

18. Joyce G., Montgomery D. Negative temperature states for the two-dimensional guiding-center plasma. — J. Plasma Phys., 1973, vol. 10, p. 1.
 19. Старр В. Физика явлений с отрицательной вязкостью. М.: Мир, 1971.
 20. Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика. Т. 2. М.: Мир, 1978.

УДК 532.517.4

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЫБРОСОВ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ

А. А. Прасковский

(Москва)

Для описания турбулентных пульсаций в некоторой точке потока в статистической гидромеханике используются энергетические спектры, функции распределения вероятностей (ФРВ) и связанные с ними моментные и масштабные числовые характеристики. Однако эти функции не описывают возникающие в турбулентных потоках мгновенные возмущения, особенно важные для ряда технических приложений.

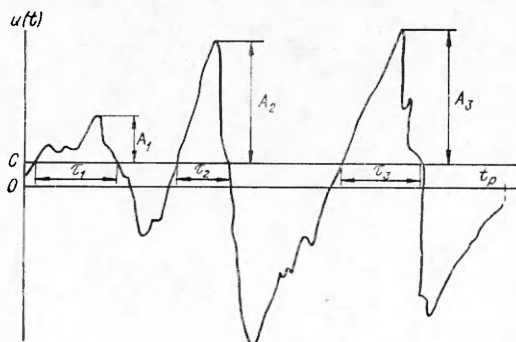
Возможен другой подход к изучению турбулентности, состоящий в анализе выбросов, т. е. превышений пульсационным компонентом скорости потока некоторого заданного уровня. Кроме практических приложений, характеристики выбросов, определяемые совместным распределением вероятностей пульсационной скорости потока и ее производной, представляют интерес с точки зрения развиваемых в настоящее время методов описания турбулентных течений на основе уравнений для ФРВ. Такой подход можно использовать при исследовании перехода от ламинарного течения к турбулентному, характеризующегося появлением случайно распределенных локальных областей с большими градиентами параметров.

В настоящее время продолжает развиваться теория выбросов случайных процессов, разрабатываемая в основном для целей радиофизики (см., например, [1]). Имеющиеся теоретических результатов недостаточно для количественного описания мгновенных возмущений в турбулентных потоках, однако они полезны для качественного анализа рассматриваемых вопросов. Отдельные опытные данные о параметрах выбросов в турбулентных течениях имеются в [2—4].

Цель данной работы — выявление функционального вида и определение количественных зависимостей характеристик выбросов от стандартных параметров пульсаций потока (среднеквадратичного уровня, интегрального масштаба и т. п.) в широком диапазоне изменения числа Рейнольдса турбулентности.

Пусть $u(t)$ (t — время) — продольная составляющая пульсационной скорости потока. На фиг. 1 приведена реализация процесса $u(t)$ длительностью t_p . Назовем выбросом превышение сигналом $u(t)$ заданного уровня C . Длительности τ_i , амплитуды A_i , а также количество выбросов N (для реализации, приведенной на фиг. 1, $N = 3$) являются случайными величинами. По выборкам τ_i , A_i ($i = 1, 2, \dots, N$) можно построить ФРВ $\Phi_\varphi(\varphi)$ (где $\varphi = \tau, A$), определить среднее число выбросов в единицу времени $n = N/t_p$, а также средние $m_\varphi = \langle \varphi_i \rangle$ и среднеквадратичные $\sigma_\varphi = \sqrt{\langle (\varphi_i - m_\varphi)^2 \rangle}$ значения длительностей и амплитуд (угловые скобки означают осреднение по выборке или по времени t).

Характеристики выбросов определены для 7 реализаций. Первые 4 реализации представляли пульсации продольной составляющей скорости потока в плоскости симметрии следа за круговым цилиндром диаметром $d = 36$ мм, установленным на срезе сопла аэродинамической трубы диаметром 1200 мм. Значения скоростей истечения воздуха из сопла U_0 , чисел Рейнольдса $Re = U_0 d / \nu$ и средних скоростей потока в точке измерений U приведены в таблице. Измерения проводились тер-



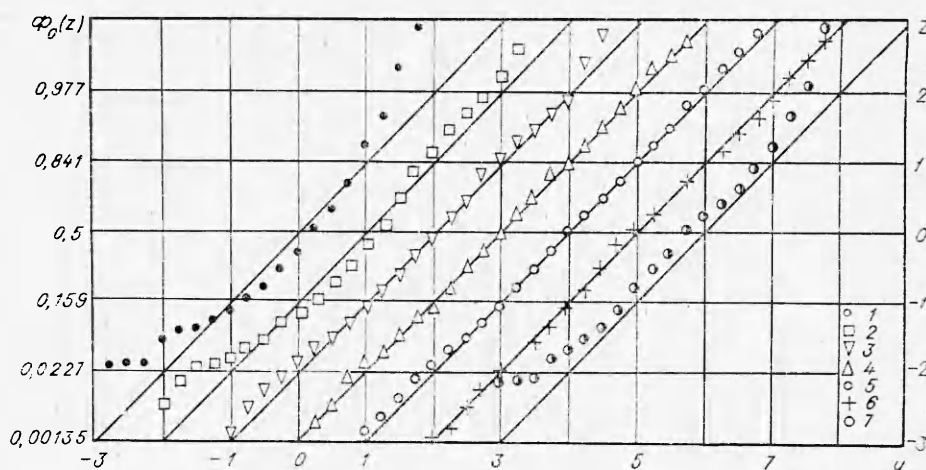
Ф и г. 1

Номер реализации	1	2	3	4	5	6	7
U_0 , м/с	5,24	10,5	25,5	51,5	137	241	—
$Re \cdot 10^{-5}$	0,126	0,253	0,613	1,24	5,24	9,22	—
U , м/с	4,08	8,64	20,8	42,9	133	200	—
u'/U , %	11,1	10,4	9,88	9,32	4,20	6,06	—
T , мс	9,12	6,77	5,23	2,71	0,163	0,395	3,02
$Re_T \cdot 10^{-4}$	0,112	0,350	1,50	3,10	0,815	6,35	—
f_B , Гц	100	125	160	315	5000	2000	250
$S \cdot 10^2$	11,4	5,05	-1,32	-6,26	-31,4	-29,6	-0,18
$E \cdot 10^2$	40,0	-7,79	-4,25	-18,2	-28,8	-10,1	1,08
λ , мс	6,87	4,58	4,11	1,97	0,0983	0,252	2,68
Сигнал/фон, дБ	45	45	45	44	29	32	42
Точки на фиг. 2—6	5	4	3	2	1	6	7

моанемометром постоянной температуры 55A01 фирмы «DISA» с датчиком 55A22 (проволока из платинированного вольфрама диаметром 5 мкм и длиной 1 мм). Реализации 5 и 6 представляли пульсации полного давления $p(t)$ в выходном сечении модели дозвукового воздухозаборника. Легко показать (см., например, [5]), что если пренебречь пульсациями статистического давления и плотности, то при небольших интенсивностях пульсаций скорости величины $p(t)$ и $u(t)$ в фиксированной точке потока связаны линейной зависимостью $p(t) = \rho U u(t)$, где ρ — плотность газа. Значения средних по расходу скоростей потока в канале модели U_0 , чисел Рейнольдса $Re = U_0 D / \nu$ (D — диаметр канала в выходном сечении) и средних скоростей в точке измерений U приведены в таблице. Пульсации полного давления измерялись датчиком ДМИ-П-0,6, подключенным к усилителю 4-АНЧ-22. Реализация 7 представляла выходной сигнал генератора нормального белого шума Г2-37, пропущенный через RC-фильтр низких частот ($R = 3$ кОм, $C = 1$ мкФ). Реализации 1—7 записаны на ЧМ магнитограф «MR 800 A Labcorder» в диапазоне частот 0—5 кГц. Продолжительность кадра записи пульсаций скорости составляла 45 с, пульсаций давления — 30 с, нормального шума — 1 мин.

Обработка сигналов проводилась на ЭЦВМ. Каждая реализация сначала анализировалась в диапазоне частот 0—5 кГц при частоте опроса аналого-цифрового преобразователя $f_0 = 20$ кГц. При этом определялся среднеквадратичный уровень пульсаций скорости u' и интегральный временной масштаб T , по которому из условия $2\pi T f_B \approx 5$ вычислялась верхняя граница энергосодержащих частот f_B . (Число 5 выбрано в значительной мере произвольно, так как понятие «энергосодержащие частоты» строго не определено. Согласно приведенным в [6] данным, в диапазоне частот до $f_B = 5/(2\pi T)$ сосредоточено примерно 80% энергии турбулентности.) Значения интенсивностей пульсаций скорости, интегральных масштабов времени, чисел Рейнольдса турбулентности $Re_T = u' L / \nu$ ($L = TU$) и граничных частот f_B приведены в таблице.

Дальнейшая обработка сигналов проводилась в диапазоне частот 1 Гц — f_B , при этом использовались фильтры с крутизной характеристики 48 дБ/октаву. В энергосодержащих частотах для реализаций 1—7 вычислены среднеквадратичные уровни $\sigma = \sqrt{\langle u^2(t) \rangle}$, коэффициенты асимметрии $S = \langle u^3(t) \rangle / \sigma^3$ и эксцесса $E = \langle u^4(t) \rangle / \sigma^4 - 3$, ФРВ и величины $\lambda = \sqrt{2 \langle u^2(t) \rangle / \langle (\partial u / \partial t)^2 \rangle}$. (Так как анализ проводился в энергосодержащих частотах, полученные в опытах характерные времена процессов λ не следует отождествлять с временными микромасштабами Тейлора.) Значения параметров S , E , λ , а также отношений уровней сигнала и фона аппарату-



Ф и г. 2

ры на выходе магнитографа в диапазоне частот $1 \text{ Гц} - f_b$ приведены в таблице.

Характеристики выбросов для каждого значения уровня C вычислялись по отрезкам реализаций, обеспечивающим объем выборки $N = 512$. Относительные статистические погрешности определения величин m_Φ и σ_Φ при этом составляли 4,4 и 6,3% соответственно. Специальное исследование показало, что для корректного определения функций $\Phi_\Phi(\varphi)$ частота опроса должна удовлетворять условию $f_0 m_\tau \geq 50$. В проведенных опытах величина f_0 изменялась в соответствии с этим условием от 5 до 800 кГц.

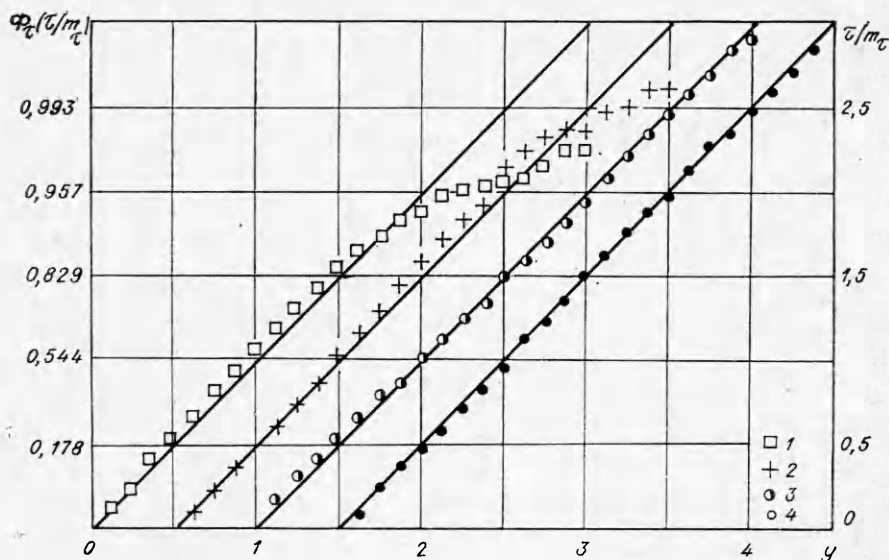
Опыты показали, что для реализаций 1—6 ФРВ пульсаций потока близки к нормальным. Очевидно, что ФРВ для реализации 7 является гауссовой. Поэтому можно ожидать, что к рассматриваемым реализациям применимы теоретические результаты для нормальных случайных процессов.

Результаты измерений позволили заключить, что ФРВ длительностей выбросов пульсаций скорости потока при $c = C/\sigma \leq 1,5$ подчиняются логарифмически нормальному закону. В качестве иллюстрации на фиг. 2 в вероятностной шкале координат приведены некоторые опытные данные. Графики построены следующим образом. По оси абсцисс (с соответствующим сдвигом) отложены значения величины $z = (x - m_x)/\sigma_x$, где $x = \ln(\tau/\lambda)$, $m_x = \langle x_i \rangle$, $\sigma_x^2 = \langle (x_i - m_x)^2 \rangle$, по оси ординат — линейная шкала чисел z и соответствующие им значения интеграла вероятностей

$$(1) \quad \Phi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

На фиг. 2 сплошные линии — зависимость (1). Измерения: 1 — $c = 2,5$, $z = y$; 2 — $c = 2,0$, $z = y - 1$; 3 — $c = 1,5$, $z = y - 2$; 4 — $c = 1,0$, $z = y - 3$; 5 — $c = 0,5$, $z = y - 4$; 6 — $c = 0$, $z = y - 5$; 7 — $c = 0$, $z = y - 6$.

Обозначения для разных реализаций приведены в таблице. Существенные отличия ФРВ длительностей выбросов от закона (1) для реализаций 1—6 проявляются при $c \geq 2$. Однако для нормального шума ФРВ длительностей выбросов даже при $c = 0$ не являются логарифмически нормальными (см. фиг. 2). Логарифмически нормальное распределение длительностей выбросов турбулентных пульсаций в энергосодержащих частотах зафиксировано в [3] при исследовании пульсаций скорости потока в пограничном слое, плоской струе и за решетками при $c = 0$, а также пульсаций концентрации пассивной примеси в спутной и затопленной круглых струях при малых c (см. [2]). Этот эффект не является общим свойством нормальных случайных процессов, а связан с физическим механизмом фор-



Ф и г. 3

мирования развитой турбулентности и допускает следующую качественную интерпретацию. Как показано в [7], логарифмически нормальное распределение асимптотически соответствует распределению по размерам частиц, получаемых в результате последовательных независимых дроблений. (Размер мгновенных турбулентных образований l линейно связан с τ соотношением $l = \tau U$). Логарифмически нормальное распределение длительностей выбросов подтверждает, что физической моделью каскадного процесса образования все меньших турбулентных вихрей в энерго-содержащих частотах является процесс последовательного независимого дробления крупных вихрей (см., например, [8]).

Известно (см., например, [1]), что при больших c ФРВ длительностей выбросов нормальных случайных процессов стремятся к закону Рэля, который в принятых обозначениях можно записать в виде

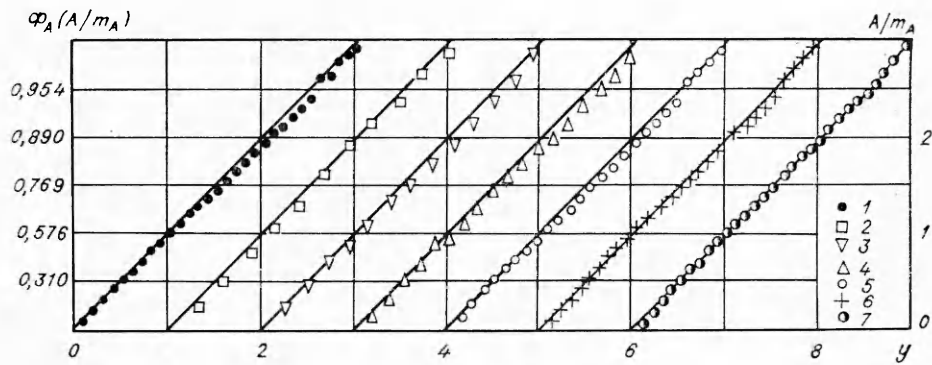
$$(2) \quad \Phi_{\tau}(\tau) = 1 - \exp\left[-\frac{\pi}{4}\left(\frac{\tau}{m_{\tau}}\right)^2\right].$$

Измерения показали, что зависимость (2) применима при $c \geq 2$, причем соответствие опытных данных с формулой (2) улучшается при увеличении c . В качестве иллюстрации этого утверждения на фиг. 3 в вероятностной шкале координат приведены некоторые результаты измерений ФРВ длительностей выбросов при больших уровнях. Сплошные линии — зависимость (2). Измерения: 1 — $c = 1,9$, $\tau/m_{\tau} = y$; 2 — $c = 2,4$, $\tau/m_{\tau} = y - 0,5$; 3 — $c = 2,3$, $\tau/m_{\tau} = y - 1$; 4 — $c = 2,5$, $\tau/m_{\tau} = y - 1,5$.

Рассмотрим ФРВ амплитуд выбросов. Известно (см., например, [1]), что максимумы широкополосных нормальных случайных процессов распределены по нормальному закону. Хотя амплитуды возмущений не идентичны максимумам, фигурирующим в теории выбросов, можно ожидать, что величины A_i , являющиеся дискретными значениями нормальной случайной функции, также подчиняются распределению Гаусса. Для абсолютных значений амплитуд (рассматривается $c \geq 0$) нормальный закон запишется в виде

$$(3) \quad \Phi_A(A) = 2\Phi_0\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{A}{m_A}\right) - 1.$$

Представленные на фиг. 4 в вероятностной шкале координат некоторые результаты измерений ФРВ амплитуд выбросов хорошо описываются выражением (3) при $0 \leq c \leq 2,5$. Сплошные линии — зависимость (3). Измерения: 1 — $c = 2,5$, $A/m_A = y$; 2 — $c = 2,0$, $A/m_A = y - 1$; 3 —



Ф и г. 4

$c = 1,5$, $A/m_A = y - 2$; $4 - c = 1,0$, $A/m_A = y - 3$; $5 - c = 0,5$, $A/m_A = y - 4$; $6 - c = 0$, $A/m_A = y - 5$; $7 - c = 1,5$, $A/m_A = y - 6$. В [3] нормальный закон распределения амплитуд выбросов пульсаций скорости потока получен в пограничном слое, плоской струе и за решетками при $c = 0$. Соответствие ФРВ амплитуд выбросов нормального шума распределению (3) является естественным результатом.

Обнаруженная в проведенных опытах универсальность ФРВ длительностей и амплитуд выбросов пульсаций скорости потока в энергосодержащих частотах существенно упрощает выявление зависимостей параметров выбросов от стандартных характеристик турбулентности. Для этого достаточно связать определяющие моменты полученных распределений со стандартными параметрами пульсаций при разных уровнях.

Логарифмически нормальный закон, описывающий ФРВ длительностей выбросов при $c \leq 1,5$, определяется величинами m_x и σ_x . Известно (см., например, [9]), что для случайных процессов с логарифмически нормальным распределением вероятностей величины m_x и σ_x однозначно связаны с параметрами m_τ и σ_τ . В принятых обозначениях эта связь имеет вид

$$(4) \quad m_x = \ln \frac{m_\tau/\lambda}{\sqrt{1 + (\sigma_\tau/m_\tau)^2}}, \quad \sigma_x^2 = \ln \left[1 + \left(\frac{\sigma_\tau}{m_\tau} \right)^2 \right].$$

На фиг. 5 результаты измерений средних длительностей выбросов сопоставлены с теоретической зависимостью для нормальных случайных процессов (см. [1]):

$$(5) \quad m_\tau/\lambda = \sqrt{2\pi} [1 - \Phi_0(c)] e^{(1/2)c^2}.$$

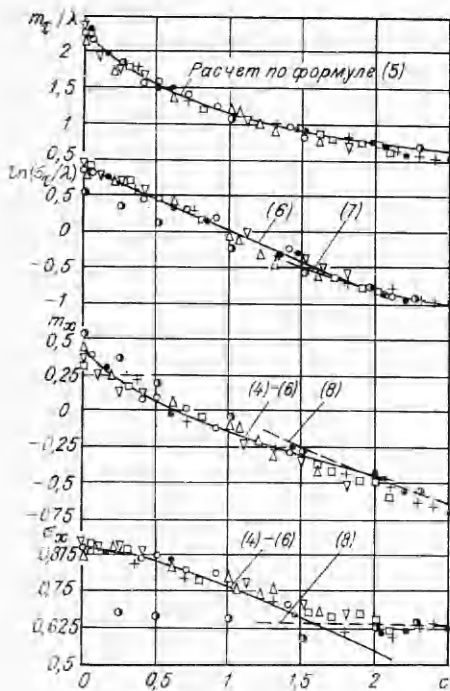
Формула (5) хорошо описывает опытные данные при $c \leq 2,1$.

Теоретическая зависимость среднеквадратичных уровней длительностей выбросов от уровня в литературе отсутствует. Приведенные на фиг. 5 данные измерений при $c \leq 2,1$ можно аппроксимировать приближенной формулой вида

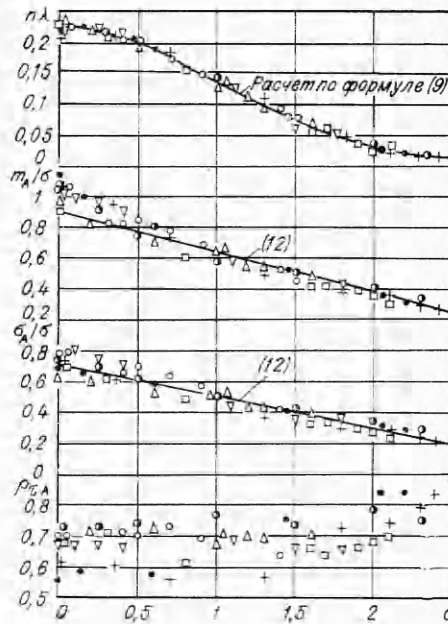
$$(6) \quad \sigma_\tau/\lambda = \alpha e^{-\beta c},$$

где α и β — эмпирические коэффициенты. Значения величин $\alpha = 2,48$ и $\beta = 0,868$ определены методом наименьших квадратов при $c \leq 2,1$ по приведенным на фиг. 5 опытным данным для реализаций 1—6. Видно, что для нормального шума соотношение (6) неприменимо.

Результаты расчета средних m_x и среднеквадратичных σ_x значений логарифмов длительностей выбросов по соотношениям (4) — (6) для реализаций 1—6 удовлетворительно согласуются с данными измерений при $c \leq 1,5$ (см. фиг. 5), что подтверждает вывод о логарифмически нормальном распределении длительностей выбросов турбулентных пульсаций при малых уровнях. В [3] для исследованных турбулентных течений при



Фиг. 5



Фиг. 6

$c = 0$ получены приближенные оценки следующих величин: $\langle \lg(\tau/m_\tau) \rangle \approx -0,26$, $\sqrt{\langle (\lg(\tau/m_\tau) - \langle \lg(\tau/m_\tau) \rangle)^2 \rangle} \approx 0,37$. Из соотношений (4)–(6) при $c = 0$ получаются значения этих параметров — 0,18 и 0,39 соответственно, которые хорошо согласуются с результатами [3] и указывают, что зависимости (5), (6) имеют, по-видимому, весьма общий характер.

При больших уровнях распределение длительностей выбросов подчиняется закону Рэлея (2), для которого $\sigma_\tau/m_\tau = \sqrt{4/\pi} - 1$. При $c \gg 1$, ограничиваясь двумя первыми членами разложения функции $\Phi_0(c)$ в ряд, из (5) находим $m_\tau/\lambda = \sqrt{\pi}/c$, откуда следует

$$(7) \quad \sigma_\tau/\lambda = (\sqrt{4-\pi})/c.$$

Результаты расчета величины σ_τ по формуле (7) удовлетворительно согласуются с данными измерений при $c \geq 1,8$ для всех рассмотренных реализаций (см. фиг. 5). Используя известные правила замены переменных в ФРВ, из (2) можно получить оценки величин m_x и σ_x при больших c :

$$(8) \quad m_x = \ln \frac{2}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{2}C_e + \ln \frac{m_\tau}{\lambda}, \quad \sigma_x = \frac{\pi}{2\sqrt{6}},$$

где $C_e = 0,5772$. . . — постоянная Эйлера. Удовлетворительное соответствие результатов расчета параметров m_x и σ_x по формуле (8) с данными измерений при $c \geq 2$ (см. фиг. 5) подтверждает применимость распределения (2) при больших уровнях для реализаций 1–7.

Результаты измерений среднего числа выбросов в единицу времени, приведенные на фиг. 6, хорошо согласуются с теоретической зависимостью для нормальных случайных процессов (см. [1]):

$$(9) \quad n\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}c^2}.$$

Представленные в [4] измеренные значения средней частоты пересечений нулевого уровня пульсационной составляющей скорости потока в круглой струе, пограничном слое и за решетками показывают, что при $c = 0$ комплекс $n\lambda$ практически не зависит от типа течения и Re_τ и примерно равен

0,23—0,29, что хорошо согласуется с приведенными на фиг. 6 опытными данными.

Рассмотрим моментные характеристики амплитуд выбросов. Для ФРВ (3) среднее и среднеквадратичное значения связаны соотношением

$$(10) \quad \sigma_A/m_A = \sqrt{\pi/2 - 1},$$

поэтому задача сводится к определению зависимости величины m_A от уровня c . Предположим, что при любом $c \geq 0$ некоторое значение амплитуды A^* , достаточно близкое к максимальному, получается с одной и той же доверительной вероятностью ζ . Это предположение формально соответствует уравнению

$$\Phi_A(A^* - C) = \zeta,$$

откуда имеем

$$(11) \quad \frac{m_A}{\sigma} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k_A} \left(\frac{A^* - C}{\sigma} \right),$$

где k_A — решение уравнения $\Phi_0(k_A) = (1 + \zeta)/2$. Выражение (11) содержит две подлежащих определению величины: доверительную вероятность ζ и соответствующее ей значение A^* . При анализе близких к нормальным случайных процессов принято считать максимальной амплитудой значение процесса при $\zeta = 0,9973$. Анализ ФРВ для реализаций 1—7 показал, что значения u/σ , соответствующие величине $\zeta = 0,9973$, изменяются в диапазоне 3,2—3,6. Принимая в выражении (11) $A^*/\sigma = 3,4$, $\zeta = 0,9973$ (при этом $k_A = 3$), с учетом формулы (10) получаем

$$(12) \quad \frac{m_A}{\sigma} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{3,4 - c}{3}, \quad \frac{\sigma_A}{\sigma} = \sqrt{1 - \frac{2}{\pi}} \frac{3,4 - c}{3}.$$

Результаты измерений средних и среднеквадратичных значений амплитуд выбросов, приведенные на фиг. 6, показывают, что зависимости величин m_A/σ и σ_A/σ от уровня c близки к линейным и удовлетворительно описываются формулами (12). Следует учесть, что при выводе выражений (12) не использовались приведенные на фиг. 6 данные непосредственных измерений параметров m_A и σ_A .

На фиг. 6 представлены измеренные значения коэффициента корреляции между длительностями и амплитудами выбросов $\rho_{\tau A} = \langle (\tau - m_\tau)(A - m_A) \rangle / (\sigma_A \sigma_\tau)$. Видно, что величина $\rho_{\tau A}$ возрастает при увеличении уровня c . Это естественный результат, так как при больших уровнях форма выбросов становится более определенной и можно ожидать, что $\rho_{\tau A} \rightarrow 1$ при $c \rightarrow A^*/\sigma$. Однако установить функциональный вид зависимости коэффициента корреляции от уровня на основе имеющихся данных не представляется возможным. Полученные в опытах высокие значения коэффициента корреляции $\rho_{\tau A} \approx 0,6—0,9$ указывают на наличие близкой к линейной статистической связи между длительностями и амплитудами выбросов (см. также [3]). Следовательно, выбросы турбулентных пульсаций скорости потока большой длительности обладают, как правило, большими амплитудами.

В целом проведенные опыты показали, что в энергосодержащих частотах характеристики выбросов турбулентных пульсаций скорости потока можно описать достаточно простыми универсальными зависимостями в широком диапазоне Re_τ и других параметров течения. Соотношения, связывающие средние и среднеквадратичные значения длительностей и амплитуд выбросов с пороговым уровнем, оказались универсальными при использовании в качестве характерных параметров интенсивности и времени величин σ и λ соответственно. Для количественного описания всех полученных опытных данных потребовалось всего 3 эмпирических постоянных: α , β и A^* , причем предложенные эмпирические зависимости при $c = 0$ хорошо согласуются с данными [3, 4]. Это означает, что в развитой турбулентности закономерности формирования выбросов пульсаций потока в энергосодержащих частотах практически не зависят от условий те-

чения и числа Рейнольдса турбулентности, которое в проведенных опытах изменялось более чем в 50 раз.

Автор выражает глубокую признательность В. Л. Зимонту, по предложению которого выполнена работа, и Ю. М. Денисову, оказавшему большую помощь в создании комплекса программ для ЭЦВМ.

Поступила 23 III 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов В. И. Выбросы случайных процессов. М.: Наука, 1970.
2. Щербина Ю. А. Амплитудно-масштабная характеристика турбулентных пульсаций. — В кн.: Турбулентные течения. М.: Наука, 1974.
3. Narayanan M. A. B. Universal trends observed in the maxima longitudinal velocity fluctuations and the zero crossings in turbulent flows. — AIAA J., 1979, vol. 17, N 5. Рус. пер. Ракетн. техн. и космонавтика, 1979, т. 17, № 5.
4. Antonia R. A., Danh N. Q., Prabhu A. Bursts in turbulent flows. — Phys. Fluids, 1976, vol. 19, N 11.
5. Васильев В. И., Юденков Н. А., Богданов В. В. Исследование интенсивности турбулентных пульсаций потока в воздухозаборниках. — Труды ЦАГИ, 1971, вып. 1327.
6. Зимонт В. Л., Прасковский А. А., Тарышкин А. Г. Исследование влияния ограниченности частотного диапазона аппаратуры на результаты измерений параметров турбулентности. — Труды ЦАГИ, 1980, вып. 2048.
7. Колмогоров А. Н. О логарифмически нормальном распределении размеров частиц при дроблении. — ДАН СССР, 1941, т. 31, № 2.
8. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. II. М.: Наука, 1967.
9. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1967.

УДК 532.62

О РАСТЕКАНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Г. И. Шапиро

(Москва)

Растекание вязкой жидкости по поверхности твердого тела играет важную роль в ряде практических задач, например при формировании покрытий твердых тел, при движении газожидкостных смесей и эмульсий в капиллярах и в других случаях [1]. Движение тонкого слоя вязкой жидкости по горизонтальной поверхности вызвано действием сил тяжести и поверхностного натяжения и имеет много общего с движением тонких пленок по наклонной плоскости, которое интенсивно изучалось в течение ряда лет [2—4]. Переход от наклонной плоскости к горизонтальной не является тривиальным, т. е. не сводится к подстановке угла наклона, равного нулю, в окончательные формулы. Дело в том, что движение по горизонтальной плоскости даже в самом грубом приближении описывается дифференциальным уравнением более высокого порядка.

В двумерной постановке задача о растекании вязкой жидкости по горизонтальной плоскости рассматривалась в [5], где получено приближенное нелинейное уравнение для толщины слоя h в зависимости от координаты x и времени t :

$$(1) \quad h_t = (g/3\nu)(h^3 h_x)_x.$$

Здесь ν — коэффициент кинематической вязкости; g — ускорение силы тяжести. К сожалению, в [5] фактически не учтено влияние поверхностного натяжения.

В противоположном предельном случае, когда силой тяжести можно пренебречь по сравнению с силой поверхностного натяжения, уравнение для $h(x, t)$ получено в [6] (также только в двумерной постановке):

$$(2) \quad h_t + (\sigma/3\rho\nu)(h^3 h_{xxx})_x = 0,$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения; ρ — плотность жидкости.

В данной работе рассматривается трехмерная задача о движении вязкой несжимаемой жидкости по горизонтальной плоскости с учетом силы тяжести и поверхностного натяжения. Наклон свободной поверхности предполагается малым, а движение — достаточно медленным (ползущим), так что инерционными силами можно пренебречь по сравнению с вязкими. При этом, как будет показано, число Рейнольдса не обязательно должно быть мало. На изменения толщины слоя $h(x, y, t)$ ограничения не накладываются, в частности, h может обращаться в нуль, как это бывает при растекании капли.