

УДК 539.370

АНАЛИЗ РАЗВЕТВЛЕННЫХ ФОРМ ИЗГИБА АРОК И ПАНЕЛЕЙ

Л. И. Шкутин

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск
E-mail: shkutin@icm.krasn.ru

Представлены результаты численного анализа разветвленных решений нелинейных краевых задач о плоском изгибе упругих арок и панелей. Задачи сформулированы для системы шести нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с независимыми полями конечных перемещений и поворотов. Рассмотрены два варианта нагружения (следящим и консервативным давлением) и два варианта граничных условий (жесткое защемление и шарнирное опирание). В случае защемленной арки и панели множество решений состоит из симметричных и асимметричных форм изгиба, существующих лишь в области положительных значений параметра нагрузки. В случае шарнирного опирания множество решений включает симметричные и несимметричные формы, соответствующие положительным, отрицательным и нулевым значениям параметра. В обеих задачах фазовые зависимости параметра состояния от параметра нагрузки являются разветвленными, неоднозначными, имеют изолированные ветви и допускают возможность катастрофы — конечного скачка из основной равновесной формы в одну из выпученных форм.

Ключевые слова: арки, панели, нелинейный изгиб, выпучивание, устойчивость, численный анализ.

С развитием вычислительной техники широкое распространение в нелинейной механике конструкций получил метод продолжения решения краевых задач по параметру состояния [1, 2]. Этот метод используется для нахождения решений, ответвляющихся от основного, и требует специальных приемов построения решений вблизи точек ветвления. Такие ограничения препятствуют получению изолированных решений, характерных для нелинейных задач деформации стержней, пластин и оболочек. В работе [3] методом стрельбы, сводящим нелинейную краевую задачу к конечному числу нелинейных задач Коши, выполнен анализ множества форм изгиба арки и построены изолированные ветви выпученных форм.

В настоящей работе построены некоторые ветви неустойчивых послекритических форм, пропущенные в [3].

Система уравнений. В декартовой системе координат x_j с ортонормированным базисом e_j ($j = 1, 2, 3$) базовая линия длиной $2l$ круговой арки (и цилиндрической панели) радиусом r задается параметрическими уравнениями

$$x_1 \equiv 0, \quad x_2 = r(\cos(\alpha t) - \cos \alpha), \quad x_3 = r \sin(\alpha t) \quad \forall t \in [-1, 1],$$

где t — внутренний параметр линии; 2α — угол раствора арки. Арка имеет постоянное сечение (профиль) A , базовая линия проходит через его геометрический центр. Изучается плоский изгиб арки под нагрузкой, распределенной по ее длине и заданной (в расчете на

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00148) и в рамках программы Министерства образования РФ “Развитие научного потенциала высшей школы” (код проекта 2.1.1/735).

единицу длины) вектором $\mathbf{P} = P_2 \mathbf{e}_2 + P_3 \mathbf{e}_3$. Необходимо найти плоские изогнутые формы вида

$$x_1 \equiv 0, \quad x_2 = y(t), \quad x_3 = z(t), \quad (1)$$

где y, z — искомые функции. Материал арки считается трансверсально-изотропным и линейно-упругим.

На интервале $(-1, 1)$ нелинейная задача плоского изгиба формулируется в виде системы шести обыкновенных дифференциальных уравнений [3]

$$\begin{aligned} y'_0 &= y_1 + \alpha, & y'_1 &= f_2 - (\gamma - 1)\varepsilon^2 f_2 f_3, \\ y'_2 &= \varepsilon^2(\gamma f_2 \cos y_0 - f_3 \sin y_0) - \sin y_0, & y'_4 &= -p_2, \\ y'_3 &= \varepsilon^2(\gamma f_2 \sin y_0 + f_3 \cos y_0) + \cos y_0, & y'_5 &= -p_3, \\ f_2 &\equiv y_4 \cos y_0 + y_5 \sin y_0, & f_3 &\equiv -y_4 \sin y_0 + y_5 \cos y_0 \end{aligned} \quad (2)$$

с шестью неизвестными функциями

$$y_0 = \theta, \quad y_1 = \frac{Yl}{H}, \quad y_2 = \frac{y}{l}, \quad y_3 = \frac{z}{l}, \quad y_4 = \frac{X_2 l^2}{H}, \quad y_5 = \frac{X_3 l^2}{H} \quad (3)$$

и параметрами

$$\alpha = \frac{l}{r}, \quad \gamma = \frac{E}{G}, \quad \varepsilon^2 = \frac{I}{Al^2}, \quad p_j = \frac{P_j l^3}{H}, \quad H = EI. \quad (4)$$

В формулах (1)–(4) $y(t), z(t)$ — искомые координаты точки t в плоскости (x_2, x_3) ; $\theta(t)$ — искомый угол поворота относительно оси x_2 ; $Y(t)$ — изгибающий момент относительно оси x_1 ; $X_2(t), X_3(t)$ — декартовы компоненты вектора усилия; G — модуль поперечного сдвига; E — модуль продольного растяжения-сжатия; I — момент инерции поперечного сечения относительно оси x_1 ; штрих обозначает производную по t .

Система (2) описывает нелинейный упругий изгиб круговой арки (и цилиндрической панели) при заданных значениях параметров нагрузки p_2, p_3 , параметров жесткости $\alpha, \gamma, \varepsilon$ и заданных краевых условиях.

Защемленная арка под действием нормального давления. Нормальное давление является следящей нагрузкой. Пусть P — интенсивность давления на единицу длины арки. В изогнутом состоянии арки вектор $\mathbf{P}(P_2; P_3)$ направлен по нормали к базовой линии (1), так что

$$P_2 = -P \cos \theta, \quad P_3 = -P \sin \theta, \quad p_2 = -p \cos y_0, \quad p_3 = -p \sin y_0. \quad (5)$$

Параметр $p = Pl^3/H$ при численном решении принимался постоянным (равномерное давление), при $p > 0$ вектор \mathbf{P} направлен вдоль внутренней нормали. Условия жесткого защемления арки в граничных точках (отсутствие поворотов и перемещений) формулируются в виде

$$y_0(\mp 1) = \mp \alpha, \quad y_2(\mp 1) = 0, \quad y_3(\mp 1) = \mp (1/\alpha) \sin \alpha. \quad (6)$$

Нелинейная краевая задача (2), (5), (6) решалась методом стрельбы [3]. Основные результаты численного решения для арки с параметрами $\alpha = \pi/4, \gamma = 2,5, \varepsilon = 0,02$ представлены на рис. 1–4.

На рис. 1 показаны две ветви зависимости параметра состояния q (перемещения центральной точки по отношению к высоте арки) от параметра давления p . (Положительным значениям p и q соответствуют нагрузка и перемещение, противоположно направленные по отношению к оси x_2 .) Кривая 1 — ветвь низших форм (мод) изгиба арки, симметричных относительно оси x_2 . Ветвь состоит из трех монотонных участков $1', 1'', 1'''$ и содержит

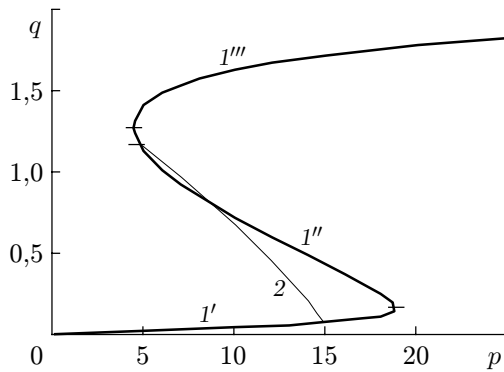


Рис. 1

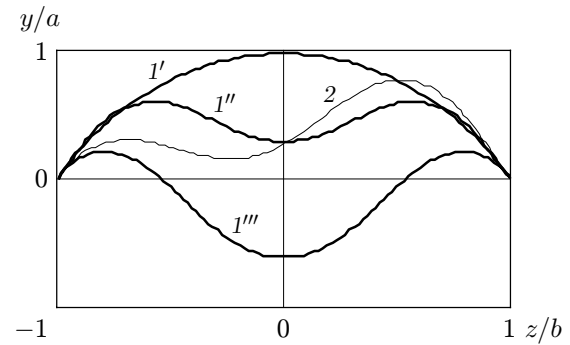


Рис. 2

Рис. 1. Карта ветвления равновесных состояний для защемленной арки под действием нормального давления:

1 — ветвь низших симметричных форм изгиба арки (1' — основные равновесные состояния, 1'', 1''' — выпученные равновесные состояния), 2 — ветвь низших асимметричных форм изгиба арки

Рис. 2. Равновесные формы изгиба защемленной арки под действием нормального давления ($p = 10$) (обозначения те же, что на рис. 1)

две критические точки, экстремальные для зависимости $p(q)$: верхнюю критическую точку с координатами ($p^+ \approx 18,500; q^+ \approx 0,157$) и нижнюю критическую точку с координатами ($p^- \approx 4,50; q^- \approx 1,27$). Кривая 2 (не обнаруженная в работе [3]) — ветвь низших асимметричных мод, соединяющая две бифуркационные точки первой ветви: точку с координатами ($p_B^+ \approx 15,000; q_B^+ \approx 0,067$) и точку с координатами ($p_B^- \approx 4,70; q_B^- \approx 1,17$). В окрестности значений p_B^+, p_B^- имеется по две моды равновесия арки — симметричная и асимметричная. Равновесные состояния, соответствующие точкам участка 1', принято называть основными, остальные — выпученными.

Возможные равновесные конфигурации защемленной арки в координатах $y/a, z/b$ (a — высота, $2b$ — раствор арки) при $p = 10$ показаны на рис. 2. Кривые 1', 1'', 1''' — симметричные моды, соответствующие точкам первой ветви. В масштабе рис. 2 основная мода 1' не отличается от начальной конфигурации арки, 1'', 1''' — выпученные моды. Кривая 2 — асимметричная выпученная мода, соответствующая точке $p = 10$ второй ветви. Все моды состоят из трех полуволн.

На рис. 3 показано распределение деформаций по длине защемленной арки в трех рассмотренных выпученных состояниях, на рис. 4 — зависимость параметра $Z = l^2 X_3/H$ (горизонтального опорного усилия) от параметра нагрузки.

Шарнирно закрепленная арка под действием гравитационного давления.

Нагрузку интенсивности P , равномерно распределенную по арке и направленную противоположно оси x_2 , назовем гравитационным давлением. В процессе деформации вектор $\mathbf{P}(-P; 0)$ перемещается поступательно. Функции p_2, p_3 в системе уравнений (2) принимают значения $p_2 = -p, p_3 = 0$ ($p = Pl^3/H$ — нормированный параметр давления). Рассматривается арка, шарнирно закрепленная в граничных точках, так что в каждой из них выполняются условия отсутствия моментов и перемещений:

$$y_1(\mp 1) = 0, \quad y_2(\mp 1) = 0, \quad y_3(\mp 1) = \mp(1/\alpha) \sin \alpha. \quad (7)$$

Нелинейная краевая задача (2), (7) решалась для арки с теми же параметрами: $\alpha = \pi/4, \gamma = 2,5, \varepsilon = 0,02$.

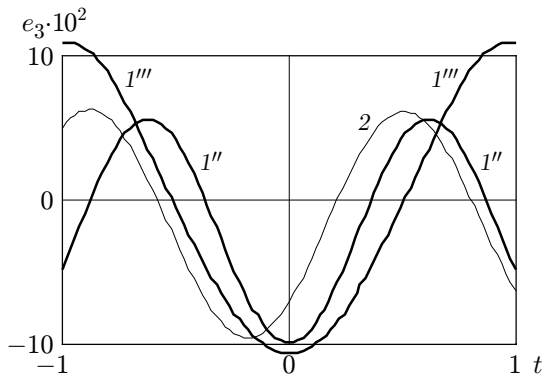


Рис. 3

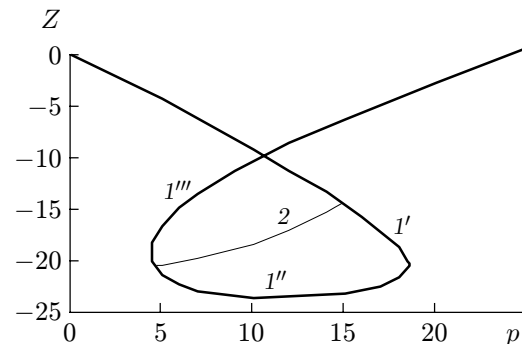


Рис. 4

Рис. 3. Распределения деформаций по длине защемленной арки под действием нормального давления ($p = 10$) (обозначения те же, что на рис. 1)

Рис. 4. Эволюция опорной реакции защемленной арки под действием нормального давления (обозначения те же, что на рис. 1)

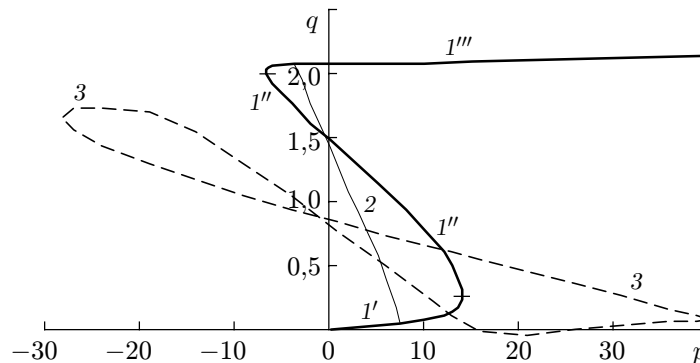


Рис. 5. Карта ветвления равновесных состояний для шарнирно закрепленной арки под действием гравитационного давления:

1 — ветвь низших симметричных форм изгиба арки, 2 — ветвь низших асимметричных форм изгиба арки, 3 — ветвь высших симметричных мод (остальные обозначения те же, что на рис. 1)

На рис. 5 представлены результаты расчета трех ветвей зависимости кинематического параметра q от параметра давления p . Кривые 1, 2 — ветви низших симметричных и асимметричных мод. Первая ветвь (кривая 1) имеет экстремальные критические точки с координатами $(p^+ \approx 14,00; q^+ \approx 0,24)$, $(p^- \approx -6,7; q^- \approx 2,0)$ и бифуркационные точки с координатами $(p_B^+ \approx 7,50; q_B^+ \approx 0,04)$, $(p_B^- \approx -3,7; q_B^- \approx 2,1)$. Не обнаруженный в работе [3] участок первой ветви $1''$ — множество неустойчивых симметричных мод изгиба. Замкнутая кривая 3 содержит множество более высоких симметричных мод с тремя — пятью полуволнами, которые, изменяясь, плавно переходят одна в другую [3].

На рис. 6 показаны возможные конфигурации шарнирно закрепленной арки при $p = 5$, на рис. 7 — эволюция параметра опорного усилия.

Заключение. В рассмотренных задачах зависимости параметра состояния q от параметра нагрузки p являются разветвленными, неоднозначными и допускают возможность катастрофы — мгновенного скачка арки из основной равновесной формы в выпученную.

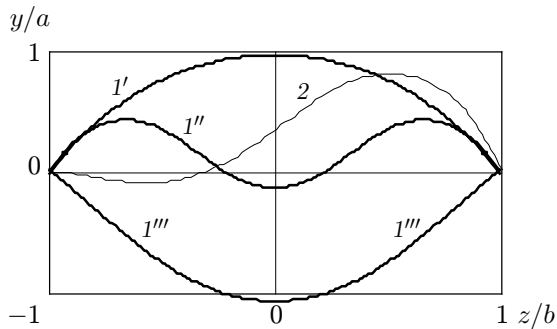


Рис. 6

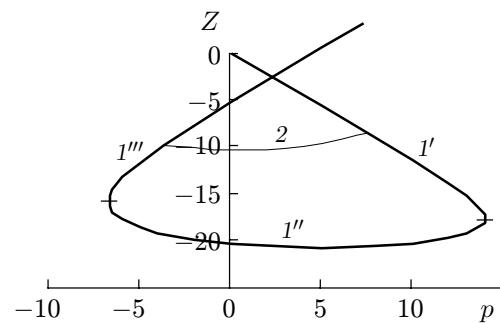


Рис. 7

Рис. 6. Равновесные формы изгиба шарнирно закрепленной арки под действием гравитационного давления ($p = 5$) (обозначения те же, что на рис. 1)

Рис. 7. Эволюция опорной реакции шарнирно закрепленной арки под действием гравитационного давления (обозначения те же, что на рис. 1)

Потеря устойчивости основных форм равновесия вследствие малых возмущений наиболее вероятна в окрестности верхнего бифуркационного значения нагрузки. Устойчивая симметричная конфигурация $1'$ превращается в неустойчивую асимметричную конфигурацию 2 и скачкообразно, через неустойчивую симметричную конфигурацию $1''$, — в устойчивую симметричную конфигурацию $1'''$. Обратный скачок на ветвь $1'$ становится возможным при нагрузках, меньших нижнего бифуркационного значения.

Наряду со сходством карт ветвления, показанных на рис. 1, 5, имеется и принципиальное различие. У шарнирно закрепленной арки между ветвями основных и выпученных форм расположена дополнительная замкнутая ветвь (кривая 3 на рис. 5). Кроме того, у шарнирной арки существует множество выпученных форм при отрицательных значениях параметра нагрузки и несколько форм при $p = 0$, которые, в отличие от начальной конфигурации арки, являются напряженными и уравниваются опорными усилиями.

Полученные в работе [3] результаты дополнены построением ветви неустойчивых асимметричных форм для защемленной арки (кривая 2 на рис. 1) и ветви неустойчивых симметричных форм для шарнирной арки (кривая $1''$ на рис. 5). Таким образом получена полная картина ветвления решений рассмотренных задач в области, заключенной между ветвями основных и выпученных форм.

Кроме рассмотренных низших форм изгиба в работе [3] построены ветви многоволновых решений, существующих при нагрузках, превышающих верхние экстремальные значения. Такие формы могут проявляться при ударном нагружении арок.

Результаты численного анализа свидетельствуют о том, что защемленная арка значительно более устойчива, чем шарнирно закрепленная. Это обусловлено тем, что, во-первых, ее верхняя бифуркационная нагрузка в два раза выше, во-вторых, множество значений параметра нагрузки p для выпученных форм имеет положительную нижнюю грань.

Анализ задач, в которых допускаются свободные смещения граничных точек вдоль оси x_3 (в этом случае $y_5 \equiv 0$), приводит к иным результатам: ветви основных форм монотонны, т. е. возможность катастрофы исключена. Напротив, изменение характера перемещения нагрузки (с поступательного на следящее и наоборот) не вносит качественных изменений в решения, более того, результаты близки количественно.

Все представленные результаты справедливы для цилиндрических панелей с закрепленными прямолинейными и свободными криволинейными кромками.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Григолюк Э. И.** Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела / Э. И. Григолюк, В. И. Шалашилин. М.: Наука, 1988.
2. **Шалашилин В. И., Кузнецов Е. Б.** Наилучший параметр продолжения решения // Докл. РАН. 1994. Т. 334, № 5. С. 566–568.
3. **Шкутин Л. И.** Численный анализ разветвленных форм изгиба арок // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 4. С. 155–160.

Поступила в редакцию 8/XII 2008 г.
