

УДК 550.344.42

Восстановление глубины по зарегистрированным временам вступления цунами

Ан.Г. Марчук

Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук,
просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

E-mail: mag@omzg.sccc.ru

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 1, Vol. 14, 2021.

Марчук Ан.Г. Восстановление глубины по зарегистрированным временам вступления цунами // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд.-ние. — Новосибирск, 2021. — Т. 24, № 1. — С. 93–102.

Глубина океана обычно измеряется во время движения судов при помощи эхолота. Но в Мировом океане достаточно мест, где суда не ходят. Следовательно, там не проводились прямые измерения глубины. Но для моделирования трансокеанского распространения волны цунами требуется цифровая батиметрия всей акватории океана. Возникает задача восстановления хотя бы приблизительных значений глубины в тех местах, где глубина достоверно неизвестна. Эта задача может быть решена во время распространения реального цунами при наличии в этой области регистраторов, фиксирующих время прихода туда волны. Предложены два алгоритма восстановления приближенных значений глубины, основываясь на зарегистрированных временах вступления волны. Алгоритм был протестирован на задаче восстановления глубины в области с наклонным дном по временам прихода волны в узлы прямоугольной сетки.

DOI: 10.15372/SJNM20210107

Ключевые слова: обратная задача, восстановление среды, регистраторы цунами, время вступления волны, ячейка прямоугольной сетки.

Marchuk An.G. Restoration of the ocean depth using recorded tsunami arrival times // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2021. — Vol. 24, № 1. — P. 93–102.

Usually, the ocean depth is measured by the echo sounder in the course of a vessel cruise. However, there are a lot of areas in the World Ocean which are free of navigation. This means that by now there are no direct bathymetry measurements. For the numerical modeling of the trans-oceanic tsunamis we need the digital bathymetry of the whole water area. The thus arising problem is to restore (at least, approximately) the depth values in the areas without reliable bathymetric data. This can be done in the process of the propagation of a real tsunami with the help of detectors used. Two algorithms for the depth restoration based on the tsunami arrival times are proposed. The algorithm has been tested on the depth restoration problem in the area with a sloping bottom, where the tsunami arrival times are known at the nodes of a rectangular grid.

Keywords: inverse problem, medium restoration, tsunami detectors, wave arrival time, cell of rectangular grid.

Как и в других областях геофизики, можно ставить два типа обратных задач. Первый тип — задача определения источника. Здесь известны параметры среды и записи сетью регистраторов возмущений (волн), генерированных неизвестным источником. Второй тип обратных задач заключается в определении или уточнении параметров среды (для цунами это глубина) по записям волны, если известна полная информация об источнике. Следует заметить, что по сравнению с решением обратных задач сейсмологии для

регистрации длинных волн (в том числе цунами) в глубоком океане требуется очень дорогостоящее оборудование (например донные станции системы DARTS [1]). Поэтому в реальности сеть наблюдений при решении таких задач не такая густая, как хотелось бы для достижения хорошей точности. Для решения обратных кинематических задач можно использовать и береговые приливные станции (tidal gauge), но при решении обратной задачи, связанной с оперативным прогнозом цунами в режиме реального времени, данные с этих регистраторов могут поступить в обработку слишком поздно. Сейчас в Японии бурно развивается сеть буйковых GPS станций, которые кроме географических координат станций измеряют также и вертикальное их положение относительно орбит спутников группировки GPS. Рисунок 1 показывает расположение регистраторов различного типа вдоль побережья Японии, которая больше других стран страдает от атак волн цунами и больше других уделяет этим вопросам внимание.

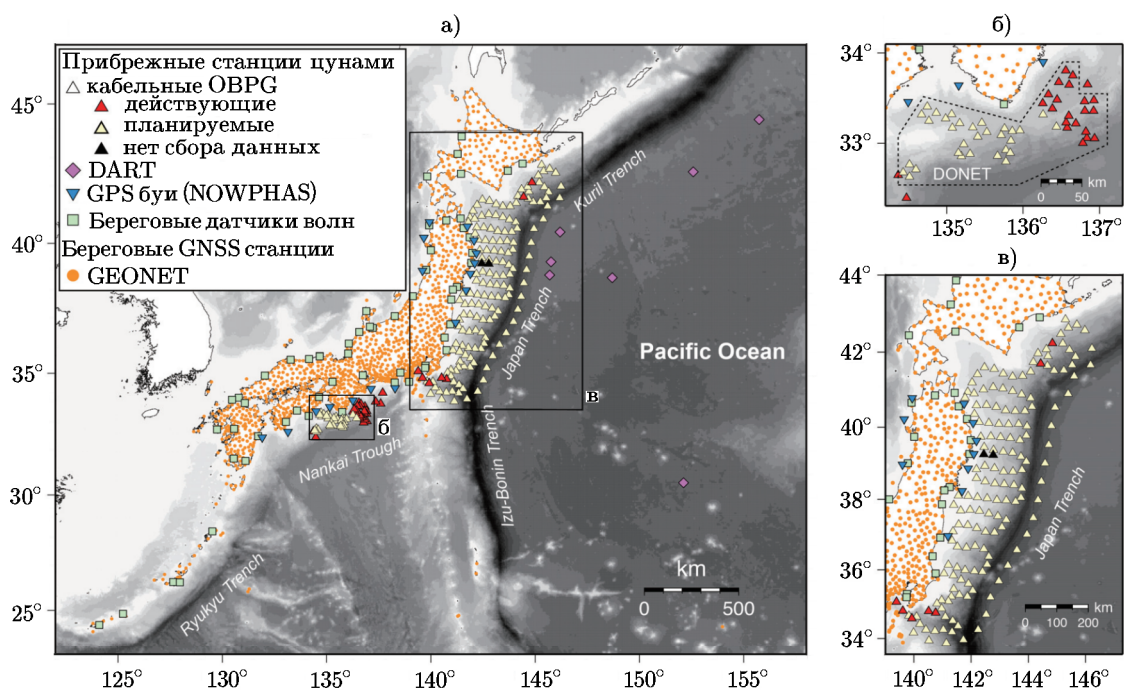


Рис. 1. Местоположение регистраторов уровня океана различного типа вокруг Японии. Здесь треугольниками (углом вверх) обозначены кабельные донные станции, ромбами обозначены станции системы DARTS, треугольниками (углом вниз) обозначены GPS буи и квадратами — береговые мареографы

Относительно малое количество глубоководных станций системы DART (обозначены ромбиками на рис. 1а) можно объяснить изначальным заказом ее создания. Тогда, в начале нулевых годов этого века, Национальной службой погоды США была поставлена цель заблаговременного предупреждения Тихоокеанского побережья США об угрозе цунами с оценкой ожидаемой высоты волны в наборе важных точек побережья. Поэтому достаточно было всего нескольких регистраторов около каждой цунамигенной зоны для достаточно точной оценки высоты волны у побережья США. Но для быстрой и точной оценки высоты цунами для ближайшего к очагу побережью этого, конечно, недостаточно. Следует размещать DART-станции как можно ближе к зоне возможных очагов, подобно планируемым донным станциям вдоль кабеля, проложенного по восточ-

ному склону Японского глубоководного желоба (рис. 1в).

Теперь перейдем к задаче определения параметров среды, где распространяются волны. В данном случае определению подлежит глубина акватории, где имеется сеть регистраторов цунами, которая регистрирует моменты вступления волны в точки установки этих регистраторов. Ввиду того, что скорость распространения цунами зависит только от глубины H и определяется по формуле Лагранжа [2]:

$$v = \sqrt{gH}, \quad (1)$$

то существует возможность приближенного определения глубин в тех частях акватории, где плотность сети наблюдений достаточно высока. В этом случае, рассматривая времена распространения волны от какого-либо регистратора до ближайших с ним, можно приближенно вычислить глубину между этими соседними детекторами. Поставим задачу определения глубин в узлах правой половины области на основе известных времен прихода волны в эти узлы сетки и известных глубин в узлах левой половины области, где располагается источник цунами.

Одним из способов решения прямой кинематической задачи для фронта волны цунами является сеточный метод на основе принципа Гюйгенса [3]. Это значит, что любой узел расчетной сетки, куда к данному моменту пришла волна, становится источником волн, излучающим цунами во всех направлениях. Изобразим схематически на рис. 2 участок расчетной области. Здесь черными квадратиками обозначены те узлы расчетной сетки, в которые возмущение от источника к данному моменту времени уже пришло, и нам известны времена прихода цунами в эти узлы. Нам требуется найти время движения волны от источника до точки **A**.

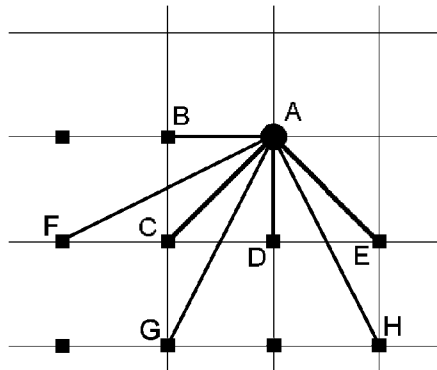


Рис. 2. Схема вычисления времени вступления цунами в точку **A** на основе времен прихода волны в соседние с ней узлы сетки

По отношению к точке **A** соседними узлами, где время добегаания известно, будут точки **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G** и **H**. Пусть времена прихода волны туда равны соответственно $T_B, T_C, T_D, T_E, T_F, T_G$ и T_H . Между соседними узлами сетки изменение глубины происходит по линейному закону. Найдем время пробега волны цунами между двумя точками, расстояние между которыми равно L , а глубина меняется от величины H_1 до величины H_2 . Введем вспомогательную величину — угол наклона дна $\alpha = (H_2 - H_1)/L$. Тогда время пробега запишется в виде

$$\begin{aligned}
T &= \int_0^L \frac{dl}{\sqrt{g(H_1 + l \operatorname{tg} \alpha)}} = \frac{1}{\sqrt{g \operatorname{tg} \alpha}} \int_0^L \left(l + \frac{H_1}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^{-1/2} d\left(l + \frac{H_1}{\operatorname{tg} \alpha}\right) = \frac{2}{\sqrt{g \operatorname{tg} \alpha}} \left(l + \frac{H_1}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^{1/2} \Big|_0^L \\
&= \frac{2}{\sqrt{g \operatorname{tg} \alpha}} \frac{\sqrt{H_2} - \sqrt{H_1}}{\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}} = \frac{2}{\sqrt{g \operatorname{tg} \alpha}} \frac{H_2 - H_1}{\sqrt{H_2} + \sqrt{H_1}} = \frac{2L}{\sqrt{gH_2} + \sqrt{gH_1}}. \tag{2}
\end{aligned}$$

Следовательно, время движения волны цунами между соседними узлами расчетной сетки равно расстоянию между ними, деленному на среднее арифметическое скоростей цунами в этих узлах. Таким образом, для того чтобы найти время пробега волны от источника до точки **A**, требуется найти минимум из семи времен:

$$\begin{aligned}
T_1 &= T_{\mathbf{B}} + \frac{2\Delta x}{\sqrt{gH_{\mathbf{B}}} + \sqrt{gH_{\mathbf{A}}}}, & T_2 &= T_{\mathbf{C}} + \frac{2\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\sqrt{gH_{\mathbf{C}}} + \sqrt{gH_{\mathbf{A}}}}, \\
T_3 &= T_{\mathbf{D}} + \frac{2\Delta y}{\sqrt{gH_{\mathbf{D}}} + \sqrt{gH_{\mathbf{A}}}}, & T_4 &= T_{\mathbf{E}} + \frac{2\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\sqrt{gH_{\mathbf{E}}} + \sqrt{gH_{\mathbf{A}}}}, \\
T_5 &= T_{\mathbf{F}} + \frac{2\sqrt{(2\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\sqrt{gH_{\mathbf{F}}} + \sqrt{gH_{\mathbf{A}}}}, & T_6 &= T_{\mathbf{G}} + \frac{2\sqrt{(\Delta x)^2 + (2\Delta y)^2}}{\sqrt{gH_{\mathbf{G}}} + \sqrt{gH_{\mathbf{A}}}}, \\
T_7 &= T_{\mathbf{H}} + \frac{2\sqrt{(\Delta x)^2 + (2\Delta y)^2}}{\sqrt{gH_{\mathbf{H}}} + \sqrt{gH_{\mathbf{A}}}}, \tag{3}
\end{aligned}$$

где Δx , Δy — шаги сетки в горизонтальном и вертикальном направлениях, а $H_{\mathbf{A}}$, $H_{\mathbf{B}}$, $H_{\mathbf{C}}$, $H_{\mathbf{D}}$, $H_{\mathbf{E}}$, $H_{\mathbf{F}}$, $H_{\mathbf{G}}$ и $H_{\mathbf{H}}$ — значения глубины в соответствующих точках. Минимальное из значений T_i ($i = 1, \dots, 7$) даст нам время пробега волны цунами от очага до точки **A**. Таким способом можно поочередно найти времена добегания цунами во все узлы расчетной сетки.

Для примера рассмотрим следующую задачу. Пусть в какой-либо области океана регистраторы цунами располагаются в узлах прямоугольной сетки размером 1000×500 , ячейки которой имеют размеры $LX = 1$ км и $LY = 1$ км. В левой части области располагается точечный источник цунами (узел расчетной сетки), где значение времени равно нулю. Пусть, для конкретности, источник расположен в узле (250, 250). Пусть во всех узлах сетки известны времена вступления цунами. Требуется определить глубины в узлах правой половины области на основе известных времен прихода волны в эти узлы сетки и известных глубин в узлах левой половины области. Времена прихода волны в узлы прямоугольной сетки рассчитаны путем интерполяции на основе времен прихода волны в точки, расположенные вдоль 400 волновых лучей, которые строились по аналитическим формулам, описанным в [4]. Изохроны вычисленных времен во всей области визуализированы на рис. 3.

Теперь опишем алгоритм восстановления глубин в каждом из узлов сетки, где значение глубины до этого момента еще не было определено. Рисунок 2 показывает схему определения глубины в узловой точке **A** на основе известных значений глубины в соседних точках.

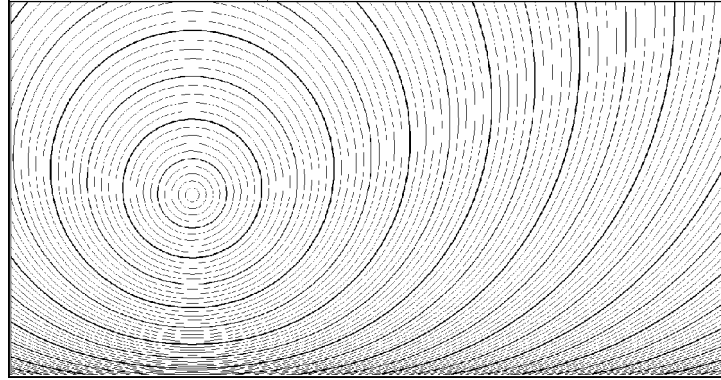


Рис. 3. Положения волнового фронта цунами от точечного источника над наклонным дном

Пусть в узлах сетки **В**, **С**, **Д**, **Е**, **Ф**, **Г** и **Н** наряду со временем прихода туда волны известна также и глубина. Из формулы для времени движения волны между соседними узлами (2) может быть получено выражение для глубины при известном времени движения вдоль отрезка при предположении линейности изменения глубины между этими узлами

$$D_2 = \frac{\left(\frac{2L}{T_2 - T_1} - \sqrt{gD_1}\right)^2}{g}. \quad (4)$$

Здесь D_1 и D_2 — значения глубины в начальной и конечной точках, T_1 и T_2 — моменты вступления туда волны, L — расстояние между этими точками. Порядок действий следующий: сначала по формуле (4) восстановим глубину в точке **В**, затем по найденному значению глубины, используя формулу (2), вычисляем время прихода волны в точку **А** из соседних с ней узлов **С**, **Д**, **Е**, **Ф**, **Г** и **Н**. Если какое-либо из найденных значений времени (для конкретности, из точки **Е**) будет меньше реально зарегистрированного, тогда вместо точки **В** для восстановления глубины в точке **А** по формуле (4) следует взять точку **Е**. Далее, используя новое значение глубины в точке **А**, снова вычисляем по формуле (2) времена прихода волны из всех соседних узлов. Если снова время прихода волны из какого-либо соседнего узла окажется меньше реально зафиксированного, тогда повторяем процедуру до тех пор, пока не сможем найти такого соседнего узла, откуда время прихода волны является меньше реально зарегистрированного. После этого глубина в точке **А** считается восстановленной, и переходим к следующей точке. Этот алгоритм является неустойчивым, и в результате глубина в каком-либо узле после процедуры восстановления может существенно превысить истинное значение. Из-за этого в соседнем с ним узле восстановленная глубина будет существенно меньше истинного значения. И так далее. Чтобы избежать этого после восстановления очередного столбца (с индексом i) в массиве глубин следует провести сглаживание восстановленных значений глубины по формуле

$$D(i-1, j) = \left(D(i-2, j+1) + D(i-1, j+1) + D(i, j+1) + D(i-2, j) + D(i-1, j) + \right. \\ \left. t + D(i, j) + D(i-2, j-1) + D(i-1, j-1) + D(i, j-1) \right) / 9. \quad (5)$$

После этого глубины в столбце с индексом i восстанавливаем повторно (уже с учетом сглаженных значений глубины).

Результаты восстановления глубины в области с наклонным дном на основе известных времен прихода цунами в узлы прямоугольной сетки с пространственными шагами $\Delta x = \Delta y = 1$ км приведены на рис. 4. Здесь показано распределение относительной погрешности восстановления значений глубины в узлах прямоугольной сетки в правой половине расчетной области (по сравнению с глубиной, линейно возрастающей от нижней границы к верхней).

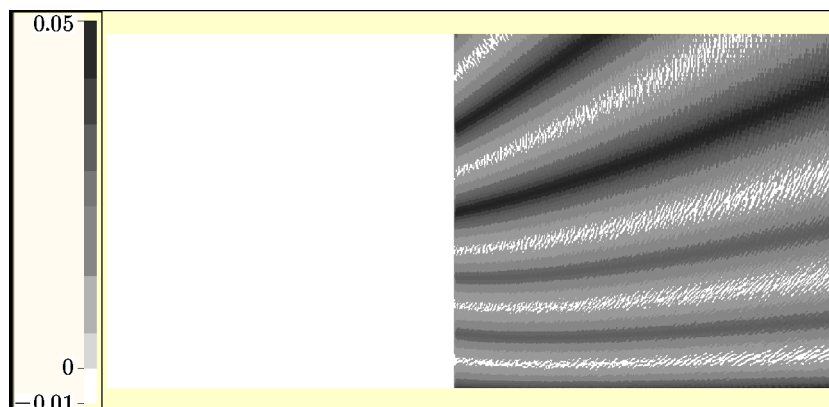


Рис. 4. Распределение относительных погрешностей восстановления глубины в области с наклонным дном на основе времен вступления цунами в узлы прямоугольной сетки детально-стью 1 км

Из рис. 4 видно, что диапазон ошибок составляет от 5 % при превышении восстановленным значением точного и до 1 % процента, когда восстановленная глубина меньше точного ее значения. При этом ошибки более 3 % достигаются лишь в очень небольшом числе узлов, которые на рис. 4 окрашены самым темным цветом. Таким образом, описанный метод позволяет достаточно точно восстанавливать глубину в области, где известны времена вступления цунами в узлы прямоугольной сетки. Возникает законный вопрос: как сильно точность восстановления зависит от детальности сеток? С этой целью проведено восстановление глубин в той же области 1000×500 км, когда заданы времена прихода волны цунами в узлы сетки с детальностью $\Delta x = \Delta y = 2$ км. Относительные погрешности восстановления глубин в этом случае представлены на рис. 5.

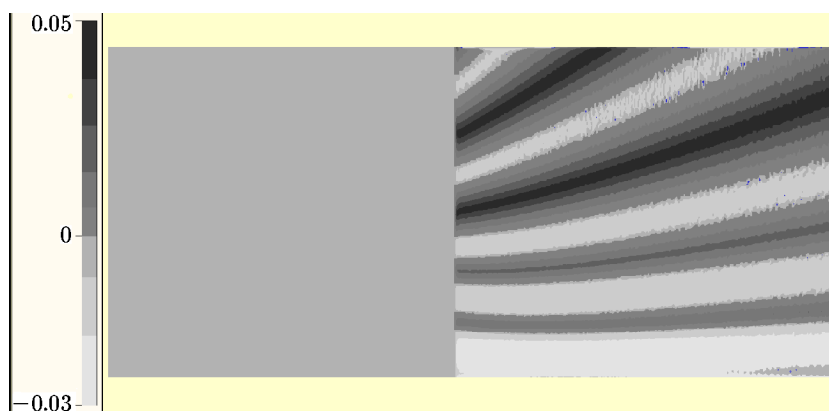


Рис. 5. Распределение относительных погрешностей восстановления глубины в области с наклонным дном на основе времен вступления цунами в узлы прямоугольной сетки детально-стью 2 км

Из этого рисунка видно, что в отличие от восстановления глубин на сетке детально-стью 1 км относительная погрешность отрицательной ошибки восстановления выросла примерно в 3 раза (с -0.01 до -0.03). При этом положительные ошибки восстановления остались на прежнем уровне. Очевидно, при дальнейшем огрублении сетки отрицательные ошибки будут возрастать, так как при восстановлении глубины время движения фронта волны между соседними узлами вычисляется вдоль прямых отрезков, что дольше, чем вдоль экстремалей, имеющих вид отрезков циклоид.

Теперь опишем другой алгоритм восстановления значений глубины в узлах прямоугольной сетки по временам вступления туда волны цунами. Как и в предыдущем случае, в левой части (для определенности) области 1000×500 км располагается источник цунами с параметрами, приведенными выше. Предположим, что во всех узлах левой половины области наряду со временами прихода туда волны цунами известна также и глубина. Требуется на основе известных времен прихода цунами определить значения глубины во всех остальных узлах сетки. Рассмотрим ячейку сетки размером LX в направлении оси OX и LY в направлении оси OY , находящуюся на границе той части области, где значения глубины к данному моменту уже восстановлены (рис. 6).

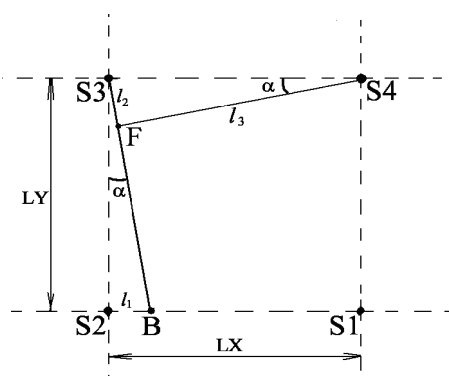


Рис. 6. Схема алгоритма восстановления глубины в точке **S4** по временам вступления цунами, используя направление движения волнового фронта

Узлы рассматриваемой ячейки, обозначенные на рисунке как **S1**, **S2**, **S3** и **S4**, имеют декартовы координаты (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, 4$. Пусть в точках **S1**, **S2**, **S3** наряду со временем вступления туда цунами на данный момент известна также и глубина (D_{S1}, D_{S2}, D_{S3}) . Поставим задачу: на основе этих данных восстановить значение глубины D_{S4} в точке **S4**. Опишем этот алгоритм. Пусть для определенности $T_{S2} \leq T_{S3} \leq T_{S1} \leq T_{S4}$. Найдем сначала координаты точки **B**, расположенной на отрезке $[S2, S1]$, которая находится на изохроне, соответствующей положению волнового фронта в момент времени T_{S3} . Для восстановления глубины в точке **S4** по формуле (4) требуется найти координаты точки **F**, являющейся точкой пересечения сегмента изохроны $(S3, B)$ и перпендикуляра к нему, выпущенному из точки **S4**, а также глубину в точке **F**. Пусть угол между отрезком волнового фронта **BS3** равен α . Тогда, принимая во внимание то, что скорость движения точки пересечения фронта с отрезком **S2S1** больше скорости волнового фронта в $1/\cos(\alpha)$ раз, величина $\cos(\alpha)$ вычисляется по формуле

$$\cos(\alpha) = \frac{(T_{S1} - T_{S2}) (\sqrt{gH_{S1}} + \sqrt{gH_{S2}})}{2LX}. \quad (6)$$

Далее, после нахождения из формулы (6) угла α легко найти расстояние l_3 от точки **S4**

до точки \mathbf{F} , длину l_1 отрезка $\mathbf{S2B}$ и расстояние l_2 от точки \mathbf{F} до узла $\mathbf{S3}$ (см. рис. 6)

$$l_3 = LX \cdot \cos(\alpha), \quad l_1 = LY \cdot \operatorname{tg}(\alpha), \quad l_2 = LX \cdot \sin(\alpha). \quad (7)$$

Теперь для определения глубины в точке $\mathbf{S4}$ остается лишь определить глубину в точке \mathbf{F} . Из предположения билинейного характера изменения глубины в рассматриваемой ячейке с помощью линейной интерполяции можно найти сначала глубину в точке \mathbf{B} , а затем в точке \mathbf{F} :

$$D_{\mathbf{B}} = D_{\mathbf{S2}} + \frac{l_1}{LX} (D_{\mathbf{S1}} - D_{\mathbf{S2}}), \quad (8)$$

$$D_{\mathbf{F}} = D_{\mathbf{S3}} + \frac{l_2}{\sqrt{LY^2 + l_1^2}} (D_{\mathbf{B}} - D_{\mathbf{S3}}). \quad (9)$$

И наконец, по известным временам прихода волны в точки \mathbf{F} и $\mathbf{S4}$, а также по найденной глубине $D_{\mathbf{F}}$ находим по формуле (4) глубину в точке $\mathbf{S4}$:

$$D_{\mathbf{S4}} = \frac{\left(\frac{2l_3}{T_{\mathbf{S4}} - T_{\mathbf{S3}}} - \sqrt{gD_{\mathbf{F}}} \right)^2}{g}. \quad (10)$$

Здесь длина l_3 находится по формуле (7).

Вернемся к тому моменту при постановке задачи в одной ячейке сетки, где известна глубина в трех из четырех углов этой ячейки. При восстановлении глубин в узлах сетки очередного столбца правой половины области требуется восстановить глубину хотя бы в одном узле этого столбца. Затем применяется вышеописанный алгоритм. Восстановление глубин в узлах очередного столбца сетки следует начинать с приграничного узла либо у верхней, либо у нижней границ области. В случае рассматриваемого рельефа дна следует начинать от верхней границы области. Приблизительное значение глубины в приграничной точке вычисляется описанным выше способом с тем отличием, когда сегмент изохроны цунами, от которого отсчитывается время движения фронта цунами до точки $\mathbf{S4}$, находится не внутри ячейки с углами $\mathbf{S1}$, $\mathbf{S2}$, $\mathbf{S3}$ и $\mathbf{S4}$, а внутри соседней с ней ячейки (рис. 7).

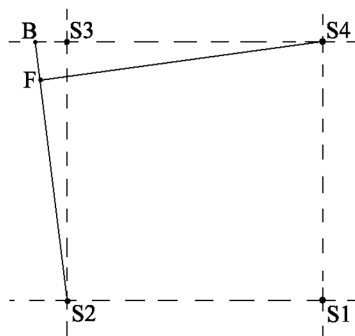


Рис. 7. Схема построения сегмента волнового фронта для последующего нахождения глубины в точке $\mathbf{S4}$

Координаты точек \mathbf{B} , \mathbf{F} и глубина там легко вычисляются по формулам, подобным (6)–(9). В результате, вдоль отрезка $[\mathbf{F}, \mathbf{S4}]$ по формуле (4) можно восстановить глубину в точке $\mathbf{S4}$. В том случае, когда время прихода цунами в точку $\mathbf{S3}$ меньше, чем

в точку **S2**, вычисляем глубину сначала в точке **S1**, а затем в точке **S4**. И таким способом можно восстановить глубины в узлах прямоугольной сетки, где известны времена прихода туда волн цунами.

Заключение

Показана возможность приближенной оценки глубин в точках установки регистраторов на основе времен вступления туда волн цунами. Предложены два алгоритма решения такой задачи. Но следует заметить, что для практического решения этой обратной задачи таким способом требуется достаточно густая сеть наблюдений. К тому же описанные алгоритмы построены на предположении линейного изменения глубины между точками расположения регистраторов, что не всегда соответствует действительности.

Следует заметить, что предложенные в статье методы представляют только академический интерес, потому что на практике гораздо дешевле просто померить эхолотом глубину в некоторой точке, чем устанавливать там регистратор цунами и ждать, когда он зарегистрирует реальную волну цунами. Вместе с тем предложенные в статье алгоритмы могут быть с успехом применены для восстановления сред, где установка сети регистраторов не является затратной.

Литература

1. **Percival D.B., Denbo D.W., Eble M.C. et al.** Extraction of tsunami source coefficients via inversion of DART buoy data // Nat. Hazards. — 2011. — Vol. 58, № 1. — P. 567–590.
2. **Стокер Дж.Дж.** Волны на воде. — М.: ИЛ, 1959.
3. **Марчук Ан.Г.** Численные методы расчета кинематики волн цунами // Математические проблемы геофизики: Численные исследования геофизических задач. — Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1988. — С. 69–90.
4. **Марчук Ан.Г.** Вычисление высоты цунами, распространяющейся над наклонным дном, в лучевом приближении // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2015. — Т. 18, № 4. — С. 377–388. Перевод: Marchuk An.G. Estimating Tsunami Wave Height over a Sloping Bottom in the Ray Approximation // Numerical Analysis and Applications. — 2015. — Vol. 8, № 4. — P. 304–313.

Поступила в редакцию 26 сентября 2018 г.

После исправления 26 марта 2019 г.

Принята к печати 21 октября 2020 г.

Литература в транслитерации

1. **Percival D.B., Denbo D.W., Eble M.C. et al.** Extraction of tsunami source coefficients via inversion of DART buoy data // Nat. Hazards. — 2011. — Vol. 58, № 1. — P. 567–590.
2. **Stoker Dzh.Dzh.** Volny na vode. — М.: ИЛ, 1959.
3. **Marchuk An.G.** Chislennyye metody rascheta kinematiki voln tsunami // Matematicheskie problemy geofiziki: Chislennyye issledovaniya geofizicheskikh zadach. — Novosibirsk: Izd-vo VTS SO AN SSSR, 1988. — S. 69–90.

4. **Marchuk An.G.** Vychislenie vysoty tsunami, rasprostranyayuscheisya nad naklonnym dnom, v luchevom priblizhenii // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2015. — T. 18, № 4. — S. 377–388. Perevod: Marchuk An.G. Estimating Tsunami Wave Height over a Sloping Bottom in the Ray Approximation // Numerical Analysis and Applications. — 2015. — Vol. 8, № 4. — P. 304–313.