

УДК 532.525.2:533.697.4

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МОДЕЛИ ИСТЕЧЕНИЯ СВЕРХЗВУКОВОЙ СТРУИ ГАЗА В ВАКУУМ

В. А. Шувалов, О. А. Левкович, Г. С. Кочубей

Институт технической механики НАН Украины, 49005 Днепропетровск

Предложены приближенные модели расчета газодинамических параметров при истечении сверхзвуковых струй в вакуум. Показано, что в идеальном и вязком приближениях описание структуры и пространственное распределение параметров в дальнем поле струи согласуются с результатами физического эксперимента и численного решения задачи.

Задача о структуре сверхзвуковой струи газа, истекающей в вакуум, имеет различные технические приложения [1, 2]. Как правило, задача решается численно методом характеристик. Реализация такого решения достаточно трудоемка, поэтому в инженерной практике нередко используются приближенные модели [1, 2], которые в различной степени соответствуют численному и физическому экспериментам и не учитывают эффекты вязкости. Из-за наличия пограничного слоя в сопле плотность газа в периферийной части струи существенно больше плотности, вычисленной для случая невязкого (идеального) истечения. Параметры газа в периферийной части используются для определения воздействия газовых струй на элементы конструкций энергетических установок, вакуумных насосов, поверхностей космических аппаратов и других технических систем.

Эффекты вязкости учтены в модели, предложенной в работе [3]. Ее точность в значительной мере определяется корректностью выбора параметра m_z (отношения расхода газа в пограничном слое к суммарному расходу газа) по результатам физического эксперимента или численного анализа течения газа в сопле.

В данной работе предложены две уточненные модели, позволяющие повысить точность расчета параметров сверхзвуковой струи, истекающей в вакуум из реальных сопел. Областью применимости приближенных моделей является дальнее поле (согласно оценкам [4] $r/r_e \geq 10$, т. е. начиная с границы сплошности [5] вниз по потоку), где скорость газа в струе возрастает, приближаясь к предельному значению $V_{\max} = \sqrt{2\gamma RT_0/(\gamma - 1)}$, а линии тока практически прямолинейны. Здесь γ — отношение удельных теплоемкостей; R — универсальная газовая постоянная; T_0 — температура торможения; r — радиус струи; r_e — радиус сопла на срезе. Как и в работе [3], предполагается, что дальнее поле струи можно моделировать источником с полюсом в центре сопла, основная масса газа и импульс струи сосредоточены в центральном ядре, где течение газа является идеальным, а вязкие эффекты проявляются в периферийной зоне. При этом в качестве критерия точности приближенных моделей могут быть использованы результаты численного решения задачи или данные физического эксперимента.

В полярной системе координат с началом в центре выходного сечения сопла распределение плотности газа в дальнем поле осесимметричной сверхзвуковой струи может быть представлено в виде (модель 1)

$$\frac{\rho(r, \theta)}{\rho_0} = \frac{\gamma + 1}{2} \left(1 + \frac{k}{2\gamma}\right)^{-1/(\gamma-1)} \left(1 + \frac{k}{\gamma} - \gamma^{-1}\right) \left(\frac{r}{r_e}\right)^{-2} \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{\beta_1} \times \\ \times \left[1 - m_{z1} \left(1 - \frac{2 + \beta_*}{2 + \beta_1} \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{\beta_* - \beta_1}\right)\right], \quad (1)$$

где $k = \gamma(\gamma - 1)M_e^2$; M_e — число Маха на срезе сопла; θ — угол между радиусом-вектором рассматриваемой точки струи и ее осью;

$$\beta_1 = \frac{M_e}{\gamma(\gamma^2 + 1)} \beta; \quad \beta = \frac{4C_F/C_{F\max}}{1 - C_F/C_{F\max}}; \quad m_{z_1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{C_F}{C_{F\max}} \right);$$

$$\frac{C_F}{C_{F\max}} = C_k C_d C_V \left(\frac{k}{k + 2\gamma} \right)^{0,5} + \left(1 + \frac{k}{2\gamma} \right)^{-\gamma/(\gamma-1)} \frac{A_e}{A_*} C_{F\max}^{-1},$$

$$C_{F\max} = \frac{2\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{1/(\gamma-1)}; \quad C_k = \frac{1 + \cos \theta_e}{2};$$

C_F — коэффициент тяги реального сопла; $C_{F\max}$ — коэффициент тяги при невязком истечении идеальной струи в вакуум; C_k — коэффициент конусности сопла; C_d — коэффициент расхода; C_V — коэффициент скорости; $\beta_* = \beta$ при $A_e/A_* = 1$; A_e — площадь входного сечения сопла; A_* — площадь критического сечения сопла. При невязком идеальном истечении $C_F/C_{F\max} = 1$, $m_z = 0$.

В [6] для коэффициента расхода C_d получена зависимость

$$C_d = 1 - \left(\frac{r_c}{r_*} \right)^{0,25} \frac{0,97 + 0,86\gamma}{\sqrt{Re_*}}, \quad (2)$$

где $0 \leq r_c/r_* \leq 2$; $50 < Re_* < 10^5$; r_c — радиус кривизны профиля в критическом сечении сопла; r_* — радиус критического сечения сопла; Re_* — число Рейнольдса в критическом сечении сопла.

В [7] коэффициент расхода представлен в виде аппроксимации

$$C_d = 0,998 - 2\delta_*/r_*, \quad (3)$$

где δ_* — толщина вытеснения.

Для реальных сопел коэффициент скорости определяется соотношением [8]

$$C_V = \frac{(1 - T_e/T_0)^{0,5}}{\sqrt{k/(k + 2\gamma)}} \quad (4)$$

(T_e — температура потока на срезе сопла), при адиабатическом режиме истечения

$$C_V = \sqrt{1 + \frac{2}{\gamma} (C_d - 1)}. \quad (5)$$

На рис. 1 приведены измеренные и расчетные значения C_d (1–5) и T_e/T_0 (6, 7) при $10^{-1} \leq Re_* \leq 10^6$, $\gamma = 1,4$ (1 — осредненные данные эксперимента [9]; 2 — данные [10]; 3 — расчет [11]; 4 — аппроксимация (2) при $r_c/r_* = 1,5$; 5 — аппроксимация (3) по данным [12]; 6 — данные [10]; 7 — данные [12] для конического сопла со степенью расширения $A_e/A_* = 100$; углом наклона выходной кромки сопла к его оси $\theta_e = 15^\circ$; $T_0 = 1100$ К; $\gamma = 1,37$. Измерения и расчеты, проведенные в широком диапазоне параметров торможения при различных условиях истечения струй газа из сопел, могут быть использованы для оценки значений коэффициентов C_d и C_V . С учетом численных данных [10, 13] аппроксимации (2)–(5), по сути, определяют области применимости модели 1: $M_e \geq 1$ ($1 \leq A_e/A_* \leq 10^3$), $50 \leq Re_* \leq 10^6$. Распределение плотности поперек струи (относительно оси симметрии) в дальнем поле практически не зависит от и определяется отношением $\rho/\rho_a = \rho(r, \theta)/\rho(r, 0)$.

В тех случаях, когда характеристики реальных сопел (коэффициенты C_d и C_V) неизвестны, параметры струи в дальнем поле могут быть определены с использованием модели 2:

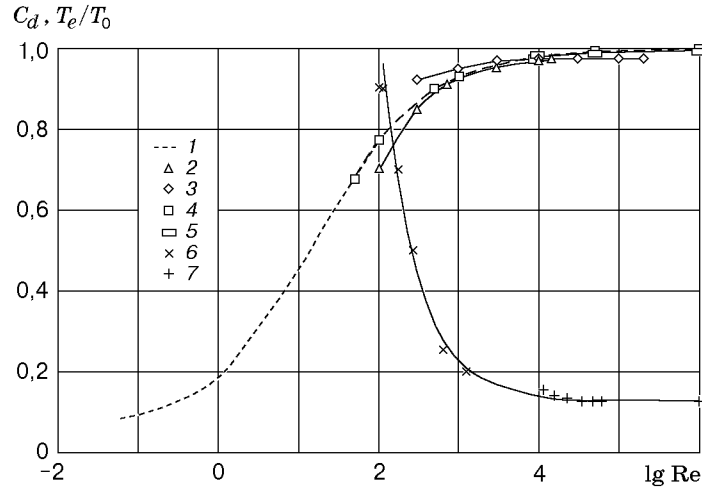


Рис. 1

$$\frac{\rho(r, \theta)}{\rho_0} = \frac{\gamma + 1}{2} \left(1 + \frac{k}{2\gamma}\right)^{-1/(\gamma-1)} \left(1 + \frac{k}{2\gamma} - \gamma^{-1}\right) \left(\frac{r}{r_e}\right)^{-2} \times$$

$$\times (\cos \theta)^{\beta_2} \left[1 - m_{z_2} \left(1 - \frac{2 + \beta_*}{2 + \beta_2} \frac{(\cos(\theta/2))^{\beta_*}}{(\cos \theta)^{\beta_2}}\right)\right], \quad (6)$$

где

$$\beta_2 = 1,249 \exp(0,418 M_e); \quad m_{z_2} = \frac{1}{\xi} \left(1 - \frac{C_F}{C_{F\max}}\right);$$

$$\frac{C_F}{C_{F\max}} = \frac{1 + \cos \theta_e}{2} \left(\frac{k}{k + 2\gamma}\right)^{0,5} + \left(1 + \frac{k}{2\gamma}\right)^{-\gamma/(\gamma-1)} \frac{A_e}{A_*} C_{F\max}^{-1}; \quad \xi = 63,1 \sqrt{\frac{\gamma(\gamma-1)}{M_e}} - 13,7.$$

Корректность моделей 1 и 2 иллюстрирует рис. 2, на котором представлены угловые распределения плотности $\rho(r, \theta)/\rho(r, 0) = \rho/\rho_a$ при истечении сверхзвуковой струи газа из реального сопла в вакуум.

Соотношение

$$\rho/\rho_a = \left[1 - m_{z_1} \left(1 - \frac{2 + \beta_*}{2 + \beta_1}\right) \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{\beta_* - \beta_1}\right] \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{\beta_1} / \left[1 - m_{z_1} \left(1 - \frac{2 + \beta_*}{2 + \beta_1}\right)\right] \quad (7)$$

соответствует модели 1 и соотношение

$$\rho/\rho_a = \left[1 - m_{z_2} \left(1 - \frac{2 + \beta_*}{2 + \beta_2}\right) \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{\beta_*} / \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{\beta_2}\right] \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{\beta_2} / \left[1 - m_{z_2} \left(1 - \frac{2 + \beta_*}{2 + \beta_2}\right)\right] \quad (8)$$

— модели 2.

На рис. 2,а показано распределение плотности в сечении струи $r/r_e = 70$ при $M_e = 6,9$, $\theta_e = 15^\circ$, $\gamma = 1,4$. Точки 1 соответствуют численному решению задачи методом характеристик при вязком истечении [3]; кривая 2 — значениям, вычисленным по соотношению (7) при $C_d = 0,989$ и $C_V = 0,981$. Значения C_d и C_V определены для условий истечения гидразина из конического сопла при $\theta_e = 15^\circ$; $A_e/A_* = 100$; $T_0 = 1100$ К; $Re_* \approx 5,9 \cdot 10^4$ [8, 12]. Кривая 3 соответствует результатам, полученным по модели 2 (соотношение (8) для вязкого истечения); 4 — по модели, предложенной в работе [3]; 5 — по модели 2 (соотношение (8) для идеального истечения при $m_{z_2} = 0$).

На рис. 2,б показано угловое распределение нормированной плотности газа в дальнем поле сверхзвуковой струи, истекающей в вакуум, при $M_e = 4,5$; $\theta_e = 15^\circ$; $\gamma = 1,4$. Точки 1

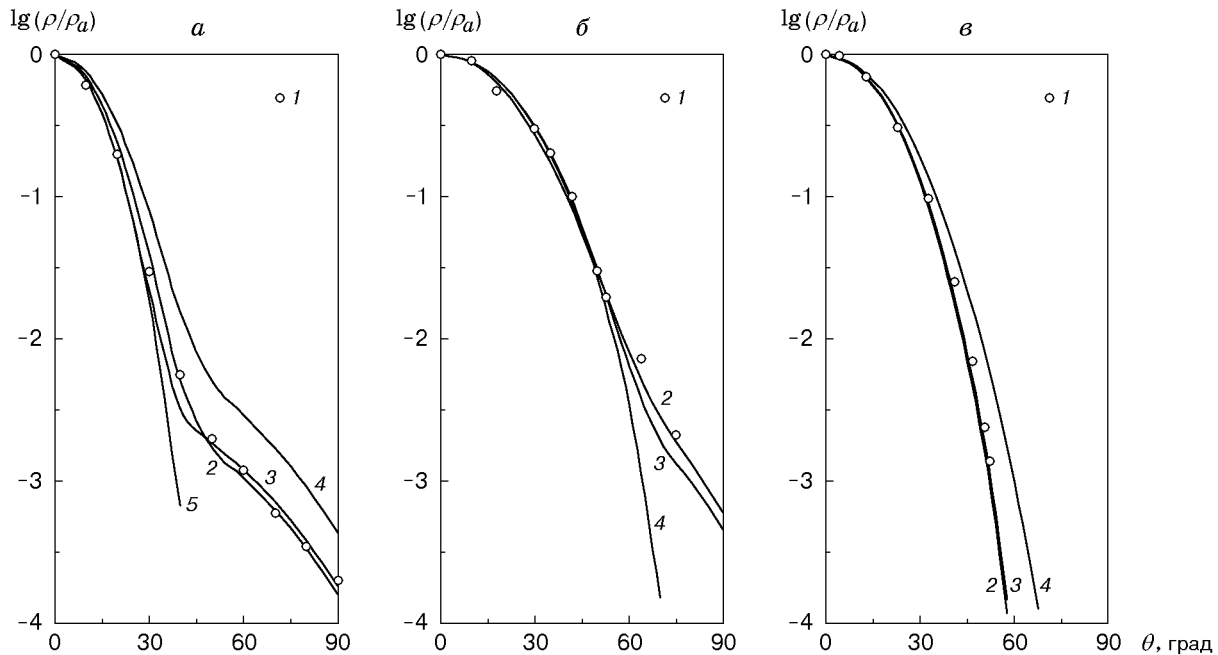


Рис. 2

соответствуют экспериментальным данным [1] для $Re_* = 6,5 \cdot 10^4$ и $r/r_e > 10$, кривая 2 — результатам, полученным по модели 1 (соотношение (7)), 3 — по аппроксимации (8), 4 — по соотношению (8) для невязкого приближения при $m_{z_2} = 0$.

Из сравнения численных данных для невязкого истечения, полученных методом характеристик [14] при $Me = 5,0$; $\gamma = 1,4$; $\theta = 15^\circ$; $r/r_e = 78$ (рис. 2, в), с результатами расчетов по соотношениям (7) и (8) следует, что и в случае идеального истечения угловые распределения плотности газа удовлетворительно описываются предложенными моделями 1, 2. На рис. 2, в точки 1 соответствуют вычислениям по методу характеристик [14], кривая 2 — по соотношению (8) при $m_{z_2} = 0$; кривая 3 — по модели невязкого истечения [15]

$$\frac{\rho(r, \theta)}{\rho_0} = 0,5k \left(1 + \frac{k}{2\gamma}\right)^{-1/(\gamma-1)} \left(\frac{r}{r_e}\right)^{-2} (\cos \theta)^k, \quad (9)$$

кривая 4 — по модели, предложенной в [3], при $m_z = 0$.

Распределения плотности газа, полученные с использованием предложенных моделей 1, 2, ближе к результатам численного расчета методом характеристик и физического эксперимента, чем по модели, предложенной в [3]. Это иллюстрируют данные на рис. 2 для угловых и на рис. 3 для осевых распределений плотности $\rho_a = \rho(r, 0)$.

На рис. 3 точки 1 соответствуют результатам численного решения задачи методом характеристик для вязкого истечения при $Me = 6,9$, $\theta_e = 15^\circ$; $\gamma = 1,4$, полученным в [3]; кривая 2 — результатам, полученным по модели 1; 3 — по модели 2; 4 — по модели, предложенной в [3], при $m_z = 0,07$ (кривые 2 и 3 практически совпали). Аналогичные зависимости для невязкого истечения при $Me = 5,0$; $\gamma = 1,4$; $\theta = 15^\circ$; $10 \leq r/r_e \leq 250$, полученные методом характеристик [14], по модели 2 при $m_{z_2} = 0$ и с использованием аппроксимация (9) также хорошо согласуются между собой. Эффекты вязкости при сверхзвуковом истечении газа в вакуум проявляются в периферийной части струи при $\theta > 40^\circ$ и $\rho/\rho_a < 10^{-2}$ (кривые 5 на рис. 2, а и 4 на рис. 2, б). В приосевой зоне ($\theta \leq 40^\circ$) решения для вязкого и невязкого случаев практически совпадают. Основная масса газа расширяется внутри конуса, половина угла которого меньше $0,5\theta_{\max}$. Предельный угол расширения

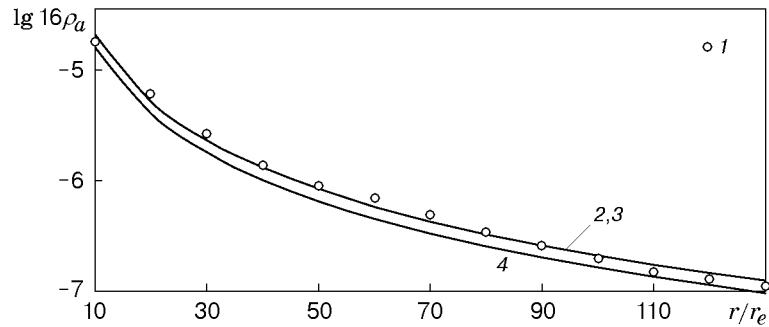


Рис. 3

струи определяется соотношением $\theta_{\max} = \psi(M) - \psi(M_e) + \theta_e$, $M = \infty$, где $\psi(M)$ — функция Прандтля — Майера. Влияние угла θ_e на распределение чисел Маха на оси струи и в ее окрестности проявляется, главным образом, вблизи среза сопла, а далее вниз по потоку оно становится незначительным [1, 2]. Поэтому для осевого распределения чисел Маха можно использовать соотношение

$$\frac{M(x)}{M_e} = \sqrt{\frac{2\gamma}{k}} \left(\left\{ \frac{\gamma+1}{2\gamma} \left(1 + \frac{k}{2\gamma}\right)^{-1/(\gamma-1)} \left[\gamma \left(1 + \frac{k}{2\gamma}\right) - 1 \right] \left(\frac{x}{r_e}\right)^{-2} \right\}^{1-\gamma} - 1 \right)^{0,5}. \quad (10)$$

Значения $M(x)/M_e$, полученные по формуле (10) при $M_e = 5,0$, $\gamma = 1,4$, соответствуют численному решению задачи методом характеристик [14] с погрешностью не больше, чем продольные распределения плотности ρ_a ($r = x$, $\theta = 0$), полученное по формулам (1) и (6).

При истечении газа в вакуум режим течения в струе меняется от сплошного до свободномолекулярного. Граница сплошности течения в приосевой зоне с учетом изложенного выше может быть определена по формуле [16]

$$\frac{r_r}{r_e} = \left[\frac{2r_e}{l_0} \left(\frac{\gamma-1}{\pi\gamma} \right)^{0,5} \right]^{1/(N+1)} \left(0,5k \frac{\rho_e}{\rho_0} (\cos \theta)^k \right)^{0,5}, \quad (11)$$

где l_0 , ρ_0 — длина свободного пробега и плотность газа перед соплом; $N = \nu(\gamma - 1)$; $\nu = 2(1 - \omega)$; ω — показатель степени в зависимости вязкости от температуры.

С учетом соотношения (11) представленные приближенные модели позволяют прогнозировать пространственное распределение плотности газа и чисел Маха в дальнем поле ($r/r_e > r_r/r_e$) сверхзвуковой струи при вязком и невязком истечении из реального сопла в вакуум с точностью, соответствующей численному решению задачи методом характеристик, и могут быть использованы для определения силового и теплового воздействия струй на преграды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Авдеевский В. С., Ашратов Э. Я., Иванов А. В. и др. Сверхзвуковые неизобарические струи газа. М.: Машиностроение, 1985.
2. Дулов В. Г., Лукьянов Г. А. Газодинамика процессов истечения. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1984.
3. Мейер Э., Хермел Дж., Роджерс А. В. Потеря тяги за счет взаимодействия выхлопной струи с элементами конструкций орбитального летательного аппарата // Аэрокосмич. техника. 1987. № 8. С. 118–126.
4. Dettleff G., Doetcher R.-D., Dankert C., et al. Attitude control thruster plume flow modelling and experiments // J. Spacecraft Rockets. 1986. V. 23, N 5. P. 477–481.

5. **Стасенко А. Л.** Критерии для определения сплошного течения в свободно расширяющейся струе // Инж.-физ. журн. 1969. Т. 16, № 1. С. 9–14.
6. **Кулква Н. М., Хосэк Г. А.** Коэффициент расхода сверхзвукового сопла при малых числах Рейнольдса // Ракет. техника и космонавтика. 1971. Т. 9, № 9. С. 267–270.
7. **Миллиган М. У.** Характеристики сопла при режиме течения переходном от сплошной среды к свободномолекулярному // Ракет. техника и космонавтика. 1964. Т. 2, № 6. С. 146–152.
8. **Эммонс Х.** Основы газовой динамики. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
9. **Массье П. Ф., Бэк И. Ш., Ноэльм Б., Сахели Ф.** Влияние вязкости на коэффициент расхода сверхзвукового сопла // Ракет. техника и космонавтика. 1970. Т. 8, № 3. С. 268–270.
10. **Розе Д.** Исследование вязких потоков в сверхзвуковых соплах с помощью электронного пучка // Ракет. техника и космонавтика. 1971. Т. 9, № 5. С. 43–51.
11. **Рей В.** Некоторые результаты численных расчетов вязких течений разреженного газа в соплах в приближении узкого канала // Там же. 1971. № 5. С. 52–62.
12. **Кушида Р., Хэрмел Дж., Апфель С., Зидович М.** Характеристики сопла с высокой степенью расширения для ракетного двигателя малой тяги // Аэрокосмич. техника. 1988. № 2. С. 42–48.
13. **Liang S. M., Huang K. C., Chen K. C.** Numerical study of low-thrust nozzles for satellites // J. Spacecraft Rockets. 1996. V. 33, N 5. P. 693–699.
14. **Аверенкова Г. И., Ашратов Э. А., Волоконская Т. Г. и др.** Сверхзвуковые струи идеального газа. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1970.
15. **Робертс Л., Саут Дж.** Замечания по поводу расчета поля выхлопной струи и соударения с поверхностью // Ракет. техника и космонавтика. 1964. Т. 2, № 2. С. 238–240.
16. **Антохин В. М., Балашов Ю. П., Семенов Ю. И. и др.** Исследование на модели обтекания космического корабля “Аполлон” // Механика жидкости и газа. 1977. № 3. С. 124–133.

*Поступила в редакцию 12/V 1999 г.,
в окончательном варианте — 11/I 2000 г.*
