

AMS subject classification: 35G30, 35G05, 65N30

О дискретизации эволюционного p -би-лапласова уравнения

М. Джагут¹, А. Чаоуи¹, К. Ценнир²

¹Laboratoire de Mathématiques Appliquées et de Modélisation, Faculté de Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière, Université 8 Mai 1945 Guelma, B.P. 401, 24000, Guelma, Algérie.

²Department of Mathematics, College of Sciences and Arts, Qassim University, Ar-Rass, Saudi Arabia.

E-mails: Djaghoutmanal@gmail.com (Джагут М.), chaoui_math@yahoo.fr (Чаоуи А.), khaledzennir@gmail.com (Ценнир К.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 4, Vol. 15, 2022.

Джагут М., Чаоуи А., Ценнир К. О дискретизации эволюционного p -би-лапласова уравнения // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2022. — Т. 25, № 4. — С. 371–383.

В данной статье рассматривается смешанный метод конечных элементов в сочетании с обратным методом Эйлера для исследования гиперболического уравнения p -би-Лапласа, где показано существование и единственность решения дискретизированной задачи в пространствах Лебега–Соболева. Затем даются смешанная формулировка и условие \inf – \sup для доказательства корректности схемы и выделяются оптимальные априорные оценки ошибок для полностью дискретных схем. Приведен численный пример, подтверждающий полученные теоретические результаты.

DOI: 10.15372/SJNM20220403

Ключевые слова: эволюционное p -би-лапласово уравнение, смешанный метод конечных элементов, условие \inf – \sup и смешанная формулировка, существование и единственность.

Djaghout M., Chaoui A., Zennir K. On the discretization of evolution p -bi-Laplace equation // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2022. — Vol. 25, № 4. — P. 371–383.

This article discusses the mixed finite element method combined with backward-Euler method to study the hyperbolic p -bi-Laplace equation, where the existence and uniqueness of solution for discretized problem is shown in Lebesgue Sobolev spaces. The mixed formulation and the \inf – \sup condition are then given to prove the well posed of the scheme and the optimal a priori error estimates for fully discrete schemes is extracted. Finally, a numerical example is given to confirm the theoretical results obtained.

Keywords: evolution p -bi-Laplace equation, mixed finite element method, \inf – \sup condition and mixed formulation, existence and uniqueness.

1. Введение и предварительная информация

Пусть Ω — ограниченная открытая область \mathbb{R}^d с границей $\partial\Omega$, непрерывной по Липшицу. Зафиксируем конечное время $T > 0$ и рассмотрим следующую гиперболическую задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta(\operatorname{div}(|\Delta u|^{p-2} \nabla u)) = f(x, t), & \text{в } [0, T] \times \Omega, \\ u = \Psi, \quad \nabla u = \nabla \Psi, & \text{на } [0, T] \times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = U_1, & \text{на } \Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $2 \leq p < \infty$, $f(t)$ и $\Psi(t)$ — функции, заданные в $L^q(\Omega)$ и $W^{2,\infty}(\Omega)$ соответственно.

В последние годы был достигнут значительный прогресс в изучении задач четвертого порядка, являющихся нелинейным обобщением бигармонических задач. Основной стимул для изучения (1.1) связан с различными приложениями в теории упругости, которые используются при моделировании бегущих волн в подвесных мостах (см. [2, 11]).

Уравнения в частных производных высокого порядка с постоянным показателем изучались несколькими авторами при различных условиях на данные и различными методами (см., например, [1, 3, 10]). Отметим также некоторые работы, представляющие интерес для изучения этого типа уравнений с переменным показателем, например [13, 18].

Авторы работы [16] рассмотрели p -бигармоническую эллиптическую задачу:

$$\begin{cases} \Delta(|\Delta u|^{p-2} \Delta u) = f, & \text{в } \Omega, \\ u = 0, & \text{в } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{в } \partial\Omega, \end{cases}$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по внешней нормали. С помощью бессеточного web-сплайн метода конечных элементов авторы обсудили существование и единственность слабого решения, а затем вывели дискретную вариационную формулировку p -бигармонической задачи.

В работе [12] предложен метод дискретного времени и получены равномерные оценки для следующего p -бигармонического параболического уравнения:

$$u_t + \Delta(|\Delta u|^{p-2} \Delta u) = |u|^q - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |u| dx, \quad x \in \Omega,$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $p > 2$ и $\lambda > 0$. Авторы установили существование и единственность слабых решений.

Конечные элементы C^1 и элемент Аргириса [4] — похожие подходы к таким задачам. Но в трех измерениях мы находим препятствия в конструировании C^1 -конечных элементов, которые трудно преодолеть. Упомянем другие методы, которые могут применяться к этому классу задач: разрывные методы Галеркина, которые представляют собой класс неконформных методов конечных элементов; h - kdG -конечные элементы, используемые для 2-билапласиана (см. [7, 9]).

Один из вариантов, предложенных для решения нашей проблемы, заключается в использовании смешанных конечных элементов по пространству и неявного метода Эйлера по времени.

Метод смешанных конечных элементов является одним из наиболее популярных методов, используемых для изучения этого семейства задач. Этот метод позволяет решать смешанные задачи, где неизвестными являются две функции (подробнее об этом методе смотри в [2, 5, 6]). Более того, сходимость этого метода подчиняется условию inf-sup из [8, 15].

Статья построена следующим образом: в пункте 1 мы устанавливаем некоторые необходимые из основных свойств p -билапласиана. Пункт 2 посвящен получению схемы полу-дискретизации, основанной на неявном методе Эйлера, и доказательству существования

и единственности решения для этой схемы. В п. 3 мы даем смешанную формулировку и условие inf-sup для доказательства корректности постановки задачи смешанной аппроксимации. В п. 4 мы выводим полностью дискретную схему и получаем априорные оценки ошибки с использованием проекционного оператора Ритца и свойств ортогональности Галеркина. Наконец, в завершение статьи, в п. 5, мы приводим результаты численного эксперимента.

Приведем некоторые определения и утверждения, необходимые для доказательства наших результатов.

Для $1 \leq p < \infty$ определим пространство Лебега

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ измеримая} : \int_{\Omega} \|f(x)\|^p dx < \infty \right\} \quad (1.2)$$

с нормой

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} \|f(x)\|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.3)$$

Определение 1. Для $1 \leq p < \infty$ и $m \in \mathbb{N}$ определим пространство Соболева

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ f \in L^p(\Omega); D^\alpha f \in L^p(\Omega) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N} \text{ таких, что } |\alpha| \leq m \right\} \quad (1.4)$$

с нормой

$$\|f\|_{m,p} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}. \quad (1.5)$$

Определение 2. Определим пространство $W_{\Psi}^{2,p}(\Omega)$:

$$W_{\Psi}^{2,p}(\Omega) = \Psi + W_0^{2,p}(\Omega) = \left\{ f \in W_{\Psi}^{2,p}(\Omega); f|_{\partial\Omega} = \Psi \text{ и } \nabla f|_{\partial\Omega} = \nabla \Psi \right\}, \quad (1.6)$$

здесь

$$W_0^{2,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{2,p}(\Omega)}. \quad (1.7)$$

Замечание 1.

1) Пусть $p, q \in [1, \infty)$, такие что q сопряжено с p , т. е.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

тогда для $u \in L^p(\Omega)$ выполняется

$$\left\| |u|^{p-1} \right\|_{L^q(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1}. \quad (1.8)$$

2) Пусть для p, q и $r \in [1, \infty)$ выполняется

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r},$$

тогда для $u \in L^p(\Omega)$ и $v \in L^q(\Omega)$ имеем

$$fg \in L^r(\Omega) \text{ и } \|uv\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}. \quad (1.9)$$

Определение 3. Функция u называется слабым решением (1.1), если

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad u \in L^\infty([0, T], W_0^{2,p}(\Omega)) \cap W^{1,\infty}([0, T], L^2(\Omega)) \text{ такая, что} \\ \quad \forall v \in L^\infty([0, T], W_0^{2,p}(\Omega)) \cap W^{1,\infty}([0, T], L^2(\Omega)). \\ 2) \quad \int_0^T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, v \right) dt + \int_0^T (|\Delta u|^{p-2} \Delta u, \Delta v) dt = \int_0^T (f, v). \end{array} \right. \quad (1.10)$$

2. Полудискретизация

Разделим интервал времени $[0, T]$ на n подинтервалов длины $\tau = \frac{T}{n}$ и обозначим при помощи u^i значения u при $t_i = i\tau$, $i = 0, 1, \dots, n$. Пусть

$$\begin{aligned} \delta u^i(x) &= \frac{u^i - u^{i-1}}{\tau}, \\ \delta^2 u^i(x) &= \frac{\delta u^i(x) - \delta u^{i-1}(x)}{\tau} \end{aligned}$$

и u^{-1} определено в виде $u^{-1}(x) = u^0(x) - \tau u^1(x)$.

Для $i = 1, \dots, n$ схему рекуррентной аппроксимации можно записать следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{найти } u^i \cong u(\cdot, t_i), i = 1, 2, \dots, n, \text{ такую что имеем уравнение} \\ (\delta^2 u^i, v) + (|\Delta u^i|^{p-2} \Delta u^i, \Delta v) = (f^i, v). \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Это значит

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{найти } u^i \cong u(\cdot, t_i), i = 1, 2, \dots, n, \text{ такую что имеем уравнение} \\ (\delta u^i - \delta u^{i-1}, v) + \tau (|\Delta u^i|^{p-2} \Delta u^i, \Delta v) = \tau (f^i, v). \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Теорема 1. Пусть $f^i \in L^q(\Omega)$, задача (2.2) допускает единственное слабое решение $u \in W_{\Psi}^{2,p}(\Omega)$ для $1 \leq i \leq n$.

Доказательство. Определим оператор

$$A : W_0^{2,p}(\Omega) \rightarrow (W_0^{2,p}(\Omega))^*,$$

такой что

$$Au^i = \delta u^i + \tau \Delta_p^2 u^i. \quad (2.3)$$

Здесь

$$\Delta_p^2 u^i = \Delta (|\Delta u|^{p-2} \Delta u). \quad (2.4)$$

Применим теорию монотонных операторов. Таким образом, мы должны доказать, что A является полунепрерывным коэрцитивным и монотонным оператором.

Введем функционал K на $W_0^{2,p}(\Omega)$ следующим образом:

$$K(u^i) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} (\delta u^i)^2 + \frac{\tau}{p} |\Delta u^i|^p \right) dx, \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
 (K'(u^i), v) &= \frac{d}{dt} \left\{ A(u^i + tv) \right\}_{t=0} \\
 &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\delta u^i + tv)^2 dx + \frac{\tau}{p} \int_{\Omega} |\Delta(u^i + tv)|^p dx \right\}_{t=0} \\
 &= \left\{ \int_{\Omega} (\delta u^i + tv)v dx + \tau \int_{\Omega} |\Delta(u^i + tv)|^{p-1} \Delta v dx \right\}_{t=0} \\
 &= \int_{\Omega} \delta u^i v dx + \tau \int_{\Omega} (|\Delta u^i|^{p-2} \Delta u^i) \Delta v dx \\
 &= \int_{\Omega} \delta u^i v dx + \tau \int_{\Omega} \Delta (|\Delta u^i|^{p-2} \Delta u^i) v dx \\
 &= (\delta u^i, v) + \tau (\Delta_p^2 u^i, v) = (A u^i, v) \quad \forall u, v \in W_0^{2,p}(\Omega).
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Это означает, что $K' = A$ и K дифференцируем по Гато, т. е. полунепрерывен.

Используя неравенство из [14], для $p \in [1, \infty)$ и $a, b \in \mathbb{R}^n$ получаем

$$|b|^p \geq |a|^p + p|a|^{p-2}a(b-a) + \frac{|b-a|^p}{2^{p-1}-1}, \tag{2.7}$$

и, согласно теореме о среднем значении, имеем

$$\begin{aligned}
 (A(u^i) - A(v)) &= (\delta(u^i - v), u^i - v) + \tau(\Delta_p^2 u^i - \Delta_p^2 v, u^i - v) \\
 &= \frac{1}{2} \delta \|u^i - v\|^2 + \tau(\Delta_p^2 u^i - \Delta_p^2 v, u^i - v) \\
 &\geq C(\tau) \|u^i - v\|^2 + \tau(\Delta_p^2 u^i - \Delta_p^2 v, u^i - v) \geq \tau(\Delta_p^2 u^i - \Delta_p^2 v, u^i - v) \\
 &= \tau \int_{\Omega} |\Delta u^i|^{p-2} \Delta u^i (\Delta u^i - \Delta v) dx - \tau \int_{\Omega} |\Delta v|^{p-2} \Delta v (\Delta u^i - \Delta v) dx \\
 &= \frac{2}{p(2^{p-1}-1)} \int_{\Omega} |\Delta u^i - \Delta v|^p dx.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Поскольку норма $\|\cdot\|_{W_0^{2,p}(\Omega)}$ эквивалентна полунорме $\|\Delta(\cdot)\|_{L^p(\Omega)}$ по пространству $W_0^{2,p}(\Omega)$ (согласно теории Кальдерона–Зигмунда и Пуанкаре), мы имеем

$$(A(u^i) - Av, u^i - v) \geq C(p) \|u^i - v\|_{W_0^{2,p}(\Omega)}^p. \tag{2.9}$$

Это доказывает монотонность A . Тогда

$$(A(u^i), u^i) \geq C(p) \|u^i\|_{W_0^{2,p}(\Omega)}^p, \tag{2.10}$$

откуда делаем вывод о коэрцитивности A .

Используя неравенство Гельдера, получим

$$|(f^i, v)| = \left| \int_{\Omega} f^i v dx \right| \leq C \|f^i\|_q \|v\|_p, \tag{2.11}$$

и, используя $W_0^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, имеем

$$|(f^i, v)| \leq C \|f^i\|_q \|v\|_{W_0^{2,p}(\Omega)}. \tag{2.12}$$

Это означает, что $f^i \in (W_0^{2,p}(\Omega))^*$. □

3. Смешанная формулировка

Пусть $X = W_{\Psi}^{2,p}(\Omega)$ и $Y = L^q(\Omega)$. Выберем вспомогательную переменную

$$w^i = |\Delta u^i|^{p-1} \Delta u^i. \quad (3.1)$$

Согласно следующему замечанию $\psi(z) = |z|^{p-2}z$, где обратное устанавливается как $\psi(z) = \operatorname{sgn}(z)|z|^{\frac{1}{p-1}}z = |z|^{q-2}z$, мы можем записать задачу (1.1) следующим образом:

$$\begin{cases} -\Delta u^i = |w^i|^{q-2}w^i, \\ -\Delta w^i = f^i - \delta^2 u^i. \end{cases} \quad (3.2)$$

Смешанную систему можно записать в виде

$$\begin{cases} a(w^i, v) + c(u^i, v) = 0 \quad \forall v \in X, \\ c(w^i, \eta) = L_Y(\eta) \quad \forall \eta \in Y. \end{cases} \quad (3.3)$$

Здесь

$$a(w^i, v) := \int_{\Omega} |w^i|^{q-2} w^i v \, dx, \quad (3.4)$$

$$c(w^i, \eta) := \int_{\Omega} -\Delta w^i \eta \, dx, \quad (3.5)$$

$$L_Y(\eta) := \int_{\Omega} (f^i - \delta^2 u^i) \eta \, dx, \quad (3.6)$$

где $f^i = f(t_i, x)$.

Утверждение (Условие inf-sup). Для $u \in X$ мы имеем

$$\gamma \leq C \inf_{0 \neq \eta \in Y} \sup_{0 \neq u^i \in X} \frac{c(u^i, \eta)}{\|u^i\|_X \|\eta\|_Y}. \quad (3.7)$$

Доказательство. Для $u^i \in W_0^{2,p}(\Omega)$ и $\eta = |\Delta u^i|^{p-2} \Delta u^i$ выполняется

$$\|\eta\|_{L^q(\Omega)} = \| |\Delta u^i|^{p-1} \|_{L^q(\Omega)} = \|\Delta u^i\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \quad (3.8)$$

и

$$c(u^i, \eta) = \|\Delta u^i\|_{L^p(\Omega)}^p. \quad (3.9)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} c(u^i, \eta) &= \|\Delta u^i\|_{L^p(\Omega)}^p = \|\Delta u^i\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \|\Delta u^i\|_{L^p(\Omega)} \\ &= \|\Delta u^i\|_{L^p(\Omega)} \|\eta\|_{L^q(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Это означает, что

$$\|\Delta u^i\|_{L^p(\Omega)} \leq C \frac{c(u^i, \eta)}{\|\eta\|_{L^q(\Omega)}}. \quad (3.11)$$

Таким образом, мы заключаем, что

$$\gamma \leq C \inf_{0 \neq \eta \in Y} \sup_{0 \neq u^i \in X} \frac{c(u^i, \eta)}{\|u^i\|_X \|\eta\|_Y}. \quad (3.12)$$

Это завершает доказательство. \square

4. Полная дискретизация

Пусть Υ_T — триангуляция из треугольников T такая, что пересечение двух различных элементов является либо вершиной, либо ребром, либо пустым. Будем считать эту триангуляцию регулярной согласно определению Сьярле. Это означает

$$\exists \mu > 0, \text{ такое что } \frac{h_T}{\rho_T} \leq \mu \quad \forall T \in \Upsilon_h, \quad (4.1)$$

где h_T — диаметр T , а ρ_T — диаметр самого большого шара, содержащегося внутри T . Обозначим ребра символом e и определим оператор скачка для функции v через ребро/грань в точке x :

$$[v(x)]_e = \begin{cases} \lim v(x + \alpha\eta_e) - v(x + \alpha\eta_e), & \text{если } e \in \xi_h^{\text{int}}, \\ v(x), & \text{если } e \in \xi_h - \xi_h^{\text{int}}. \end{cases} \quad (4.2)$$

Размер ячейки h определяется следующим образом:

$$h = \max_{T \in \Upsilon_T} h_T. \quad (4.3)$$

Пусть $\mathbb{P}^k(\Upsilon_h)$ означает пространство кусочных многочленов степени k над триангуляцией Υ_h :

$$\mathbb{P}^k(\Upsilon_h) = \{ \phi : \phi|_T \in \mathbb{P}^k(T) \quad \forall T \in \Upsilon_h \}. \quad (4.4)$$

Зададим дискретные конечные пространства в виде

$$X^h = \mathbb{P}^k(\Upsilon_h) \cap C^0(\bar{\Omega}), \quad (4.5)$$

и

$$X_{\Psi}^h = \{ \phi \in X^h ; \phi|_{\partial\Omega} = R\Psi \}, \quad (4.6)$$

Здесь R — проекционный оператор Ритца такой, что

$$\int_{\Omega} \nabla(Rv) \nabla \phi = \int_{\Omega} \nabla v \nabla \phi \, dx \quad \forall \phi \in X^h \cap H_0^1(\Omega). \quad (4.7)$$

Определим дискретный оператор Лапласа как

$$(\Delta_h v)|_T := (\Delta_h v)|_T \quad \forall T \in \Upsilon. \quad (4.8)$$

Полностью дискретная схема для (3.3) имеет следующий вид: найти пару $(u_h^i, w_h^i) \in X_{\Psi}^h \times X^h$ такую, что

$$\begin{cases} a(w_h^i, v) + c_h(u_h^i, v) = 0, \\ c_h(w_h^i, \eta) = L(\eta) \quad \forall (v, \eta) \in X^h \times X_0^h. \end{cases} \quad (4.9)$$

Из формулировки Грина мы имеем

$$c_h(u_h, v) = \sum_{T \in \Upsilon_h} \int_T \nabla u_h \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \nabla \Psi \rho v \, dx = \int_{\Omega} \nabla u_h \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \nabla \Psi \rho v \, dx. \quad (4.10)$$

Путем подстановки (4.10) в (4.9) задачу (3.3) можно записать следующим образом: найти пару $(u_h^i, w_h^i) \in X_{\Psi}^h \times X^h$ такую, что

$$\begin{cases} \int_{\Omega} |w_h^i|^{q-2} w_h^i v \, dx + \int_{\Omega} \nabla u_h^i \nabla v \, dx = \int_{\partial\Omega} \nabla \Psi \rho v \, dx, \\ \int_{\Omega} \nabla w_h^i \nabla \eta \, dx = \int_{\Omega} (f^i - \delta^2 u^i) \eta \, dx \quad \forall (v, \eta) \in X^h \times X_0^h. \end{cases} \quad (4.11)$$

Лемма 1 [9]. Для $m \geq 2$, $u \in W^{m+1,q}(\Omega)$ имеем

$$\begin{aligned} \|u - Ru\|_{L^q(\Omega)} + \|h(\nabla u - \nabla(Ru))\|_{L^q(\Omega)} + \left(\sum_{T \in \Upsilon} \|h^2(\Delta u - \Delta(Ru))\|_{L^q(T)}^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ \leq Ch^{m+1} |u|_{W^{m+1,q}(\Omega)}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Лемма 2 (Свойства $a(\cdot, \cdot)$, см. [17, св. 3.1]). Для $w^i \in L^q(\Omega)$, $w_h^i, v_h \in X^h$ и $p \geq 2$ существуют положительные постоянные C_1, C_2 и C_3 такие, что

$$\begin{aligned} \frac{C_1}{2} \frac{\|w^i - w_h^i\|_{L^q(\Omega)}^2}{\|w^i\|_{L^q(\Omega)}^{2-q} + \|w_h^i\|_{L^q(\Omega)}} + \frac{C_2}{2} \int_{\Omega} | |w^i|^{p-2} w^i - |w_h^i|^{p-2} w_h^i | |w^i - w_h^i| \, dx \\ \leq a(w^i, w^i - w_h^i) - a(w_h^i, w^i - w_h^i), \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} a(w^i, w^i - v_h) - a(w_h^i, w^i - v_h) \\ \leq C_3 \left(\int_{\Omega} | |w^i|^{q-2} w^i - |w_h^i|^{q-2} w_h^i | |w^i - w_h^i| \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \|w^i - v_h\|_{L^q(\Omega)}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Теорема 2. Для $m \geq 2$ существует $C \geq 0$ такое, что

$$\begin{aligned} \|u^i - u_h^i\|_{W_h^{2,p}(\Omega)}^{p-1} + \|w^i - w_h^i\|_{L^q(\Omega)} \leq C \left(h^{\frac{q}{2}(m+1)} |w^i|_{W^{m+1,q}(\Omega)}^{\frac{q}{2}} + h^{m+1} |w^i|_{W^{m+1,q}(\Omega)} + \right. \\ \left. h^{m-1} |u^i|_{W^{m+1,p}(\Omega)} + h^{m+1} |\delta^2 u^i|_{W^{m+1,q}(\Omega)} \right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Доказательство. Из неравенства треугольника имеем

$$\|u^i - u_h^i\|_{W_h^{2,p}(\Omega)} \leq \|Ru^i - u_h^i\|_{W_h^{2,p}(\Omega)} + \|u^i - Ru^i\|_{W_h^{2,p}(\Omega)}. \quad (4.16)$$

Согласно дискретному условию inf-sup в утверждении из п. 3, получим

$$\begin{aligned} \|Ru^i - u_h^i\|_{W_h^{2,p}(\Omega)} &\leq \sup_{\eta \in X_0^h(\Omega); \eta \neq 0} \frac{c_h(Ru^i - u_h^i, \eta)}{\|\eta\|_{L_h^q(\Omega)}} \\ &\leq \sup_{\eta \in X_0^h(\Omega); \eta \neq 0} \frac{a(w^i, \eta) - a(w_h^i, \eta)}{\|\eta\|_{L_h^q(\Omega)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq C_3 \frac{\left(\int_{\Omega} | |w^i|^{p-2} w^i - |w_h^i|^{p-2} w_h^i | |w^i - w_h^i| dx \right)^{\frac{1}{p}} \|\eta\|_{L^q(\Omega)}}{\|\eta\|_{L_h^q(\Omega)}} \\ &\leq C_3 C \left(\int_{\Omega} | |w^i|^{p-2} w^i - |w_h^i|^{p-2} w_h^i | |w^i - w_h^i| dx \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Используя лемму 2 и неравенства Юнга, получаем

$$\begin{aligned} C_2 \int_{\Omega} | |w^i|^{p-2} w^i - |w_h^i|^{p-2} w_h^i | |w^i - w_h^i| dx &\leq a(w^i, w^i - w_h^i) - a(w_h^i, w^i - w_h^i) \\ &\leq \left(\int_{\Omega} | |w^i|^{p-2} w^i - |w_h^i|^{p-2} w_h^i | |w^i - w_h^i| dx \right)^{\frac{1}{p}} \|w^i - w_h^i\|_{L^q(\Omega)} \\ &\leq \frac{C_3^q}{q\epsilon^q} \|w^i - w_h^i\|_{L^q(\Omega)}^q + \frac{\epsilon^p}{p} \int_{\Omega} | |w^i|^{p-2} w^i - |w_h^i|^{p-2} w_h^i | |w^i - w_h^i| dx. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Взяв ϵ достаточно малым, чтобы $\frac{\epsilon^p}{p} < 1$, имеем

$$\int_{\Omega} | |w^i|^{p-2} w^i - |w_h^i|^{p-2} w_h^i | |w^i - w_h^i| dx \leq C \|w^i - w_h^i\|_{L^q(\Omega)}^q. \quad (4.19)$$

Подставив (4.19) в (4.17), получим

$$\|Ru^i - u_h^i\|_{W_h^{2,p}(\Omega)} < C \|w^i - w_h^i\|_{L^q(\Omega)}^{\frac{q}{p}}. \quad (4.20)$$

Вычитая (4.9) из (3.3), получаем

$$\begin{cases} a(w^i, v) - a(w_h^i, v) + c_h(u^i - u_h^i, v) = 0, \\ c_h(w^i - w_h^i, \eta) = 0. \end{cases} \quad (4.21)$$

Вследствие полулинейности $a(\cdot, \cdot)$ делаем следующий вывод:

$$\begin{aligned} a(w^i, w^i - w_h^i) - a(w_h^i, w^i - w_h^i) &= a(w^i, w^i - v) - a(w_h^i, w^i - v) + \\ &\quad a(w^i, v - w_h^i) - a(w_h^i, v - w_h^i) \\ &= \underbrace{a(w^i, w^i - v) - a(w_h^i, w^i - v)}_{I_1} + \underbrace{c_h(u^i - u_h^i, w_h^i - v)}_{I_2}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Применяя лемму 2, имеем

$$\frac{C_1}{2} \frac{\|w^i - w_h^i\|_{L^q(\Omega)}^2}{\|w^i\|_{L^q(\Omega)}^{2-q} + \|w_h^i\|_{L^q(\Omega)}^{2-q}} + \frac{C_2}{2} \int_{\Omega} | |w^i|^{p-2} w^i - |w_h^i|^{p-2} w_h^i | |w^i - w_h^i| dx \leq I_1 + I_2. \quad (4.23)$$

Теперь, используя ϵ -неравенства Юнга и лемму 2, находим

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C_3 \left(\int_{\Omega} | |w^i|^{q-2} w^i - |w_h^i|^{q-2} w_h^i | |w^i - w_h^i| dx \right)^{\frac{1}{p}} \|w^i - w_h^i\|_{L^q(\Omega)} \\ &\leq \frac{\epsilon^p}{p} \int_{\Omega} | |w^i|^{q-2} w^i - |w_h^i|^{q-2} w_h^i | |w^i - w_h^i| dx + \frac{C_3^q}{\epsilon^q q} \|w^i - w_h^i\|_{L^q(\Omega)}^q. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Взяв ϵ такое, что $\frac{\epsilon^p}{p} = \frac{C_2}{2}$, выводим

$$I_1 \leq \frac{C_2}{2} \int_{\Omega} \left| |w^i|^{q-2} w^i - |w_h^i|^{q-2} w_h^i \right| |w^i - w_h^i| dx + C(q) \|w^i - v_h\|_{L^q(\Omega)}^q. \quad (4.25)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} I_2 &= c_h(u^i - u_h^i, w_h^i - v) \\ &= c_h(u^i - u_h^i - R(u^i - u_h^i), w_h^i - v) + c_h(R(u^i - u_h^i), w_h^i - v) \\ &= c_h(u^i - Ru^i, w_h^i - v) + c_h(Ru^i - u_h^i, w_h^i - v) \\ &= c_h(u^i - Ru^i, w_h^i - v) + \int_{\Omega} \delta^2(u^i - u_h^i)(Ru^i - u_h^i) dx. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Далее, используя непрерывность c_h , получим

$$\begin{aligned} c_h(u^i - Ru^i, w_h^i - v) &\leq C \|u^i - Ru^i\|_{W_h^{2,p}} \|w_h^i - v\|_{L^q(\Omega)} \\ &= \frac{C}{2\epsilon^2} \|u^i - Ru^i\|_{W_h^{2,p}}^2 + \frac{C\epsilon^2}{2} \|w_h^i - v\|_{L^q(\Omega)}^2 \\ &= \frac{C}{2\epsilon^2} \|u^i - Ru^i\|_{W_h^{2,p}}^2 + \frac{C\epsilon^2}{2} (\|w_h^i - w^i\|_{L^q(\Omega)}^2 + \|w^i - v\|_{L^q(\Omega)}^2), \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta^2(u^i - u_h^i)(Ru^i - u_h^i) dx &\leq \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p} \right) \|\delta^2(u^i - u_h^i)\|_{L^q(\Omega)} \|Ru^i - u_h^i\|_{L^q(\Omega)} \\ &\leq C \|\delta^2(u_h^i - u^i)\|_{L^q(\Omega)} \|Ru^i - u_h^i\|_{W_h^{2,p}(\Omega)} \\ &\leq \frac{C}{2\epsilon} \|\delta^2(u_h^i - u^i)\|_{L^q(\Omega)}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|Ru^i - u_h^i\|_{W_h^{2,p}(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Используем неравенство треугольника и (4.20) в правой части (4.28). Подставив (4.25)–(4.28) в (4.23) и взяв достаточно малое ϵ , находим

$$\begin{aligned} \|w_h^i - w^i\|_{L^q(\Omega)}^2 &\leq C \left(\|w^i - v\|_{L^q(\Omega)}^q + \|Ru^i - u^i\|_{W_h^{2,p}(\Omega)}^2 + \right. \\ &\quad \left. \|w^i - v\|_{L^q(\Omega)}^2 + \|\delta^2 u^i - R\delta^2(u^i)\|_{L^q(\Omega)}^2 \right). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Из свойств проекции Рунта и леммы 1 получим оценку для $w^i - w_h^i$. Чтобы оценить $u^i - u_h^i$, подставим (4.29) в (4.20) с учетом неравенства (4.16). Это завершает доказательство. \square

5. Численный эксперимент

В данном пункте мы рассмотрим численный эксперимент для различных значений степени p , иллюстрирующий точность и эффективность метода для полностью дискретной схемы. Сначала зададим расчетную область $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ и временной интервал $(0, 1)$. Используем метод Ньютона–Рафсона для решения полученной нелинейной системы и зададим начальные значения w^0 , w^1 , u^0 и u^1 . Исходная функция f и вспомогательная переменная w выбираются в соответствии с точным решением

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi^2} \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(t)^3.$$

В этом эксперименте неизвестная функция $u(x, y, t)$ и вспомогательная переменная $w(x, y, t)$ аппроксимируются линейным полиномом, т. е. $k = 1$. Для этого тестового примера возьмем длину шага $h \in \{1/3, 1/6, 1/12, 1/24, 1/48, 1/96\}$ и $p = 3, 4, 5$. Численные ошибки вычисляются на конечном временном уровне $t_i = 2^3\tau$ при $\tau = 2^5$.

На рисунке 1 представлены ошибки для u и w , а на рис. 2 показаны поверхности u_h^i и w_h^i на $(0, 1) \times (0, 1)$.

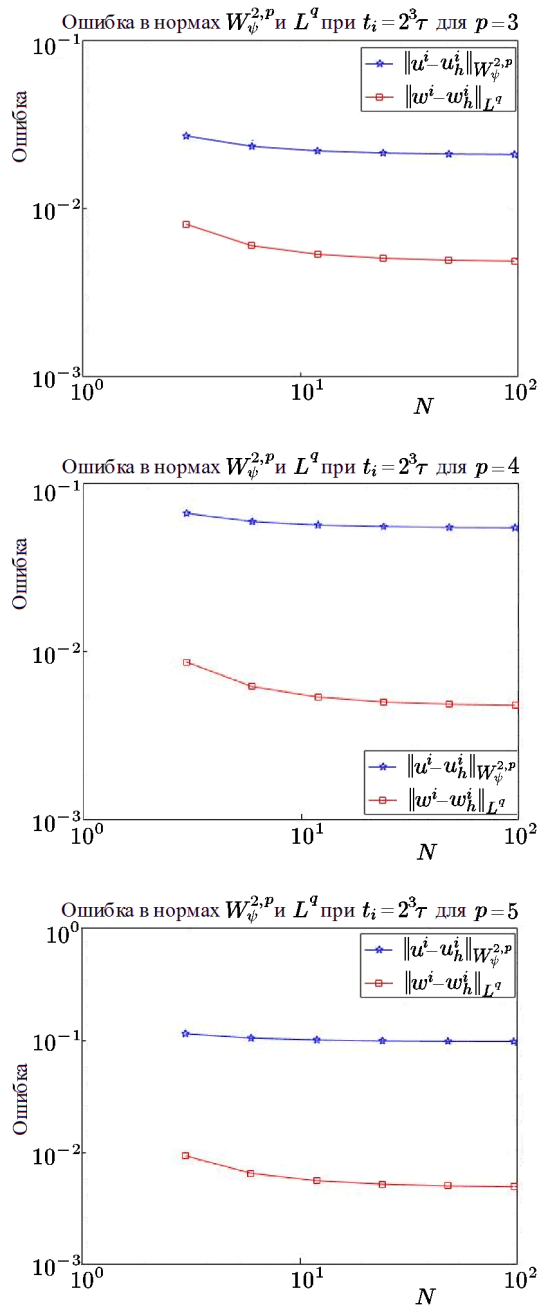


Рис. 1. Ошибки для u и w в логарифмической шкале при $t = 2^3\tau$ для $p = 3, 4, 5$ соответственно

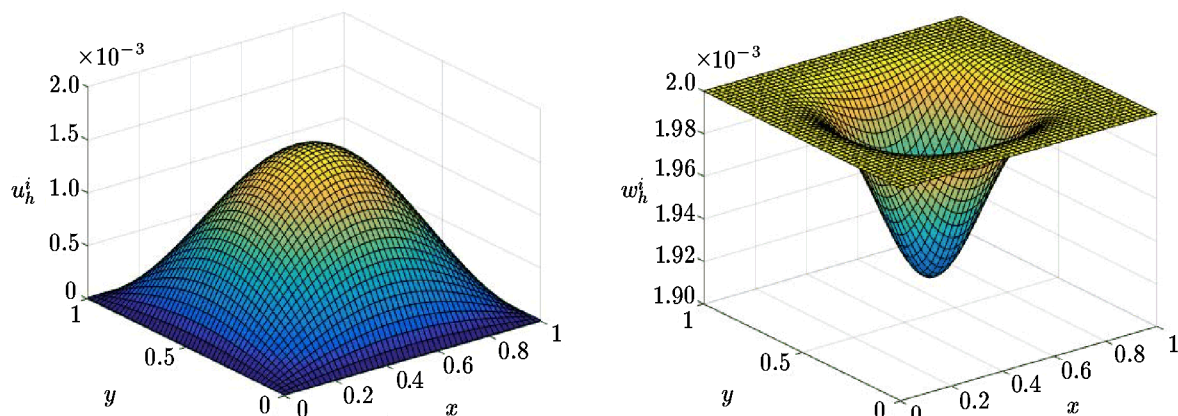


Рис. 2. Поверхности u_h^i и w_h^i на $(0, 1) \times (0, 1)$ для 4-билапласиана

Литература

1. **Alsaedi R., Dhifi A., and Ghanmi A.** Low perturbations of p -biharmonic equations with competing nonlinearities // *Complex Variables and Elliptic Equations*.— 2021.— Vol. 66, № 4.— P. 642–657.
2. **Babuška I., Osborn J., and Pitkäranta J.** Analysis of mixed methods using mesh dependent norms // *Math. Comp.*— 1980.— Vol. 35, № 152.— P. 1039–1062.
3. **Bae J.H., Kim J.M., Lee J., and Park K.** Existence of nontrivial weak solutions for p -biharmonic Kirchhoff-type equations // *Boundary Value Problems*.— 2019.— Vol. 125.— P. 1–17.
4. **Ciarlet P.G.** *The Finite Element Method for Elliptic Problems*.— Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1978.— (Studies in Mathematics and its Applications; Vol. 4).
5. **Che H., Wang Y., and Zhou Z.** An optimal error estimates of H1-Galerkin expanded mixed finite element methods for nonlinear viscoelasticity-type equation // *Math. Prob. Eng.*— 2011.— Article ID 570980.— DOI: <https://doi.org/10.1155/2011/570980>.
6. **Ewing R.E., Lin Y., Sun T., Wang J., and Zhang S.** Sharp L^2 -error estimates and superconvergence of mixed finite element methods for non-fickian flows in porous media // *SIAM J. Numer. Anal.*— 2002.— Vol. 40, № 4.— P. 1538–1560.
7. **Georgoulis E.H. and Houston P.** Discontinuous Galerkin methods for the biharmonic problem // *IMA J. Numer. Anal.*— 2009.— Vol. 29, № 3.— P. 573–594.
8. **Georgoulis E.H. and Pryer T.** Analysis of discontinuous Galerkin methods using mesh-dependent norms and applications to problems with rough data // *Calcolo*.— 2017.— Vol. 54, № 4.— P. 1533–1551.
9. **Gyulov T. and Morosanu G.** On a class of boundary value problems involving the p -biharmonic operator // *J. Math. Anal. Appl.*— 2010.— Vol. 367, № 1.— P. 43–57.
10. **Huang Y. and Liu X.** Sign-changing solutions for p -biharmonic equations with Hardy potential in the half-space // *J. Math. Anal. Appl.*— 2016.— Vol. 444.— P. 1417–1437.
11. **Lazer A. and McKenna P.** Large-amplitude periodic oscillations in suspension bridges: some new connections with nonlinear analysis // *SIAM Review*.— 1990.— Vol. 32, № 4.— P. 537–578.
12. **Liu C. and Guo J.** Weak solutions for a fourth order degenerate parabolic equation // *Bull. of the Polish Academy of Sciences, Mathematics*.— 2006.— Vol. 54, № 1.— P. 27–39.
13. **Li L. and Tang Ch.** Existence and multiplicity of solutions for a class of $p(x)$ -biharmonic equations // *Acta Mathematica Scientia*.— 2013.— Vol. 33B, № 1.— P. 155–170.— URL: [https://doi.org/10.1016/S0252-9602\(12\)60202-1](https://doi.org/10.1016/S0252-9602(12)60202-1).

14. **Li V.** The W_p^1 stability of the Ritz projection on graded meshes // Math. Comp. — 2017. — Vol. 86. — P. 49–74.
15. **Makridakis C.G.** On the Babuška-Osborn approach to finite element analysis: L^2 estimates for unstructured meshes // Numer. Mathem. — 2018. — Vol. 139, № 4. — P. 831–844.
16. **Rajashekar N., Chaudhary S., and Srinivas Kumar V.V.K.** Approximation of p -biharmonic problem using WEB-spline based mesh-free method // Intern. J. Nonlin. Sci. Numer. Simul. — 2019. — Vol. 20, № 6. — P. 703–712.
17. **Sandri D.** Sur l'approximation numérique des écoulements quasi-newtoniens dont la viscosité suit la loi puissance ou la loi de Carreau // RAIRO Model. Math. Anal. Numer. — 1993. — Vol. 27, № 2. — P. 131–155.
18. **Zhou Z.** On a $p(x)$ -biharmonic problem with Navier boundary condition // Boundary Value Problems. — 2018. — Vol. 149. — P. 1–14.

*Поступила в редакцию 09 декабря 2021 г.
После исправления 15 апреля 2022 г.
Принята к печати 18 июля 2022 г.*

