(R)}(t - 2t_c) + \dots + (-1)^n w^{(R)}(t - 2nt_c)) + \frac{a(t-t_c)}{R}(p_g(t-t_c) - p_0) - \\ & - \frac{a(t-3t_c)}{R}(p_g(t-3t_c) - p_0) + \dots + (-1)^n \frac{a(t-(2n-1)t_c)}{R}(p_g(t-(2n-1)t_c) - p_0). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Нетрудно видеть, что соотношения (2.17) и (2.18) можно записать в виде следующих рекуррентных соотношений:

$$\Delta p_{(n)}^{(R)}(t) = \Delta p^{(R)}(t) + \chi \left(\Delta p_{(n-1)}^{(R)}(t - 2t_c) - \frac{a(t - t_c)}{R} (p_g(t - t_c) - p_0) \right), \quad \Delta p_{(0)}^{(R)}(t) = \Delta p^{(R)}(t)$$

или

$$\Delta p_{(n)}^{(R)}(t) = -\rho_l C_l w^{(R)}(t) - \chi \left(\Delta p_{(n-1)}^{(R)}(t - 2t_c) - \frac{a(t - t_c)}{R} (p_g(t - t_c) - p_0) \right),$$

$$\Delta p_{(0)}^{(R)} = -\rho_l C_l w^{(R)}(t) \quad (n \geq 1)$$

(коэффициент χ введен для учета неполного отражения на поршне).

Если задано давление на поршне, скорость поршня определяется из выражения

$$w^{(R)}(t) = \frac{\Delta p^{(R)}(t) - (1 + \chi)\Delta p_{(n)}^{(R)}(t)}{\chi \rho_l C_l}$$

Когда известна скорость поршня, для давления на поршне имеем

$$\Delta p^{(R)}(t) = \frac{(1 + \chi)\Delta p_{(n)}^{(R)}(t) + \rho_l C_l w^{(R)}(t)}{\chi}$$

Закон изменения радиуса с момента времени $(2n + 1)t_c$ до $(2n + 3)t_c$ определяется на основе уравнения (2.12) при соответствующей замене $\Delta p^{(R)}(t)$ на $\Delta p_{(n)}^{(R)}(t)$ из (2.17) или (2.18).

На рис. 2 приведены результаты расчета по уравнению (2.14). Закон изменения давления на поршне принят в виде (2.11), при этом $\Delta p_A^{(R)} = 0,075 \cdot 10^5$ Па, $\omega^{(R)} = 2\pi \cdot 15$ кГц, $\nu_l = 10^{-5}$ м²/с. Отметим, что принятое значение частоты вынужденных колебаний соответствует первой резонансной частоте сферического объема воды с радиусом $R = 5 \cdot 10^{-2}$ м. На графике прослеживается постепенная раскачка радиуса пузырька (сплошная линия). Если на начальном этапе колебания происходят в более плавном режиме, то такой режим постепенно переходит (для приведенного примера начиная со второго цикла) в стадию с пакетом колебаний, состоящим из одного лидирующего колебания с обострением сжатия и высокочастотного «дребезга». При таком режиме с заданным изменением давления на поршне нарастание амплитуды колебаний радиуса пузырька продолжается до тех

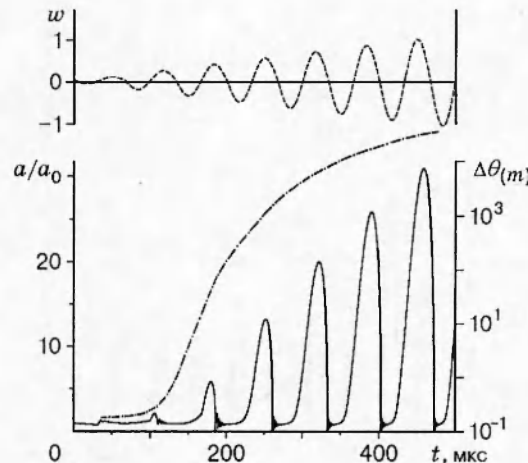


Рис. 2

пор, пока период лидирующего колебания $t^{(m)}$ достигнет периода вынужденных колебаний ($t^{(m)} < t^{(f)}$). В этот момент происходит расстройка колебаний пузырьков. Дальнейшие колебания становятся нерегулярными, рост амплитуды колебаний радиуса пузырьков фактически прекращается. В качестве эффективного параметра, определяющего состояние газа в момент максимального сжатия пузырька, можно принять радиальную скорость пузырька w_i на стадии сжатия, когда радиус пузырька равен исходному радиусу ($a(t_i) = a_0$). Приравняв кинетическую энергию радиального движения при этой скорости, вычисленную как для несжимаемой жидкости, к приращению внутренней энергии пузырька при изменении радиуса от значения a_0 до значения в момент максимального сжатия a_m [4], получим выражение для максимально возможного изменения температуры совершенного газа

$$\Delta\theta_{(m)} = \frac{\Delta T_{(m)}}{T_0} = \frac{3}{2} (\gamma - 1) \frac{\rho_{l0}}{p_0} w_i^2 \quad (\Delta T_{(m)} = T_{(m)} - T_0).$$

Зависимость $\Delta\theta_{(m)}$ от времени приведена на рис. 2 (штрихпунктирная линия). Для стадии с пакетом колебаний значение параметра $\Delta\theta_{(m)}$ получено для лидирующего колебания. Параметр $\Delta\theta_{(m)}$ определяет «накачанную» в пузырек энергию. Этот параметр имеет непосредственное отношение к максимально возможной температуре плотного несовершенного газа при сильном сжатии пузырька, но, вообще говоря, ей не равен. Штриховая линия соответствует безразмерной скорости поршня $\dot{w}^{(R)} = -\rho_{l0} C_l w^{(R)} / p_0$ (безразмерная скорость в таком виде удобна для сравнения со значением давления за поршнем, индуцированного движением поршня по известному закону). Эта линия приведена без учета аномально больших всплесков, связанных с высокочастотным «дребезгом» пузырьков. В реальных системах, как показывают некоторые оценки, эти всплески давления из-за вязкости жидкости и нелинейных эффектов действительно сильно затухают при распространении волн от пузырька до поршня. Из графика видно, что происходит постепенная раскочка скорости и тем самым амплитуды колебаний поршня.

На рис. 3 показана динамика колебания пузырька при изменении скорости поршня по закону

$$w^{(R)} = w_A^{(R)} \sin(\omega^{(R)} t). \quad (2.19)$$

Для амплитуды колебаний скорости и коэффициента отражения на поршне приняты значения: $w_A^{(R)} = 0,017$ м/с, $\Delta p_A^{(R)} = 0,25$ Па ($\Delta p_A^{(R)} = \rho_{l0} C_l w_A^{(R)}$), $\chi = 0,5$, остальные параметры такие же, как и в предыдущих примерах. Из представленных кривых следует,

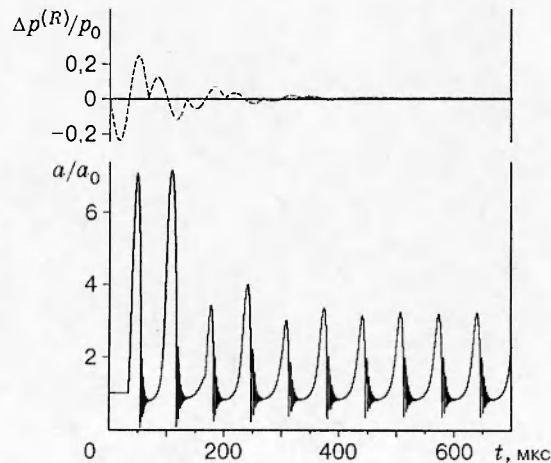


Рис. 3

что в случае, когда задана скорость поршня в виде (2.19), колебания пузырька выходят на некоторый периодический режим. Анализ результатов расчетов применительно к экспериментальным данным [2] позволяет сделать вывод о том, что колебания в начальной стадии в большой степени соответствуют колебаниям в режиме поршня с заданным давлением. В начальной стадии «сила» экспериментальной установки определяется ее возможностью возбудить колебания давления с максимальной амплитудой. По мере нарастания амплитуды вынужденных колебаний пузырька система постепенно выходит на установившийся периодический режим, в котором параметры колебаний лимитируются амплитудой смещений поршня (стенки колбы) $\Delta R_A = w_A^{(R)}/\omega^{(R)}$. Штриховая линия на рис. 3 соответствует безразмерному возмущению давления на поршне $\Delta p^{(R)}/p_0$ без учета высокочастотных всплесков давления. Видно, что по мере выхода на режим установившихся колебаний амплитуда давления на поршне, соответствующая колебанию поршня по закону (3.1), затухает и остаются только всплески давления, связанные с колебаниями пузырька. Отметим, что в случае отсутствия пузырька в центре объема жидкости давление на поршне в установившемся режиме колебаний в точности должно равняться нулю, поскольку частота колебаний $\omega^{(R)}$ является одной из собственных частот колебаний объема жидкости радиуса R .

3. Установившиеся вынужденные колебания. Рассмотрим движение системы жидкость — пузырек при гармоническом воздействии на эту систему с помощью поршня. Для определенности положим, что поршень совершает гармонические колебания с круговой частотой

$$\omega^{(R)}(t^{(R)} = 2\pi/\omega^{(R)}), \quad \Delta R = \Delta R_A \sin(\omega^{(R)}t). \quad (3.1)$$

Из предыдущего анализа следует, что именно такая постановка для поршня является наиболее подходящей применительно к экспериментальным данным [1], когда устанавливается некоторый периодический режим. Кроме того, положим, что частота колебаний поршня совпадает с одной из собственных частот объема жидкости радиуса R при свободных колебаниях ($\omega^{(R)} = \omega_c k$, $\omega_c = \pi C_l/R^{(R)}$, k — целое число).

Как уже отмечалось, при таких условиях воздействия на систему жидкость — газовый пузырек устанавливается некоторый периодический режим с пакетом колебаний пузырька

$$a(t + t^{(R)}) = a(t), \quad p_g(t + t^{(R)}) = p_g(t), \quad p_{con}(t + t^{(R)}) = p_{con}(t), \\ p_{dif}(t + t^{(R)}) = p_{dif}(t), \quad \Delta p^{(R)} = p_{con}^{(R)} + p_{dif}^{(R)} \quad (\Delta p^{(R)} = \Delta p|_{r=R}).$$

Здесь $p_{dif}^{(R)}$ и $p_{con}^{(R)}$ — составляющие возмущения давления на поверхности поршня, соответствующие расходящейся волне (идущей от центра) и сходящейся волне (идущей к центру).

В качестве граничного условия на поршне ($r = R$) примем условие, аналогичное (2.15)

$$-\Delta p_{con}^{(R)} + \chi p_{dif}^{(R)} = \rho_{l0} C_l w^{(R)}(t) \quad \left(w^{(R)}(t) = \frac{dR(t)}{dt} \right).$$

Здесь χ — коэффициент отражения на поршне ($\chi = 1$ и $\chi = 0$ соответствуют полному отражению и отсутствию отражения на поршне).

Из условия непрерывности давления на границе газового пузырька с учетом $a \ll R$ запишем

$$\Delta p_{dif}^{(R)}(t - t_c) + \Delta p_{con}^{(R)}(t + t_c) = \frac{a(t)}{R} (p_g(t) - p_0). \quad (3.2)$$

Учитывая, что величина $2t_c$ является также периодом функций $\Delta p_{con}^{(R)}(t)$ и $\Delta p_{dif}^{(R)}(t)$, из (3.2) получим $\Delta p^{(R)}(t - t_c) = (a(t)/R) (p_g(t) - p_0)$. Из условия (2.6), проведя выкладки

и рассуждая, как при получении (2.14), имеем

$$\rho_{l0} \left(a\ddot{a} + \frac{3}{2} \dot{a}^2 + 4 \frac{\nu_l \dot{a}}{a} \right) = p_g - p_0 + \frac{2\rho_{l0} R}{1 + \chi} \frac{d^2 \Delta R(t - t_c)}{dt^2} + \frac{1 - \chi}{1 + \chi} \frac{d}{dt} \left(\frac{a}{C_l} (p_g - p_0) \right). \quad (3.3)$$

При $\chi = 0$, когда поршень как бы «прозрачен» для волн, расходящихся от газового пузырька, из (3.3) получим уравнение, совпадающее по виду с уравнением (2.13) для начальной стадии колебаний.

На рис. 4 показано влияние амплитуды колебаний ΔR_A поршня на динамику пузырька в течение одного периода ($t_c \leq t \leq t_c + t^{(R)}$), ($0 \leq t' \leq t^{(R)}$, $t' = t - t_c$). Кружки соответствуют максимальным значениям эффективного параметра $\Delta\theta_{(m)}$ в течение одного периода. Расчеты проведены при тех же, что и выше, значениях параметров системы жидкость — газовый пузырек. Для частоты колебаний поршня принято значение $\omega^{(R)} = 2\pi \cdot 15$ кГц ($t^{(R)} = 67 \cdot 10^{-6}$ с), соответствующее первой резонансной частоте для этого объема жидкости ($R = 5 \cdot 10^{-2}$ м). При численном решении (3.3) полагалось $\chi = 0,5$, а также $a = a_0$ и $\dot{a} = 0$ ($t = t_c$). Для того чтобы решение для приведенных начальных условий было периодическим (соответствовало установившемуся режиму), необходимо выполнение условия $a = a_0$, $\dot{a} = 0$ при $t = t_c + t^{(R)}$. Для этого достаточно, чтобы сумма периода первого лидирующего колебания пузырька и протяженности осциллирующего «хвоста» умещалась в одном периоде колебаний поршня. Отметим, что выбирая таким образом начальные условия, вообще говоря, сужаем область возможных периодических решений. При отсутствии акустических потерь вне системы жидкость — пузырек ($\chi = 1$) для затухания осциллирующего «хвоста» необходим диссипативный механизм, который в данном случае обеспечивается введением эффективной вязкости, значение которой может значительно превышать величину реальной вязкости (например, вследствие межфазного теплообмена). Из рис. 4 видно, что увеличение амплитуды колебаний поршня приводит к росту амплитуды и периода первого лидирующего колебания пузырька.

На рис. 5 показана зависимость радиуса пузырька от времени при различных значениях коэффициента χ , учитывающего акустическое излучение в окружающую среду при $\Delta R_A = 0,24 \cdot 10^{-6}$ м.

Авторы выражают благодарность Н. К. Вахитовой за помощь в проведении расчетов.

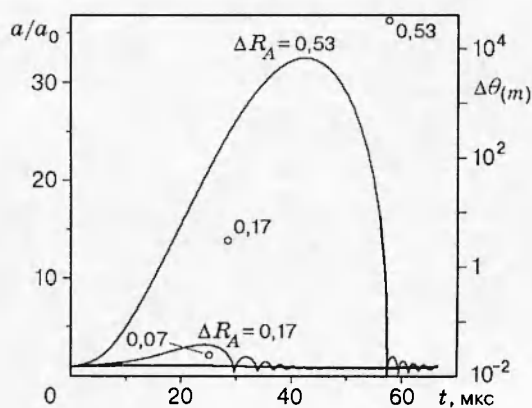


Рис. 4

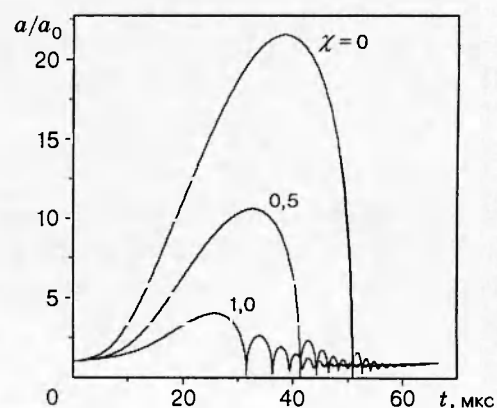


Рис. 5

ЛИТЕРАТУРА

1. Hiller R., Weninger K., Putterman S., Barber B. Effect of noble gas doping in single-bubble sonoluminescence // Science. 1994. V. 266, N 14. P. 248–250.
2. Grum L. A., Roy R. A. Sonoluminescence // Ibid. P. 233–234.
3. Маргулис М. А. Звукохимические реакции и сонолюминесценция. М.: Химия, 1986.
4. Нигматулин Р. И., Шагапов В. Ш., Вахитова Н. К., Лэхи Р. Т. Метод сверхсильного сжатия газового пузырька в жидкости непериодическим вибрационным воздействием давления умеренной амплитуды // Докл. РАН. 1995. Т. 341, № 1. С. 37–41.
5. Moss W. C., Clarke D. B., White J. W., Young D. A. Hydrodynamic simulation of bubble collapse and picosecond sonoluminescence // Phys. Fluids. 1994. V. 6, N 9. P. 2979–2985.
6. Rayleigh L. On the pressure developed in a liquid on the collapse of a spherical cavity // Philos. Mag. 1917. V. 34. P. 94.
7. Алексеев В. Н., Буланов В. А. Об уравнениях динамики сферической плоскости в сжимаемой жидкости, в звуковом поле // Акуст. журн. 1979. Т. 25, вып. 6. С. 921–924.

*Поступила в редакцию 31/VII 1996 г.,
в окончательном варианте — 16/XII 1996 г.*
