РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗРАБОТКИ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

2023 № 1

ГЕОМЕХАНИКА

УДК 539.37

О ВЛИЯНИИ РОТОРА ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ НА ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ГЕОСРЕДЫ

А. Ф. Ревуженко

Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,
E-mail: revuzhenko@yandex.ru, *Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия*

Рассмотрен пример сложного нагружения сыпучей среды с непрерывным поворотом главных осей тензора деформаций. Описана методика экспериментов, в которых может быть выявлена зависимость напряжений от относительной скорости поворота. Показано, что в определяющих уравнениях можно использовать скорость поворота элементарных объемов сплошной среды относительно скорости поворота главных направлений тензора скоростей деформаций.

Определяющие уравнения, принцип объективности, индифферентности, скорость поворота, сложное нагружение

DOI: 10.15372/FTPRPI20230101

Теоретическое исследование напряженно-деформированного состояния горного массива, выпуска и транспортировки руды, угля и других сыпучих материалов, а также ряда других задач горного дела предполагает использование различных математических моделей процесса. Основные уравнения математической модели — определяющие уравнения — описывают связь между напряжениями, деформациями и их скоростями. Предполагается, что ротор поля скоростей (вращение) в уравнение входить не должен. Действительно, жесткие поворот и перенос тела на его определяющие уравнения влиять не должны. Это положение формулируется как принцип независимости от выбора системы отсчета, или принцип индифферентности, объективности [1 – 3]. Принцип кажется очевидным, однако его практическая реализация часто бывает нетривиальной. Так, для описания сложного нагружения с непрерывным поворотом осей тензора деформаций использование в уравнениях ротора поля скоростей становится необходимым. Покажем последнее на одном примере и рассмотрим, как это согласуется с принципом объективности.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 21-17-00008, https://rscf.ru/project/21-17-00008.

Для ясности ограничимся случаем плоской деформации и несжимаемости (дилатансия будет проявляться только через изменение высоты образца) [4–6]. Пусть мы располагаем устройством нагружения, которое любое тело, помещенное в него, растягивает в заданном направлении сзаданной скоростью и сжимает в ортогональном направлении. Как известно, устройства подобного типа называются жесткими. В них на границе тела задаются именно скорости, а не силы. Обозначим через $Ox_1^{\text{н}}$ — направление растяжения тела, а через $Ox_2^{\text{н}}$ — направление его сжатия. Индекс “н” подчеркивает тот факт, что указанные направления относятся к устройству нагружения. На границе тела устройство задает следующие скорости:

$$v_1^{\text{н}} = \frac{dx_1^{\text{н}}}{dt} = kx_1^{\text{н}},$$
$$v_2^{\text{н}} = \frac{dx_2^{\text{н}}}{dt} = -kx_2^{\text{н}}, \tag{1}$$

где $x_1^{\text{н}}$, $x_2^{\text{н}}$ — декартовы координаты; $k = k(t)$ — программа нагружения; t — время.

Предположим, что тело является однородным и способно выдерживать любые необходимые деформации без локализации сдвигов, разрушения и потери устойчивости [7–11]. В случае квазистатического нагружения скоростям (1) на границе тела отвечает однородная, аффинная деформация (1) и внутри тела. Можно утверждать, что устройство нагружения задает скорости (1) для всех точек тела: как граничных, так и внутренних. Результатом эксперимента являются напряжения, которые измеряются как реакция тела на условия нагружения (1): $\sigma_{ij}^{\text{н}}(t)$, $i, j = 1, 2$.

Добавим теперь к растяжению – сжатию (1) поворот границ тела и всех его элементарных объемов на угол $æ(t)$ со скоростью, равной $\omega(t) = dæ / dt$:

$$v_1^{\text{н}} = \frac{dx_1^{\text{н}}}{dt} = kx_1^{\text{н}} - \omega x_2^{\text{н}},$$
$$v_2^{\text{н}} = \frac{dx_2^{\text{н}}}{dt} = -kx_2^{\text{н}} + \omega x_2^{\text{н}}. \tag{2}$$

Сравнивая (2) с (1), кажется, что они отличаются друг от друга жестким поворотом. Однако это не так. Согласно (1), при $k = \text{const}$

$$x_1^{\text{н}}(t) = a_1 e^{kt}, \quad x_2^{\text{н}}(t) = a_2 e^{-kt}, \quad a_i = x_i(0), i = 1, 2.$$

Таким образом, при $t \to \infty$ все точки, кроме начала координат, уходят на бесконечность. В процессе (2) ситуация другая. При $\omega > k$, $k, \omega = \text{const}$, $\lambda = \sqrt{\omega^2 - k^2}$ имеем

$$x_1^{\text{н}}(t) = \left(\frac{k}{\lambda}a_1 - \frac{\omega}{\lambda}a_2\right)\sin\lambda t + a_1\cos\lambda t,$$
$$x_2^{\text{н}}(t) = \left(\frac{\omega}{\lambda}a_1 - \frac{k}{\lambda}a_2\right)\sin\lambda t + a_2\cos\lambda t. \tag{3}$$

Здесь точки движутся по эллиптическим траекториям и на бесконечность не уходят. Материальное волокно, когда оно ориентировано вдоль направления $Ox_1^{\text{н}}$, растягивается. При повороте к направлению $Ox_2^{\text{н}}$ волокно укорачивается и т. д.

Интересно отметить, что именно данный тип нагружения реализуется для небесных тел, находящихся под действием приливных сил [12, 13]. Как известно, приливные силы всегда направлены к возмущающемуся телу и в этом направлении тело растягивают. В ортогональном направлении те же силы сжимают тело. Главным является то обстоятельство, что тело относительно указанных направлений, как правило, поворачивается [14, 15]. Следовательно, здесь наблюдается нагружение типа (2) [16].

Добавление аддитивных слагаемых в равенства (1) означает описание нового устройства нагружения. Новое устройство по-прежнему растягивает тело в направлении $Ox_1^{\text{н}}$, сжимает его вдоль $Ox_2^{\text{н}}$ и принудительно поворачивает тело относительно указанных направлений. Функции $k(t)$ и $æ(t)$ определяют программу работы нового устройства. Напряжения, которые вызываются кинематикой (2), зависят от всех параметров нагружения, а значит, от параметра $æ(t)$ и истории его изменения.

Зависимость от поворота $æ(t)$, на первый взгляд, выглядит парадоксальной. Можно ли ей придать механический смысл? Вернемся к процессу (2). Опишем его в координатах Oy_1y_2, повернутых относительно оси $Ox_1^{\text{н}}$ на угол $\pi/4$ (рис. 1).

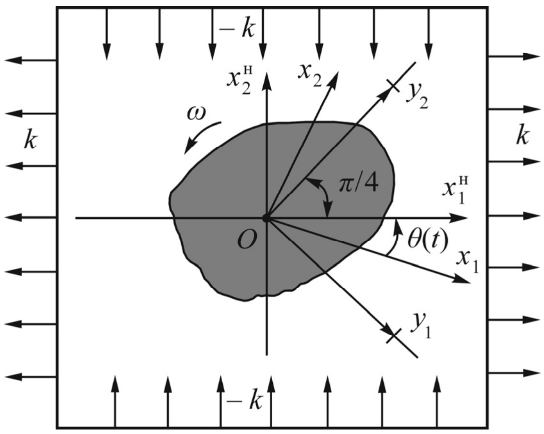

Рис. 1

В данных координатах вместо (2), (3) получаем:

$$\frac{dy_1}{dt} = \gamma y_2 - \Omega y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \Omega y_1, \tag{4}$$

$$y_1(t) = a_1 \cos\mu t - a_2 \frac{\mu}{\Omega} \sin\mu t,$$

$$y_2(t) = a_1 \frac{\Omega}{\mu} \sin\mu t + a_2 \cos\mu t,$$

где $\Omega > \gamma$, $\mu = \sqrt{\Omega(\Omega - \gamma)}$, $\gamma = 2k$, $\Omega = k + \omega$. Положим $\Omega \equiv 0$. Тогда

$$\frac{dy_1}{dt} = \gamma(t) y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} \equiv 0 .$$

Теперь можно сказать, что устройство (2) осуществляет простой сдвиг [17] тела в направлении Oy_1. Нетрудно представить себе следующий возможный механизм такого сдвига. Устройство разделяет тело на тонкие пластины, параллельные оси Oy_1. Пластины сдвигаются как колода карт и таким образом реализуют макросдвиг. Для такого сдвига (рис. 2) потребуются определенные напряжения и энергия. Если угол поворота скачком изменится, например на $\pi/4$, то старые контакты перестают функционировать. Материал прорезается новыми контактами, параллельными оси Oy_1. Сдвиг какое-то время осуществляется по ним и т. д. При непрерывном изменении угла поворота материал “перемалывается” по всем направлениям, которые прошли через прямые $y_2 = \text{const}$, параллельные оси Oy_1. Так, если сыпучий материал находится в предельном состоянии и кинематика его движения такова, что через площадки скольжения проходит все время новый материал, то реализуется именно указанная ситуация.

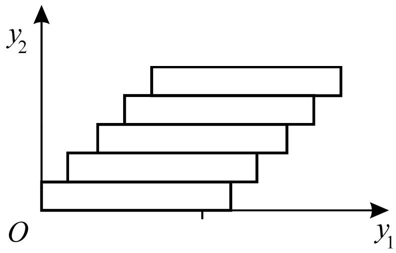

Рис. 2

В действительности все несколько сложнее и интереснее. Эксперименты показывают, что данный процесс реализуется дискретным образом. Площадки скольжения испытывают конвективный перенос. За счет переноса отношение касательных направлений к нормальным уменьшается. Скольжение прекращается. Затем по нетронутому материалу образуются новые площадки и все повторяется снова [18]. Таким образом, следует принять, что напряжения в деформируемом теле будут зависеть не только от истории сдвигов, но и от истории поворотов.

Перейдем теперь к формальному обоснованию. В исходной формулировке принцип объективности равносилен принципу независимости процесса деформирования от переноса и поворота тела как жесткого целого. К этому необходимо добавить только одну деталь: переносу и повороту тела вместе с устройством его нагружения.

Рассмотрим жесткий поворот тела с учетом указанной детали. Пусть Ox_1x_2 — новая система координат, повернутая относительно исходной системы $Ox_1^{\text{н}}x_2^{\text{н}}$ на угол $\theta(t)$ (см. рис. 1). В новых координатах

$$\begin{aligned}
x_1^{\text{н}} &= \cos\theta x_1 + \sin\theta x_2,\\
x_2^{\text{н}} &= -\sin\theta x_1 + \cos\theta x_2,\\
v_1^{\text{н}} &= \cos\theta v_1 + \sin\theta v_2,\\
v_2^{\text{н}} &= -\sin\theta v_1 + \cos\theta v_2.
\end{aligned} \tag{5}$$

Подставим данные равенства в (2) и учтем зависимость угла θ от времени. Получим

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{dx_1}{dt} = k(\cos 2\theta x_1 + \sin 2\theta x_2) - x_2\frac{d(æ+\theta)}{dt},\\
v_2 &= \frac{dx_2}{dt} = -k(-\sin 2\theta x_1 + \cos 2\theta x_2) + x_1\frac{d(æ+\theta)}{dt}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Равенствам (5), (6) соответствует прежний физический процесс (2). Может быть, следует подчеркнуть — прежний процесс в прежних координатах $Ox_1^{\text{н}}x_2^{\text{н}}$. Тогда о равенстве (6) можно сказать так: (6) — это наблюдение нагружения (2) с новой, подвижной точки зрения. Структура данных равенств такова, что

$$\varepsilon = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0, \quad k = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)^2}, \tag{7}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) = \frac{d(æ + \theta)}{dt},$$
$$\mathrm{tg}2\theta = \frac{\dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} - \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2}} \tag{8}$$

и, значит,

$$\frac{dæ}{dt} = \omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mathrm{arctg}\frac{\dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} - \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2}}. \tag{9}$$

Все равенства получены на основе (2) и относятся к деформированию тела конечных размеров, т. е. тела, которое находится в условиях однородной, аффинной деформации [19, 20]. Смысл равенств (7) общеизвестен. Это инварианты тензора скоростей деформаций. Равенство (8) дает ориентацию главного направления тензора скоростей деформации, а равенство (9) — скорость вращения относительно скорости вращения главного направления тензора скоростей деформаций.

Перейдем к вопросу об определяющих уравнениях. В рамках концепции сплошной среды определяющие уравнения описывают поведение бесконечно малых объемов этой среды. Примем, что поле скоростей достаточно гладкое, т. е. примем гипотезу о существовании частных производных скоростей по координатам. Последнее означает, что любое неоднородное поле скоростей локально линейное, т. е. аффинное. Следовательно, равенства (7) – (9) можно использовать и для неоднородного поля скоростей. Исключим из рассмотрения материалы, поведение которых определяется моделями градиентного типа [21 – 25]. Тогда связь параметров кинематики течения (2) с напряжениями, которые вызываются данной кинематикой, можно рассматривать как определяющие уравнения среды. Таким образом, в определяющих уравнениях могут фигурировать как история изменения инвариантов тензора скоростей деформаций, так и история изменения поворота среды относительно скорости вращения главного направления тензора скоростей деформаций. Данный относительный поворот — величина индифферентная и удовлетворяет принципу объективности. Теперь для каждого элементарного объема среды роль нагружающего устройства играют соседние окрестные элементы вплоть до граничных элементов, которые контактируют с нагружающим устройством уже непосредственно. Основной вывод можно сформулировать следующим образом: при квазистатическом нагружении напряжения в точке x_1, x_2 в момент времени t являются функционалами от истории деформирования элементарного объема, который придет в точку (x_1, x_2) к моменту времени t, включая историю поворота $æ(t)$ элементарного объема. Символически это можно записать так:

$$\sigma_{ij}(x_1, x_2, t) = \bigvee_{\tau=0}^{\tau=t} F_{ij}\left(k, \frac{dæ}{d\tau}\right), \tag{10}$$

где F_{ij} относится к функционалу, определяющему компоненту напряжения σ_{ij}.

Будем считать, что данной записью охватываются также случаи, когда напряжения зависят и от самих деформаций. Это имеет значение для учета упругих деформаций, а также построения теорий пластичности деформационного типа.

Тот факт, что в записи (10) учитывается аргумент $æ(\tau)$, на количество определяющих уравнений не влияет. Равенство (9) играет роль только определения $æ(t)$. Если рассмотреть пространственную деформацию и снять условие несжимаемости, то основной вывод не изменится.

Далее рассмотрим эксперименты, которые могут выявить роль скоростей сдвига и поворота. Техническая реализация существенно зависит от характерных напряжений, которые необходимо создать. Основную роль здесь играет сцепление материала. Возьмем случай, когда сцепление сравнительно невелико. Будем иметь в виду прежде всего сыпучие материалы, грунты, буровые растворы, сложные жидкости и другие подобные материалы.

Обратимся к аффинным условиям нагружения (2). Идеальны эксперименты, в которых можно реализовать течение (2) при любых необходимых программах нагружения $k(t)$, $æ(t)$. Например, если k, $\dot{æ} = \text{const}$ и $\dot{æ} > k$, то для реализации необходимо создать камеру нагружения в форме эллиптического прямого цилиндра. Деформация плоская. Направляющая цилиндра — эллипс. На границе эллипса нужно задать вектор скорости такой, что

$$\overline{v} \times \overline{r} = \text{const}, \quad (\overline{v} \cdot \overline{n}) = 0, \tag{11}$$

где $\overline{r}$ — радиус-вектор эллипса; $\overline{n}$ — нормаль к эллипсу.

При технической реализации первое условие проще заменить на следующее: $|\overline{v}| = \text{const}$. Тогда для достаточно малого элемента в центре образца условия (11) будут выполнены точно (как отмечалось, деформация малых объемов для гладких полей перемещений всегда является аффинной). Центральный элемент не испытывает конвективного переноса. Поэтому, делая измерения напряжений и деформаций в центре образца, можно получить все необходимые данные [18].

Вторая возможность состоит в том, чтобы за основу взять не условия (11) для эллипса, а обратиться к определению мер деформаций и напряжений, которые вводятся в теоретических построениях. Здесь элемент среды в исходном состоянии представляет собой квадрат (деформация плоская). Далее рассматривается конвективный перенос элемента и преобразование его в параллелограмм. Снова обратимся к процессу деформирования (2) и рассмотрим поведение образца, состоящего из одних и тех же материальных частиц $0 \le a_1$, $a_2 \le 1$. В плане такой образец при $t = 0$ представляет собой квадрат с вершинами *O*: $a_1 = 0$, $a_2 = 0$; *A*: $a_1 = 1$, $a_2 = 0$; *B*: $a_1 = 0$, $a_2 = 1$; *C*: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$. Обозначим через $\overline{r}_A(t)$, $\overline{r}_B(t)$ — радиус-векторы точек *A*, *B* в координатах Ox_1x_2, через α — угол между векторами. Скалярные величины

$$|\overline{r}_A|^2 = 1 + \frac{\gamma}{\Omega - \gamma}\sin^2 \mu t, \quad |\overline{r}_B|^2 = 1 - \frac{\gamma}{\Omega}\sin^2 \mu t, \quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{\mu}{\gamma}\frac{2}{\sin 2\mu t} \tag{12}$$

от выбора координат не зависят и однозначно определяют процесс аффинного преобразования выбранного элемента. Естественно исследовать этот процесс в координатах с осью Oz_1 (рис. 3), направленной, например, по стороне OA. Элемент в координатах Oz_1z_2 испытывает простой сдвиг [17]. Длины сторон и угол α периодически меняются так, что площадь остается постоянной. Видно, что величины γ и Ω влияют на период $T = 2\pi / \sqrt{\gamma(\gamma - \Omega)}$ и, главное, на амплитуду колебаний всех параметров.

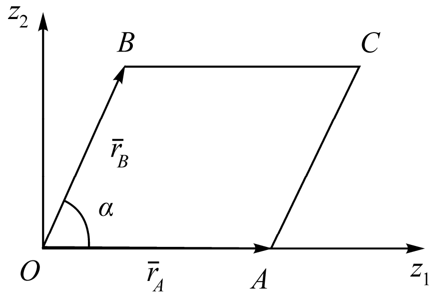

Рис. 3

Для реализации программы (12) необходимо создание специального стенда. Однако один эффект, связанный с цикличностью деформирования сыпучих материалов, можно проследить и на приборе однородного сдвига [6]. Здесь

$$|\bar{r}_A| = 1, \quad |\bar{r}_B| = \frac{1}{\sin\alpha}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2} + \delta \sin t, \quad 0.05 \le \delta \le 0.12 .$$

Эксперименты показывают [18], что первые примерно 20 циклов меняют упаковку частиц необратимым образом. Это приводит к изменению пластических модулей, поэтому напряжения становятся зависимыми от параметра Ω. Через 20 циклов образец “забывает” свое начальное состояние. При этом упаковка переходит в обратимое состояние. Возникающие напряжения зависят от амплитуды размаха δ. Можно ожидать, что подобная ситуация будет и в случае (12). Последнее означает, что относительная скорость поворота существенно повлияла на историю нагружения и, как следствие, — на напряженное состояние среды. В то же время можно указать сколько угодно ситуаций, где такого влияния не будет. В рассматриваемом выше случае скорости сдвига и поворота были постоянными.

Представляют интерес случаи нагружения с переменными скоростями, изломами траектории нагружения, а также с разгрузкой. Обратимся к описанию (6). Программа $æ(t)$ задана. Выберем координаты $\theta(t)$ так, чтобы $\dot{\theta} + \dot{æ} \equiv 0$, т. е. положим $\dot{\theta} = -\dot{æ}$. В данных координатах процесс (6) будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{dx_1}{dt} = k(t)[x_1 \cos 2æ(t) - x_2 \sin 2æ(t)], \\ v_2 &= \frac{dx_2}{dt} = -k(t)[x_1 \sin 2æ(t) + x_2 \cos 2æ(t)]. \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь скорость поворота вообще равна нулю. Если в качестве элемента среды взять квадрат $0 \le a_1,\ a_2 \le 1$, то видно, что квадрат переходит в параллелограмм. Как и в случае (12), длины его сторон и угол между ними меняются. Программа их изменения будет более сложной, чем (12), и определяется решением уравнений (13) при заданных функциях $k(t)$ и $æ(t)$.

Для оценки всех указанных факторов могут быть использованы также численные эксперименты. Они возможны в случаях, когда моделируется физический механизм деформирования среды. Например, для сыпучих сред поведение моделируется методом дискретных элементов.

ВЫВОДЫ

В определяющих уравнениях (сыпучей и других сред, обладающих малым сцеплением) наряду с инвариантами тензоров напряжений и скоростей деформаций может быть использована скорость поворота элемента среды относительно скорости поворота главных осей тензора скоростей деформаций.

Влияние поворота может быть определено в экспериментах по деформированию образцов в форме прямых эллиптических цилиндров либо образцов кубической формы по специальной программе реализации сдвигов и изменения длин их сторон.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. — М.: Наука, 1980. — 512 с.
2. **Трусов П. В., Келлер А. Э.** Теория определяющих уравнений. Курс механики. Ч. 1. Общая теория. — Пермь: ПГТУ, 1997. — 98 с.
3. **Трусделл К.** Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. — М.: Мир, 1975. — 591 с.
4. **Николаевский В. Н.** Обзор: земная кора, дилатансия и землятресение // Дж. Райс. Механика очага землетрясения. — М.: Мир, 1982. — С. 133 – 215.
5. **Николаевский В. Н.** Дилатансия и законы необратимого деформирования грунтов // Основания, фундаменты и механика грунтов. — 1979. — № 5. — С. 29 – 31.
6. **Бобряков А. П., Ревуженко А. Ф.** Однородный сдвиг сыпучего материала. Дилатансия // ФТПРПИ. — 1982. — № 5. — С. 23 – 29.
7. **Стоянов С. С.** Механизм формирования разрывных зон. — М.: Недра, 1979. — 144 с.
8. **Клишин С. В.** Дискретно-элементное моделирование локализации деформаций в сыпучей среде при пассивном давлении на подпорную стенку // ФТПРПИ. — 2021. — № 5. — С. 35 – 45.
9. **Садовская О. В., Садовский В. М.** Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред. — М.: Физматлит, 2008. — 368 с.
10. **Бобряков А. П., Лубягин А. В.** Экспериментальное исследование неустойчивых режимов скольжения // ФТПРПИ. — 2008. — № 4. — С. 13 – 23.
11. **Бобряков А. П., Лубягин А. В.** Модельные исследования поведения деформированной блочной геосреды при подготовке землетрясений // ФТПРПИ. — 2011. — № 6. — С. 22 – 29.
12. **Дарвин Дж. Г.** Приливы и родственные им явления. — М.: Наука. — 1965. — 251 с.
13. **Авсюк Ю. Н.** Приливные силы и природные процессы. — М.: ОИФЗ РАН, 1996. — 188 с.
14. **Гарецкий Р. Г., Добролюбов А. И.** Приливные дискретно-волновые движения и дрейф континентов. — Минск: Геотектоника. — 2006. — № 1. — С. 3 – 13.
15. **Гарецкий Р. Г., Добролюбов А. И., Левкоц Э. А., Середин Б. П.** Дискретно-волновой механизм глобальных горизонтальных перемещений в литосфере // ДАН БССР. — 1988. — Т. 32. — № 3. — С. 248 – 251.
16. **Ревуженко А. Ф.** Приливные волны и направленный перенос масс Земли. — Новосибирск: Наука, 2013. — 204 с.

17. **Надаи А.** Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2. — М.: Мир, 1969. — 864 с.
18. **Ревуженко А. Ф.** Механика сыпучей среды. — Новосибирск: Офсет, 2003. — 373 с.
19. **Чандпасенхар С.** Эллипсоидальные фигуры равновесия. — М.: Мир, 1973. — 288 с.
20. **Невзглядов В. Г.** Теория тела однородной деформации и ее применение к атомному ядру. — Владивосток: Изд-во ДальГУ, 1970. — 257 с.
21. **Lewandowski M.J. and Stupkiewicz S.** Size effects in wedge indentation predicted by a gradient-enhanced crystal-plasticity model, Int. J. Plasticity, 2017, Vol. 98. — P. 54 – 78.
22. **Liu D. and Dunstan D. J.** Material length scale of strain gradient plasticity: A physical interpretation, Int. J. Plasticity, 2017, Vol. 98. — P. 156 – 174.
23. **Habib Pouriayevali and Bai-Xiang Xu.** A study of gradient strengthening based on a finite-deformation gradient crystal-plasticity model, Continuum Mechanics and Thermodynamics, 2017, Vol. 29. — P. 1389 – 1412.
24. **Dabiao Liu and Dunstan D. J.** Material length scale of strain gradient plasticity: A physical interpretation, Int. J. Plasticity, Vol. 98. — P. 156 – 174.
25. **Aifantis E. C.** Internal length gradient (ILG) material mechanics scales and disciplines, J. Adv. Appl. Mech., 2016, Vol. 49. — P. 1 – 110.

Поступила в редакцию 03/IX 2022
После доработки 15/I 2023
Принята к публикации 19/I 2023