

УДК 532.526/532.61

ТЕЧЕНИЯ С ПОГРАНИЧНЫМИ СЛОЯМИ В ОБЛАСТЯХ, ИМЕЮЩИХ СВОБОДНЫЕ ГРАНИЦЫ

В. В. Кузнецов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассмотрены течения с пограничными слоями Марангони при разнонаправленных скорости внешнего потока и касательного напряжения на свободной границе. Исследованы условия возникновения противотоков. Вблизи точки контакта трех фаз выведен аналог системы уравнений Прандтля. Построены примеры решений.

Введение. Известно, что при описании достаточно интенсивного движения жидкости вблизи границ области можно выделять пограничные слои Прандтля вблизи твердых стенок и слои Марангони вблизи свободных границ. Задача для пограничного слоя Марангони сформулирована Л. Наполитано [1] и с этого времени активно изучалась с разных точек зрения [2–4], в основном в связи с приложениями к задачам космического материаловедения. В частности, в работе [2] изучены инвариантные решения этой задачи. Однако всюду рассматривался случай, когда касательное напряжение на свободной поверхности, которое, собственно, и индуцирует пограничный слой, направлено в ту же сторону, что и поток жидкости. Поскольку часто это напряжение является причиной движения жидкости, данный случай можно считать основным. Тем не менее касательное напряжение может быть направлено против основного течения. При этом в области движения возможен противоток.

В данной работе исследованы условия возникновения противотока в пограничных слоях Марангони при касательных напряжениях, направленных против основного потока жидкости, а также в слоях, сопрягающихся с покоем. Уточнены свойства решений задачи Коши для уравнения Блазиуса. Получена приближенная формула для определения расстояния от начала координат до точки возникновения противотока при заданных постоянных и разнонаправленных скорости основного потока и касательного напряжения на свободной границе. Выведен аналог системы уравнений Прандтля для описания течений с большими числами Рейнольдса вблизи точки трехфазного контакта. Для этой системы поставлена задача, построены примеры решений.

1. Постановка задачи. Основная задача для плоского стационарного пограничного слоя Марангони имеет следующий вид: в области $x > 0, y > 0$ надо определить компоненты u, v скорости движения, удовлетворяющие системе уравнений

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

с граничными условиями

$$u|_{x=0} = u_0(y), \quad \varepsilon \nu \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = f(x), \quad v|_{y=0} = 0, \quad u(x, y) \rightarrow U(x) \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty. \quad (1.2)$$

В (1.1), (1.2) плотность $\rho = \text{const}$; функции u_0, f, U являются данными задачи, а давление $p(x)$ связано со скоростью $U(x)$ внешнего течения соотношением (интеграл Бернулли) $2p(x)/\rho + U^2(x) = \text{const}$; функция $f(x)$ имеет смысл касательного напряжения вдоль свободной поверхности, которое может быть вызвано, например, термокапиллярным эффектом. В дальнейшем считаем, что $U(x) \geq 0$. Если $f(x) \leq 0$, то касательное напряжение на свободной поверхности направлено по току основного движения жидкости, если $f(x) > 0$, то против него. В этом случае, вообще говоря, можно ожидать наличия зоны противотока. Возникают вопросы, при каком соотношении параметров задачи возможен противоток и какую часть пограничного слоя он захватывает, а также какова толщина всего пограничного слоя Марангони.

В теории пограничного слоя Прандтля для оценки толщины пограничного слоя обычно используется так называемая толщина вытеснения [5]. При исследовании пограничных слоев Марангони она малоприменима, поскольку здесь может быть $U = 0$ для некоторых значений x . Введем аналог этой величины — *толщину возмущения* δ^* — равенством

$$[u(x, 0) - U(x)]\delta^* = \int_0^{\infty} [u(x, y) - U(x)] dy. \quad (1.3)$$

Введение нового термина оправдано не только некоторым отличием в определении, но и физическим смыслом: пограничный слой Марангони представляет собой возмущение скорости вблизи свободной границы; в то же время трудно представить, что свободная граница, подобно твердому телу, «вытесняет» линии тока.

2. Взаимодействие равномерного потока и поверхностного напряжения.

Пусть $U = \text{const}$, $f(x) = F/\sqrt{x}$. Тогда ищем решение задачи (1.1), (1.2) в виде $u = \partial\psi/\partial y$, $v = -\partial\psi/\partial x$, функция тока $\psi = (F\nu^2)^{1/3}\sqrt{x}h(t)$, где $t = (F/\nu)^{1/3}y/\sqrt{x}$. В таком случае функция h удовлетворяет уравнению Блазиуса [5]

$$2h''' + hh'' = 0 \quad (2.1)$$

с граничными условиями

$$h(0) = 0, \quad h''(0) = 1, \quad h' \rightarrow \frac{U}{(F^2\nu)^{1/3}} \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (2.2)$$

Вычисления показывают, что если $U = U_* \approx 2,085(F^2\nu)^{1/3}$, то имеется такое решение h_* задачи (2.1), (2.2), что $h'_*(0) = 0$, т. е. свободная поверхность неподвижна, а это решение отличается от решения классической задачи Блазиуса [5] только растяжением переменных.

Для каждого $U > U_*$ можно построить два решения задачи (2.1), (2.2), причем у одного из них $h'(t) > 0$ для всех t , а у другого имеется участок изменения аргумента, где $h'(t) < 0$. Примеры расчета задачи (2.1), (2.2) приведены на рис. 1 в виде графиков функции $h'(t)$ при некоторых значениях U . Кривая 2 соответствует значению $U = U_*$, кривые 1 и 3 — значению $U = 2U_*$. Поскольку при заданном f равновесие на свободной границе достигается при $U = U_*$, то можно полагать, что при $U > U_*$ продольная скорость всюду положительна, поэтому течения, соответствующие кривым типа 3, считаем нереализуемыми.

Чтобы установить, что произойдет при $U < U_*$, требуется уточнить свойства решений задачи Коши для уравнения Блазиуса (2.1) с начальными данными вида

$$h(0) = 0, \quad h'(0) = \beta, \quad h''(0) = \gamma. \quad (2.3)$$

Известно [6, гл. 14], что задача (2.1), (2.3) при $\beta \geq 0$ однозначно разрешима, причем $h'' > 0$ (если $\gamma > 0$) и существует предел $h'(t)$ при $t \rightarrow \infty$, который обозначим через

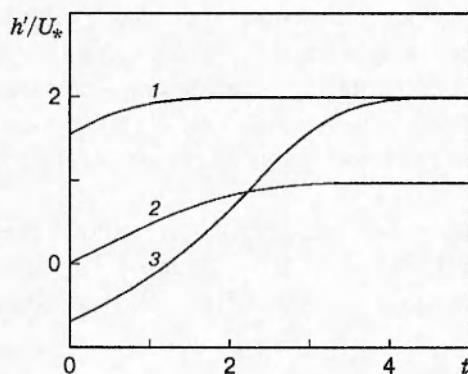


Рис. 1

$U(\beta, \gamma)$. При этом $U(\beta, \gamma)$ — непрерывная функция аргумента γ , и, если $\gamma_1 > \gamma_2$, то и $U(\beta, \gamma_1) > U(\beta, \gamma_2)$. Покажем разрешимость задачи (2.1), (2.3) и при отрицательных β .

Лемма 1. *Задача (2.1), (2.3) разрешима «в целом» при $\beta < 0$, $\gamma > 0$, причем существуют $t^* > 0$ и $t^0 \in (0, t^*)$, такие что $h(t) < 0$ при $t \in (0, t^*)$ и $h(t) > 0$ при $t > t^*$, $h'(t) < 0$ при $t \in (0, t^0)$ и $h'(t) > 0$ при $t > t^0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решение задачи Коши (2.1), (2.3) можно рассматривать как решение системы уравнений

$$h' = w, \quad w' = a, \quad a' = -ha/2,$$

проходящее через точку $t = 0, h = 0, w = \beta, a = \gamma$. Поскольку правые части уравнений этой системы суть непрерывные по Липшицу функции своих аргументов, то задача разрешима локально и это решение можно продлить в область $t > 0$ либо на всю числовую ось, либо до тех пор, пока правые части ограничены.

Заметим, что из уравнения (2.1) следует (оно является линейным относительно $h''(t)$)

$$h''(t) = \gamma \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t h(\tau) d\tau \right\}$$

и, кроме того,

$$h'(t) = \beta + \int_0^t h''(\tau) d\tau.$$

Тогда h' и h'' могут обратиться в бесконечность при некотором значении аргумента $t = t'$ только вместе с $h(t')$. Поэтому неограниченность правых частей системы означает наличие у графика функции $h(t)$ вертикальной асимптоты. Однако, так как график $h(t)$ выпуклый вниз, $h \xrightarrow[t \rightarrow t']{} +\infty$ и найдется такое значение $t = t^*$, что $h(t^*) = 0$ и из гладкости $h(t)$ следует существование $t^0 \in (0, t^*)$, $h'(t^0) = 0$. Кроме того, если обозначить $\beta^* = h'(t^*)$, $\gamma^* = h''(t^*)$, то, поскольку аргумент не входит явно в уравнение (2.1), оно инвариантно относительно сдвига точки отсчета аргумента. Тогда рассматриваемое решение будет также решением задачи Коши (2.1), (2.3), соответствующим значениям параметров $\beta = \beta^* > 0$, $\gamma = \gamma^* > 0$, поэтому его можно продолжать вправо бесконечно далеко.

Полученное противоречие показывает, что решение $h(t)$ продолжимо на всю числовую полуось. Существование конечного предела $U(\beta, \gamma)$ у функции $h'(t)$ при $t \rightarrow \infty$ можно доказать так, как это сделано в [6] при положительных β . Ясно, что если $U(\beta, \gamma) > 0$, то вновь получаем существование таких t^*, t^0 , что $h(t^*) = 0$, $h'(t^0) = 0$. Поскольку $h'(t)$

монотонно возрастает, то требуемые леммой 1 условия знакоопределенности решения и его производной будут выполнены и лемму 1 в этом случае можно считать доказанной.

Если же $U(\beta, \gamma) \leq 0$, то тогда ввиду невозможности максимумов $h(t) < 0 \forall t > 0$, поэтому $h'''(t) = -0,5h(t)h''(t) > 0$ всюду. Так как $h''(0) = \gamma > 0$, то $h''(t) > \gamma$ и существование $U(\beta, \gamma) = \lim_{t \rightarrow \infty} h'(t)$ невозможно. Следовательно, $U(\beta, \gamma)$ положительна и лемма 1 доказана.

Установим теперь свойства монотонности $U(\beta, \gamma)$ по первому аргументу.

Лемма 2. Если $\beta_1 > \beta_2 \geq 0$ или $\beta_1 < \beta_2 \leq 0$, то $U(\beta_1, \gamma) \geq U(\beta_2, \gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перейдем в задаче (2.1), (2.3) к новой независимой переменной $w = h'(t)$. Получаем

$$w = \frac{dh}{dt} = \frac{dh}{dw} \frac{dw}{dt} = \dot{h}(w)\dot{h}''(t), \quad \dot{h}''(t) = \frac{w}{\dot{h}}, \quad \dot{h}(w) = \frac{w}{h''(t)}. \quad (2.4)$$

В дальнейшем точка означает дифференцирование по w , а штрих — по t . Для функции $h(w)$ получаем задачу Коши

$$w\ddot{h} = \dot{h} + \frac{1}{2}h\dot{h}^2; \quad (2.5)$$

$$h(\beta) = 0, \quad \dot{h}(\beta) = \beta/\gamma. \quad (2.6)$$

Отображение $w: [0, \infty) \rightarrow [\beta, U(\beta, \gamma))$ в силу свойств функции $h(t)$ является гомеоморфизмом, поэтому существует взаимно однозначное соответствие между решениями задач (2.1), (2.3) и (2.5), (2.6). Отсюда и из свойств функции $h(t)$ следует, что $\dot{h}(w) < 0$ при $w < 0$ и $\dot{h}(w) > 0$ при $w > 0$, график $h(w)$ выпуклый вниз и пересекает ось ординат под прямым углом. Тот факт, что $h'(t) \rightarrow U(\beta, \gamma)$ при $t \rightarrow \infty$, означает, что $h(w)$ имеет вертикальную асимптоту при $w \rightarrow U(\beta, \gamma)$.

Пусть $\beta_1 > \beta_2 \geq 0$. Тогда, если $h_1(t), h_2(t)$ и $h_1(w), h_2(w)$ — соответствующие решения задач (2.1), (2.3) и (2.5), (2.6), то $h_2(\beta_1) > h_1(\beta_1) = 0$, так как $\dot{h}_2(w) > 0$. Кроме того, согласно (2.4) $\dot{h}_2(\beta_1) = \beta_1/h_2''(t(\beta_1))$, где под $t(w)$ понимается значение t , которое соответствует данному $w = h_2'(t)$. Но $h_2'''(t) = -0,5h_2(t)h_2''(t) < 0$, поэтому $h_2''(t) < \gamma$, отсюда $\dot{h}_2(\beta_1) > \beta_1/\gamma = \dot{h}_1(\beta_1)$. Уравнение (2.5) эквивалентно системе уравнений

$$\dot{h} = W, \quad \dot{W} = \frac{W + hW^2/2}{w}. \quad (2.7)$$

Очевидно, что при $h > 0, w > 0$ правые части системы (2.7) являются возрастающими функциями аргументов h, W . Как установлено выше, $h_2(\beta_1) > h_1(\beta_1)$ и $W_2(\beta_1) > W_1(\beta_1)$. Поэтому $h_2(w) > h_1(w)$ всюду при $w \geq \beta_1$ и, более того, разница $h_2 - h_1$ возрастает [6, гл. 3]. Это значит, что график функции $h_1(w)$ лежит ниже графика функции $h_2(w)$, поэтому он имеет вертикальную асимптоту не левее графика h_2 , т. е. $U(\beta_1, \gamma) \geq U(\beta_2, \gamma)$, что и требовалось доказать.

Если же $\beta_1 < \beta_2 \leq 0$, то в соответствии со свойствами решения $h(w)$ каждое решение задачи (2.5), (2.6) будет также решением задачи Коши для уравнения (2.5) с начальными данными

$$h(0) = h^0 < 0, \quad \dot{h}(0) = 0. \quad (2.8)$$

Поэтому и $h_1(w), h_2(w)$ будут также решениями задачи (2.5), (2.8) с некоторыми значениями h_1^0, h_2^0 параметра h^0 . Покажем, что $h_1^0 \leq h_2^0$. Имеем $\dot{h}_1(\beta_2) = \beta_2/h_1''(t(\beta_2)) > \beta_2/\gamma = \dot{h}_2(\beta_2)$, так как $h_1''(0) = \gamma$, а $h_1'''(t) = -0,5h_1(t)h_1''(t) > 0$ при тех t , где $h_1(t) < 0$. Поскольку h_1, h_2 — решения уравнения (2.5), то их разность $H = h_2 - h_1$ удовлетворяет уравнению

$$w\ddot{H} - \dot{H} \left[1 + \frac{1}{2}h_1(\dot{h}_1 + \dot{h}_2) \right] = -\frac{1}{2}\dot{h}_1^2 H, \quad (2.9)$$

которое является линейным относительно \dot{H} . Поэтому при $w \in (\beta_2, 0)$ получим

$$\dot{H}(w) = \dot{H}(\beta_2) - \frac{1}{2}e^{\zeta(w)} \int_{\beta_2}^w e^{-\zeta(\tau)} H(\tau) \dot{h}_1^2(\tau) / \tau d\tau, \quad \zeta(w) = \int_{\beta_2}^w \left[1 + \frac{1}{2}h_1(\dot{h}_1 + \dot{h}_2) \right] / \tau d\tau.$$

Если бы имелась точка $\beta_* \in (\beta_2, 0)$ пересечения графиков h_1, h_2 , то было бы $H > 0$ при $w < \beta_*$ и $H \leq 0$ при $w > \beta_*$. Очевидно, что тогда $\dot{H}(\beta_*) \leq 0$ и имело бы место равенство

$$\dot{H}(w) = \dot{H}(\beta_2) - \frac{1}{2}e^{\zeta(w)} \int_{\beta_2}^{\beta_*} e^{-\zeta(\tau)} H(\tau) \dot{h}_1^2(\tau) / \tau d\tau - \frac{1}{2}e^{\zeta(w)} \int_{\beta_*}^w e^{-\zeta(\tau)} H(\tau) \dot{h}_1^2(\tau) / \tau d\tau,$$

в правой части которого первое слагаемое отрицательно, второе положительно, причем в сумме они не превышают нуля, а третье отрицательно. Поэтому было бы $\dot{H}(0) = \dot{h}_2(0) - \dot{h}_1(0) < 0$, что противоречит (2.8).

Отсюда получаем $h_1^0 \leq h_2^0$. Если $h_1^0 < h_2^0$, то при $w > 0$ имеем

$$\dot{H}(w) = \frac{1}{2}e^{\zeta(w)} \int_0^w e^{-\zeta(\tau)} H(\tau) \dot{h}_1^2(\tau) / \tau d\tau > 0,$$

т. е. разность $h_2 - h_1$ не уменьшается и график $h_1(w)$ лежит ниже графика $h_2(w)$, поэтому $U(\beta_1, \gamma) \geq U(\beta_2, \gamma)$. Если $h_1^0 = h_2^0$, то $H(0) = \dot{H}(0) = 0$. Из (2.4) следует, что $h(w) = O(w)$ при $w \rightarrow 0$, поэтому, рассматривая (2.9) при $w \nearrow 0$, получим $\ddot{H}(0) > 0$ с учетом того, что при $w < 0$ должно быть $\dot{H} < 0$. Отсюда аналогично рассмотренному выше случаю получаем неубывание $h_2 - h_1$ при положительных w и справедливость утверждения леммы. Лемма 2 доказана.

Следствие. Если $U < U_*$, то гладких ограниченных решений задачи (2.1), (2.2) не существует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, напротив, что имеется такое решение $h(t)$ задачи (2.1), (2.2). Тогда возможны три варианта: $h'(0) > 0$, $h'(0) = 0$, $h'(0) < 0$. Согласно лемме 2 во всех случаях $U \geq U_*$, что противоречит условиям. Полученное противоречие доказывает следствие.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из сказанного выше следует, что два класса решений задачи (2.1), (2.2) (кривые 1 и 3 на рис. 1) при значениях $U > U_*$ не являются различными: по сути это одни и те же решения уравнения (2.1), сдвинутые по координате t .

Вычислим толщину возмущения для слоя Марангони в данном случае. Получаем

$$\delta^* = \frac{(\nu F)^{1/3} \sqrt{x}}{h'(0) - U/(F^2 \nu)^{1/3}} \int_0^\infty (h' - U/(F^2 \nu)^{1/3}) dt.$$

3. Взаимодействие поверхностного напряжения и градиента давления.

Пусть давление убывает вниз по потоку с постоянным градиентом P , т. е. $p = -Px$, $U(x) = \sqrt{2Px/\rho}$. Тогда при $f(x) = Fx^{1/4}$ функцию тока можно искать в виде

$$\psi(x, y) = \left(\frac{F\nu}{\rho} \right)^{1/4} x^{3/4} h(t), \quad t = \frac{y}{x^{1/4}} \left(\frac{F}{\rho\nu^2} \right)^{1/3}.$$

Тогда для определения $h(t)$ получаем граничную задачу

$$\frac{1}{2}h'^2 - \frac{3}{4}hh'' = P \left(\frac{\rho\nu}{F^2} \right)^{1/3} + h''', \quad (3.1)$$

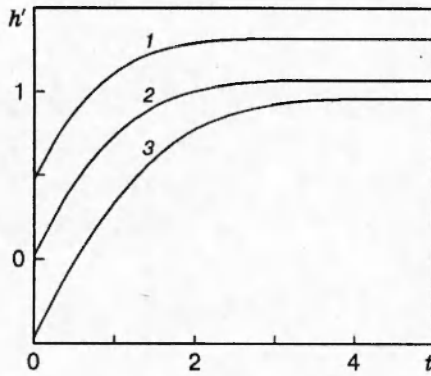


Рис. 2

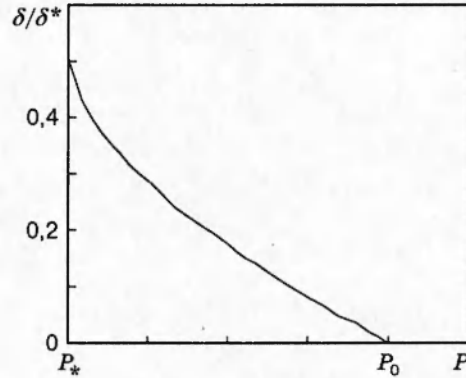


Рис. 3

$$h(0) = 0, \quad h''(0) = 1, \quad h' \rightarrow \sqrt{2P}(\rho\nu/F^4)^{1/6} \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (3.2)$$

Вычисления показывают, что существует такое критическое значение $P_* \approx 0,465(\rho\nu)^{-1/3}F^{4/3}$, что если $P < P_*$, то задача (3.1), (3.2) не имеет решения. Однако, в отличие от результатов, описанных в п. 2, решение h_* этой задачи, отвечающее значению $P = P_*$, не соответствует случаю обращения продольной скорости на свободной поверхности в нуль ($h'(0) = 0$). Этому случаю соответствует значение $P = P_0 \approx 0,576(\rho\nu)^{-1/3}F^{4/3}$, причем, если $P > P_0$, то $h'(t) > 0$ при всех $t \geq 0$, а если $P_* \leq P < P_0$, то $h'(t) < 0$ на некотором интервале $(0, \delta)$ изменения t и $h'(t) > 0$ при $t > \delta$. Это означает, что вблизи свободной поверхности имеется зона противотока, в которой жидкость течет навстречу основному потоку.

Примеры расчета задачи (3.1), (3.2) приведены на рис. 2, на котором изображены графики функции $h'(t)$ при некоторых значениях параметра P . Кривая 3 соответствует значению $P = P_*$, кривая 2 — значению $P = P_0$, кривая 1 — значению $P = 3P_0/2$.

На рис. 3 приведена зависимость толщины слоя противотока δ , измеряемого в долях толщины возмущения δ^* , от P при $P \in [P_*, P_0]$. Видно, что противоток может захватывать существенную часть всего пограничного слоя. В данном случае

$$\delta^* = \frac{(\rho\nu^2/F)^{1/3}x^{1/4}}{h'(0) - \sqrt{2P}(\rho\nu/F^4)^{1/3}} \int_0^\infty [h' - \sqrt{2P}(\rho\nu/F^4)^{1/3}] dt.$$

Если градиент давления не постоянен, а является некоторой степенью координаты x , то также можно построить примеры решений с противотоками. В данной работе эти случаи не рассматриваются.

4. Возникновение противотока. Из результатов, полученных в п. 2, следует, что если $U = \text{const}$, то для достижения равновесной ситуации $u = 0$ при $y = 0$ необходимо, чтобы величина касательного напряжения, инициирующая пограничный слой, убывала вниз по потоку обратно квадратному корню из расстояния. Поэтому ясно, что если $f(x) = F = \text{const}$, то противоток обязательно возникнет. Установим, как далеко от начала координат это произойдет, если начальный профиль скорости $u_0(y)$ мало отличается от постоянной U .

Задачу (1.1)–(1.3) в этом случае удобнее решать в безразмерных переменных. Используя при обезразмеривании U как масштаб скорости, а $i_* = \nu/U$ как масштаб длины,

сохраняя прежние обозначения, получаем систему уравнений

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.1)$$

с граничными условиями

$$u|_{x=0} = u_0(y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = \alpha, \quad v|_{y=0} = 0, \quad u(x, y) \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty, \quad (4.2)$$

где $\alpha = F/(\rho U^2)$. В качестве начального профиля скорости возьмем функцию $u_0(y) = 1 - e^{-k\alpha y}/k$. Если k велико, то u_0 мало отличается от единицы и условия (4.2) согласованы в точке $(0, 0)$.

Задача (4.1), (4.2) решалась численно с помощью метода сеток. Следует заметить, что расчеты в пограничном слое Марангони при $u > 0$ осуществляются значительно проще, чем в слое Прандтля, по крайней мере, до возникновения противотока. Это связано с тем, что трудности расчетов в пограничных слоях, отмечаемые, например, в [7], здесь отсутствуют. В то же время расчет нельзя продолжать как угодно далеко после возникновения противотока, так как возникает ситуация, подобная «обратному времени» для уравнения теплопроводности. Поскольку здесь целью является определение расстояния от начала координат до зоны противотока, последнее обстоятельство несущественно.

Для проведения вычислений применялась схема

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} + \frac{v_{i+1}^{j+1} - v_i^{j+1}}{h} = 0,$$

$$u_i^j \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} + v_i^j \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1}}{h} - \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}}{h^2},$$

где j, τ — номер узла и шаг по оси x ; i, h — по оси y ($i = 2, \dots, n-1$; $j = 2, \dots, m$), с граничными условиями $u_2^j - u_1^j = \alpha h$, $u_n^j = 1$, $u_i^j = u_0(ih)$, $v_1^j = 0$.

Чтобы найти значения v_i^j , исключим u_x из системы (4.1) и получим соотношение $-uv_y + vu_y = u_{yy}$, которое должно выполняться вплоть до линии $x = 0$. Из его разностного аналога

$$u_i^1 \frac{v_{i+1}^1 - v_i^1}{h} + v_i^1 \frac{u_{i+1}^1 - u_i^1}{h} - \frac{u_{i-1}^1 - 2u_i^1 + u_{i+1}^1}{h^2}$$

находим v_i^1 с учетом $v_1^1 = 0$.

Проведена серия расчетов, в которых параметр α варьировался от 0 до 1. На рис. 4 представлена зависимость расстояния l/l_* вниз по потоку до возникновения противотока от значения α в логарифмической шкале. Видно, что график — почти прямая, поэтому приближенно можно принять $\ln(l/l_*) \approx -1,25 - 1,98 \ln \alpha$, тогда получаем приближенную формулу

$$l \approx \frac{\nu}{U} \frac{0,285}{\alpha^{1,98}} \approx \frac{\nu}{U} \frac{0,285}{\alpha^2}.$$

5. Пограничные слои, сопрягающиеся с покоем. Пусть $U \equiv 0$, $f(x) = ax^\gamma$, тогда функцию тока можно искать в виде

$$\psi(x, y) = \left(\frac{a\nu}{\rho}\right)^{1/3} x^{(2+\gamma)/3} h(t), \quad t = \left(\frac{a}{\rho\nu^2}\right)^{1/3} yx^{(\gamma-1)/3},$$

причем для $h(t)$ возникает граничная задача

$$\frac{2\gamma+1}{3} h^2 - \frac{\gamma+2}{3} h h'' = h'''. \quad (5.1)$$

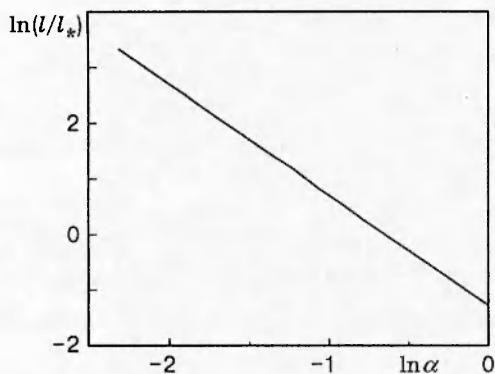


Рис. 4

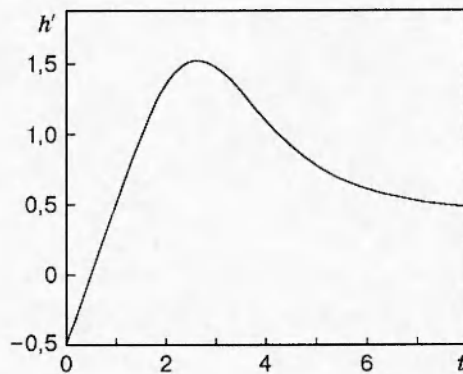


Рис. 5

$$h(0) = 0, \quad h''(0) = 1, \quad h' \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty. \quad (5.2)$$

Если $\gamma = -2$, то эта задача решается точно и соответствующее решение задачи (2.1)–(2.3) имеет вид

$$u = -\frac{6}{x} \left(\frac{a^2}{\rho^2 \nu} \right)^{1/3} \frac{1}{[(a/(\rho \nu^2))^{1/3} y/x + \sqrt{12}]^3}, \quad v = -\frac{6y}{x^2} \left(\frac{a^2}{\rho^2 \nu} \right)^{1/3} \frac{1}{[(a/(\rho \nu^2))^{1/3} y/x + \sqrt{12}]^3}.$$

При этом толщина возмущения $\delta = 3\sqrt{12}x(\rho \nu^2/a)^{1/3}$.

В п. 3 данной работы рассматривались движения с противотоками, обусловленными конкуренцией двух физических факторов: градиента давления и касательного напряжения на свободной поверхности. По динамическим причинам при сопряжении пограничного слоя с покоем могут возникать противотоки. Например, пусть $\gamma = -1$. Тогда уравнение (5.1) путем двукратного интегрирования с учетом граничных значений (5.2) может быть приведено к уравнению Риккати вида $h' = -h^2/6 - t + h'(0)$. Если $h'(0) < 0$, то можно ожидать наличия у этого уравнения такого решения $h(t)$, что $h'(t) < 0$ при $t \in (0, \delta)$ и $h'(t) > 0$ при $t > \delta$. Кроме того, $h = O(1/\sqrt{t})$ при $t \rightarrow \infty$.

Пример такого решения приведен на рис. 5, где изображен график функции $h'(t)$. Заметим, что здесь не может быть подсчитана толщина возмущения: интеграл в правой части определения (1.3) будет расходящимся.

6. Пограничный слой вблизи точки трехфазного контакта. Область движения может иметь твердые и свободные границы, пересекающиеся под некоторым углом. Если движение жидкости достаточно интенсивно, то вблизи как твердых, так и свободных границ области можно выделять пограничные слои. До настоящего времени вопрос о возможности прохождения пограничного слоя через точку контакта не исследовался. Математически он сводится к задаче выделения асимптотической при больших числах Рейнольдса формы уравнений Навье — Стокса, применимой для описания течения вблизи точки контакта.

Пусть движение происходит в области, занимающей квадрант $x > 0$, $y > 0$, причем линия $\{x = 0\}$ суть твердая стенка, а $\{y = 0\}$ — свободная граница. Положим, что кинематические и динамические условия на этих границах имеют вид

$$u|_{x=0} = v|_{x=0} = 0, \quad \rho \nu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = f(x), \quad v|_{y=0} = 0. \quad (6.1)$$

Пусть ξ, η — произвольная система криволинейных ортогональных координат, а v_ξ, v_η —

компоненты вектора скорости в этой системе. Тогда уравнения Навье — Стокса имеют вид [5]

$$\begin{aligned} \frac{v_\xi}{H_\xi} \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + \frac{v_\eta}{H_\eta} \frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} + \frac{v_\eta}{H_\xi H_\eta} \left(v_\xi \frac{\partial H_\xi}{\partial \eta} - v_\eta \frac{\partial H_\eta}{\partial \xi} \right) = -\frac{1}{\rho H_\xi} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \nu \left[\frac{1}{H_\xi^2} \frac{\partial^2 v_\xi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{H_\eta^2} \frac{\partial^2 v_\xi}{\partial \eta^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{H_\xi H_\eta} \frac{\partial(H_\eta/H_\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + \frac{1}{H_\xi H_\eta} \frac{\partial(H_\xi/H_\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} + \frac{2}{H_\xi^2 H_\eta} \frac{\partial H_\xi}{\partial \eta} \frac{\partial v_\eta}{\partial \xi} - \frac{2}{H_\xi H_\eta^2} \frac{\partial H_\eta}{\partial \xi} \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} + \right. \\ \left. + \frac{1}{H_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{H_\xi H_\eta} \frac{\partial H_\eta}{\partial \xi} \right) v_\xi + \frac{1}{H_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{H_\xi H_\eta} \frac{\partial H_\xi}{\partial \eta} \right) v_\xi + \frac{1}{H_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{H_\xi H_\eta} \frac{\partial H_\xi}{\partial \eta} \right) v_\eta - \right. \\ \left. - \frac{1}{H_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{H_\xi H_\eta} \frac{\partial H_\eta}{\partial \xi} \right) v_\eta \right]; \quad (6.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{v_\xi}{H_\xi} \frac{\partial v_\eta}{\partial \xi} + \frac{v_\eta}{H_\eta} \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} - \frac{v_\xi}{H_\xi H_\eta} \left(v_\xi \frac{\partial H_\xi}{\partial \eta} - v_\eta \frac{\partial H_\eta}{\partial \xi} \right) = -\frac{1}{\rho H_\eta} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \nu \left[\frac{1}{H_\xi^2} \frac{\partial^2 v_\eta}{\partial \xi^2} + \frac{1}{H_\eta^2} \frac{\partial^2 v_\eta}{\partial \eta^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{H_\xi H_\eta} \frac{\partial(H_\eta/H_\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial v_\eta}{\partial \xi} + \frac{1}{H_\xi H_\eta} \frac{\partial(H_\xi/H_\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} - \frac{2}{H_\xi^2 H_\eta} \frac{\partial H_\xi}{\partial \eta} \frac{\partial v_\eta}{\partial \xi} + \frac{2}{H_\xi H_\eta^2} \frac{\partial H_\eta}{\partial \xi} \frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} + \right. \\ \left. + \frac{1}{H_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{H_\xi H_\eta} \frac{\partial H_\eta}{\partial \xi} \right) v_\eta + \frac{1}{H_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{H_\xi H_\eta} \frac{\partial H_\xi}{\partial \eta} \right) v_\eta - \frac{1}{H_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{H_\xi H_\eta} \frac{\partial H_\xi}{\partial \eta} \right) v_\xi + \right. \\ \left. + \frac{1}{H_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{H_\xi H_\eta} \frac{\partial H_\eta}{\partial \xi} \right) v_\xi \right]; \quad (6.3) \end{aligned}$$

$$H_\eta \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + H_\xi \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} + v_\xi \frac{\partial H_\eta}{\partial \xi} + v_\eta \frac{\partial H_\xi}{\partial \eta} = 0 \quad (6.4)$$

(H_ξ, H_η — коэффициенты Ламе соответствующих координат).

Положим $\xi = (x^2 - y^2)/2$, $\eta = xy$. Тогда $d\xi = xdx - ydy$, $d\eta = ydx + xdy$, поэтому $dx^2 + dy^2 = (d\xi^2 + d\eta^2)/(x^2 + y^2)$ или $H_\xi = H_\eta = (x^2 + y^2)^{-1/2} = (\xi^2 + \eta^2)^{-1/4}/\sqrt{2}$.

Рассмотрим порядки величин в данной задаче. Пусть напряжение на свободной поверхности — причина движения жидкости и происходит движение жидкости с большими числами Рейнольдса. Обозначим через V порядок скорости, l — характерный размер области, δ — толщину слоя больших градиентов скорости у границ области движения при удалении от них (пограничного слоя), F — порядок $f(x)$. Аналогично тому как это сделано в работе [3], легко оценить значения V , Re , δ . Из уравнений движения и граничных условий получаем порядковые соотношения $V^2/l = \nu V/\delta^2$, $\rho \nu V/\delta = F$, откуда

$$\delta = \left(\frac{l \rho \nu^2}{F} \right)^{1/3}, \quad V = \frac{F \delta}{\rho \nu}, \quad Re = \left(\frac{l^4 F^2}{\rho^2 \nu^4} \right)^{1/3}.$$

Поэтому, если Re велико, то $\delta = l/\sqrt{Re} \ll l$, а $\delta/l \ll 1$.

Выделим асимптотическую форму уравнений (6.2)–(6.4), полагая $v_\xi \sim V$, $v_\eta \sim \delta V/l$, $\xi \sim l^2$, $\eta \sim \delta l$. Рассмотренный выше пример, важный для приложений, показывает, что такие порядки величин вполне реальны. При этом $H_\xi \sim H_\eta \sim 1/l$. Удерживая члены старшего относительно δ/l порядка, получаем аналог системы уравнений Прандтля

$$v_\xi \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + v_\eta \frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \nu \sqrt{\frac{2|\xi|}{|\eta|}} \frac{\partial^2 v_\xi}{\partial \eta^2}; \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} - \frac{v_\xi}{2\xi} = 0. \quad (6.6)$$

Граничные условия (6.1) при $Re \rightarrow \infty$ примут вид

$$v_\xi, v_\eta \Big|_{\eta=0, \xi < 0} = 0, \quad \frac{\rho\nu}{2\sqrt{|\xi|}} \frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0, \xi > 0} = f(\xi), \quad v_\eta \Big|_{\eta=0, \xi > 0} = 0. \quad (6.7)$$

В силу первого из уравнений (6.6) можно полагать $p = p(\xi)$ и ввести $U(\xi)$ — скорость внешнего (потенциального) движения на границах области. При этом случай $\xi < 0$ соответствует границе $\{x = 0\}$, а $\xi > 0$ — границе $\{y = 0\}$.

Считая $f \leq 0$, получаем, что задача (6.5)–(6.7) соответствует случаю перехода пограничного слоя Прандтля в слой Марангони. Очевидно, что наряду с условиями (6.7) можно рассматривать условия

$$\frac{\rho\nu}{2\sqrt{|\xi|}} \frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0, \xi < 0} = f(\xi), \quad v_\eta \Big|_{\eta=0, \xi < 0} = 0, \quad v_\xi, v_\eta \Big|_{\eta=0, \xi > 0} = 0, \quad (6.7')$$

которые соответствуют случаю перехода слоя Марангони в слой Прандтля. При этом жидкость натекает на твердую стенку.

Заметим, что при $\xi = 0$ должно быть $U = 0$. Кроме того, градиент давления $\partial p / \partial \xi$ при $\xi = 0$ может иметь разрыв первого рода. В этом случае решение задачи (6.5)–(6.7) будем понимать в смысле [8], где рассмотрен пограничный слой Прандтля с разрывным градиентом давления.

Второе из уравнений (6.6) позволяет ввести функцию тока ψ , так что $v_\xi = \sqrt{|\xi|} \partial \psi / \partial \eta$, $v_\eta = -\sqrt{|\xi|} \partial \psi / \partial \xi$. Переходя к переменным Мизеса ξ , ψ , $w = v_\xi^2$, получаем уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = -\frac{2}{\rho} \frac{dp}{d\xi} + \frac{\nu\sqrt{2w}}{\sqrt{|\xi|}} \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2},$$

которое заменой $s = \int_{\xi_0}^{\xi} \sqrt{2/|\xi|} d\xi$ приводится к классическому уравнению Мизеса теории пограничного слоя

$$\frac{\partial w}{\partial s} = -\frac{2}{\rho} \frac{dp}{ds} + \nu\sqrt{w} \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2}.$$

При этом граничные условия (6.7) примут вид

$$w \Big|_{\psi=0, s < s_0} = 0, \quad \rho\nu \frac{\partial w}{\partial \psi} \Big|_{\psi=0, s > s_0} = f(s).$$

Аналогично тому можно записать и условия для перехода слоя Марангони в слой Прандтля.

Рассмотрим некоторые примеры. Если в задаче (6.5)–(6.7) положить $f(\xi) = -F\xi^{3\beta+1}$, $U^2(\xi) = 2P|\xi|^{4\beta+3} / [\rho(4\beta+3)]$, то ее решение можно искать в виде

$$\psi = \left(\frac{2P\nu^2}{\rho}\right)^{1/4} |\xi|^{\beta+1} h(t), \quad t = \left(\frac{P}{2\rho\nu^2}\right)^{1/4} |\xi|^\beta \eta. \quad (6.8)$$

Так как должно быть $U(\xi) = 0$, то $\beta > -3/4$. Подставляя это представление в задачу (6.5)–(6.7), получаем, что при $\xi < 0$ ее решение имеет вид (6.8), где $h(t)$ — решение задачи

$$h''' = 1 - \frac{4\beta+3}{2} h'^2 + (\beta+1)hh''; \quad (6.9)$$

$$h(0) = h'(0) = 0, \quad \dot{h}'(\bar{t}) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{4\beta + 3}} \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (6.10)$$

При $\xi = 0$ будет $v_\xi = v_\eta = 0$, а при $\xi > 0$ решение вновь имеет вид (6.8), где $h(t)$ — решение задачи

$$h''' = -1 + \frac{4\beta + 3}{2} h'^2 - (\beta + 1) h h''; \quad (6.11)$$

$$h(0) = 0, \quad \dot{h}''(\hat{0}) = -\mu, \quad h'(t) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{4\beta + 3}} \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (6.12)$$

Если $\beta > -1/2$, то сконструированное таким образом решение задачи (6.5)–(6.7) будет гладким всюду. Если $\beta = -1/2$, то градиент давления $dp/d\xi$ при $\xi = 0$ имеет разрыв первого рода и решение надо понимать в смысле [8]. При этом решение не гладко только в координатах ξ, η , в декартовых координатах оно будет гладким. Если же $-4/3 < \beta < -1/2$, то при $\xi = 0$ градиент давления обращается в бесконечность. Здесь требуются специальные исследования, чтобы понять, имеется ли в таких решениях смысл. Если источником движения является термокапиллярный эффект (как при бестигельной зонной плавке в условиях невесомости), то можно ожидать, что случай $\beta = -1/2$ будет реализовываться чаще всего. Задачи (6.9), (6.10) и (6.11), (6.12) решены численно как при $\beta = -1/2$, так и при $\beta > -1/2$. Поведение распределения скорости $\dot{h}(t)$ при этом имеет обычный для пограничных слоев вид [2, 5]. Построенные примеры показывают, что граничная задача (6.5)–(6.7) может быть использована для анализа течений вблизи точки трехфазного контакта.

7. Выводы. При изучении возможности противотока представляется естественным нахождение такого соотношения параметров задачи, при котором свободная граница неподвижна. Тогда, изменяя это соотношение в ту или другую сторону, можно ожидать наличия как возвратных течений, так и обычных решений с однонаправленной продольной скоростью.

В данной работе подробно исследованы случаи, когда основной поток имеет постоянную скорость или характеризуется постоянным градиентом давления (случай переменного градиента давления отличается от последнего принципиально).

В случае $U = \text{const}$ равновесие на свободной поверхности достигается при касательном напряжении $f(x) = F/\sqrt{x}$, если $U = U_*$ (постоянная U_* определена в п. 1). При каждом $U > U_*$ строится два решения, одно из которых физически нереализуемо, а другое не имеет противотоков. Дополнительные исследования задачи Коши для уравнения Блазиуса (они имеют самостоятельное значение) показывают, что при $U < U_*$ у рассматриваемой задачи отсутствуют автомодельные решения.

Иная ситуация возникает, когда в основном потоке продольный градиент давления равен постоянной $-P$. Здесь также вычисляется значение $P = P_0$, при котором на свободной границе наблюдается равновесие, но решения, имеющие физический смысл, существуют как при $P > P_0$, так и при $P < P_0$. В последнем случае область течения содержит зону противотока, которая захватывает тем большую часть всего пограничного слоя, чем меньше P .

Случай постоянных скорости внешнего течения и касательного напряжения характеризуется тем, что при удалении от начала координат вниз по потоку обязательно возникает область возвратных течений, так как равновесие свободной границы требует убывания напряжения вниз по потоку обратно пропорционально квадратному корню расстояния. В работе получена приближенная формула для расчета расстояния до зоны противотока.

Область движения может иметь пересекающиеся под некоторым углом твердые стенки и свободные границы. Тогда при решении задачи методом выделения пограничных

слоев возникает проблема возможности прохождения пограничного слоя через точку контакта. В работе выделена асимптотическая (при больших числах Рейнольдса) форма уравнений Навье — Стокса, применимая для описания течений вблизи точки контакта. Построены примеры расчета.

Автор выражает благодарность Г. Б. Волковой за помощь при проведении расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Napolitano L. G.** Marangoni boundary layers // Proc. 3rd Europ. symp. on material sci. in space. Grenoble, 1979. P. 349–358.
2. **Napolitano L. G., Golia C.** Coupled Marangoni boundary layers // Acta Astronaut. 1981. V. 8, N 5/6. P. 417–434.
3. **Batishchev V. A., Kuznetsov V. V., Pukhnachov V. V.** Marangoni boundary layers // Prog. Aerospace Sci. 1989. V. 26. P. 353–370.
4. **Кузнецов В. В.** О существовании пограничного слоя вблизи свободной поверхности // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1984. Вып. 67. С. 68–75.
5. **Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.** Теоретическая гидромеханика. М.: Гостехтеоретиздат, 1948. Ч. 2.
6. **Хартман Ф.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
7. **Флетчер К.** Вычислительные методы в динамике жидкостей. М.: Мир, 1991. Т. 1.
8. **Джураев Т. Д.** О системе уравнений теории пограничного слоя для стационарного течения несжимаемой жидкости // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 11. С. 2068–2083.

*Поступила в редакцию 30/V 1997 г.,
в окончательном варианте — 29/X 1997 г.*
