

ОБОБЩЕННЫЙ АНАЛИЗ РАЗВИТИЯ ВЗРЫВА ЗАРЯДОВ КОНДЕНСИРОВАННЫХ СИСТЕМ

Г. Т. Володин

Тульский государственный университет, 300600 Тула, g.volodin@yandex.ru

Дано аналитическое решение комплексной проблемы развития взрыва зарядов конденсированных взрывчатых веществ в газовых средах (воздухе). Построена обобщенная модель, описывающая следующие процессы: развитие взрыва внутри заряда взрывчатого вещества от момента возбуждения до момента выхода на режим нормальной детонации (переходный процесс взрыва); собственно нормальная детонация; разлет продуктов взрыва в окружающую среду (воздух) с образованием и движением возмущенной среды в ударной волне. В отличие от известных постановок подобного рода задач, в данном исследовании классическая гипотеза об адиабатичности взрывных процессов заменена более естественной гипотезой о степенном профиле плотности возмущенной среды и продуктов взрыва. Развита метод Т. М. Саламахина применительно к реальным процессам взрыва.

Ключевые слова: развитие взрыва, ударная волна, детонация, контактная поверхность, переходный процесс взрыва.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование взрыва зарядов конденсированных взрывчатых веществ (ВВ) связано с необходимостью постановки и решения нескольких классов взаимосвязанных задач (проблем физики взрыва): о развитии взрыва внутри заряда ВВ; о детонации как предельном режиме развития взрыва; о взаимодействии расширяющихся продуктов взрыва с окружающей средой.

Развитие взрыва внутри заряда ВВ. Известно [1–5], что химическое превращение ВВ в зависимости от свойств, размеров заряда и энергии инициатора может начинаться горением или взрывом. В практических расчетах сложный процесс взрыва с переменной скоростью обычно заменяют детонацией, для которой скорость ударной волны (УВ) постоянна, если пренебречь начальным участком, где взрыв переходит в детонацию [1]. Однако эксперименты показывают [6], что начальный участок имеет существенную протяженность, следовательно, в расчетах по определению взрывных нагрузок его нельзя не учитывать.

Задача по определению размеров начального участка, закона движения фронта УВ, параметров на нем, закона тепловыделения в узкой зоне за фронтом УВ, распределения параметров, характеризующих возмущенную область в любой момент времени, решена в работе [7]. Полученное решение соответствует мо-

дели развития взрыва внутри заряда ВВ, наиболее близкой к реальному взрывному процессу, так как в ней, в отличие от традиционных подходов, обычно применяемая гипотеза об адиабатичности заменена более естественным предположением о степенном профиле плотности возмущенной области.

Развитие взрыва на начальном участке переходит в предельный стационарный режим — нормальную детонацию, распространяющуюся по основному заряду ВВ с постоянной скоростью D_0 .

Режим нормальной детонации. К основным проблемам детонации можно отнести следующие задачи: о структуре детонационной волны (ДВ); об устойчивости режима детонации; о распределении параметров продуктов детонации (ПД) внутри ДВ.

Трудности в создании математической модели режима детонации связаны, во-первых, с необходимостью использовать уравнение состояния ПД, наиболее полно отражающее их реальное поведение в ДВ.

Весьма полный обзор и анализ существующих уравнений состояния продуктов взрыва конденсированных ВВ сделан в работах [8–10], где особо выделены два подхода: составление уравнения состояния на базе экспериментальных данных о детонации для решения разнообразных практических задач; вывод уравнений состояния продуктов взрыва с целью прогно-

зирования детонационных параметров для случаев, когда прямые экспериментальные данные о детонации отсутствуют.

Другая трудность связана с выбором замыкающего уравнения [11] в системе определяющих уравнений задачи. Во многих исследованиях оно представляет в той или иной форме математическую формулировку гипотезы об адиабатичности течения возмущенной среды в силу его быстротечности. Однако вызывает сомнение, что вследствие быстротечности процесса отсутствует теплопроводность в возмущенной области.

Существует другая гипотеза [10, 12], противоположная гипотезе об адиабатичности взрывного процесса, а именно: предполагается, что в ПД протекает гомотермический процесс: температура T зависит только от времени t и не зависит от координаты r (для одномерных движений), т. е. $\partial T / \partial r = 0$. Это предположение означает, что внутри области, охваченной УВ, на самой ранней стадии развития взрыва скорость теплопередачи стремится к бесконечности. Если иметь в виду исключительно высокие температуры в окрестности центра взрыва, вызванные УВ и другими механизмами взрыва, то предположение о нулевом градиенте температуры в радиальном направлении оказывается весьма оправданным. Однако при таком условии исследование ограничено ранней стадией взрыва.

Чтобы обойти исследование сложных микропроцессов, происходящих в ПД, и избежать введения сомнительных ограничений в физическую модель задачи, Т. М. Саламахин предложил оригинальный прием: аппроксимировать распределение плотности в возмущенной области степенной функцией с показателем степени, зависящим от времени, который находится из интегральных законов сохранения массы и энергии, записанных для всей возмущенной области [13]. Сравнительный анализ замыкающих уравнений, соответствующих вводимым гипотезам о поведении возмущенной среды при взрыве, приведен в работе [14], где показано преимущество данного метода над другими приближенными методами.

Метод профиля плотности получил развитие в работе [15], где при использовании одного из известных уравнений состояния ПД [16] в пренебрежении несущественным изменением удельной теплоемкости в исследуемом интервале температур найдено в квадратурах решение

задачи о детонации конденсированных ВВ.

Дальнейшее развитие метода профиля плотности связано с анализом вида замыкающего уравнения, определяющего распределение плотности в ДВ. Такой анализ выполнен в работе [17], где использован прямой вариационный метод: выбранные пробные экстремали, которыми определялись профили плотности (экспонента, гиперболический синус, гиперболический косинус, степенная функция), показали, что минимум функционала, которым определяется суммарный импульс, созданный УВ, достигается только для степенного вида профиля плотности в ДВ.

Разлет ПД и движение возмущенной среды в УВ. После выхода УВ на поверхность заряда возмущенная область состоит из двух подобластей: подобласти I, занятой расширяющимися продуктами взрыва, и подобласти II возмущенной среды в УВ. Подобласть I отделена от II тонким слоем (согласно многочисленным экспериментам) контактной поверхности (КП), в котором частицы возмущенной среды перемещены с продуктами взрыва. Подобласть II с внешней стороны ограничена фронтом УВ.

При движении возмущенных подобластей I и II в них многократно распространяются волны разрежения, всякий раз снижая амплитуды параметров состояния, что приводит к их выравниванию с параметрами окружающей среды.

Для описания движения возмущенных подобластей I и II нужно совместно проинтегрировать две системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, каждая из которых описывает поведение среды в соответствующей подобласти. Указанные системы связаны общими граничными условиями на КП.

ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем считать, что начало разлета ПД соответствует моменту выхода фронта ДВ на поверхность заряда. Этот момент времени принят за начало отсчета. Решение задачи будем искать для промежутка времени $0 < t < t_*$, где t_* — момент времени, когда УВ вырождается в звуковую. Для любого $t > 0$ считаем, что возмущенная область состоит из внутренней подобласти I, занятой ПД, и внешней подобласти II, занятой пришедшей в движение внешней средой. Среда, окружающая заряд, до

прихода УВ находится в покое: скорость ее частиц $u_1 = 0$, давление p_1 и плотность ρ_1 постоянны. Граница раздела указанных подобластей представляет собой контактный разрыв, на котором давления и скорости частиц по обеим сторонам одинаковы, а плотности и температуры разные. При этом скорость движения КП u_* равна скорости движения частиц среды на этой поверхности: $u_* = \frac{dr_*}{dt}$, где r_* — координата КП.

Последнее утверждение основано на многочисленных экспериментальных данных, согласно которым толщина слоя, разделяющего подобласти I и II, в котором ПД перемешаны с частицами среды, пренебрежимо мала по сравнению с протяженностью указанных подобластей. С внешней стороны возмущенная область ограничена фронтом УВ, на котором параметры среды меняются скачком от начальных значений $p_1, \rho_1, u_1 = 0$ до параметров на фронте УВ $p_2, \rho_2, u_2 > 0$.

Следует особо отметить, что на процесс разлета ПД, а также на движение среды в УВ существенное влияние оказывают волны разрежения. Учесть влияние волн разрежения, многократно проходящих в возмущенной области, можно по волновому характеру изменения ее плотности.

Если считать, что плотность продуктов взрыва в ДВ распределена по закону

$$\bar{\rho} = \rho_3 \exp(\beta \bar{x}^\nu), \quad (1)$$

где ρ_3 — плотность в центре симметрии, $\bar{x} = r/r_2$, $r_2 = D_0 t$, ν — показатель одномерности потока ($\nu = 1, 2, 3$ соответственно для плоской, цилиндрической и сферической волн), то можно получить замкнутое аналитическое решение для режима детонации [18], при этом $\beta = \beta_0 = \text{const}$, $\rho_3 = \text{const}$, D_0 — скорость детонации.

Будем считать, что и с началом разлета ПД их плотность распределена по аналогичному закону (1), где теперь $\rho_3 = \rho_3(t)$, $\beta = \beta(t)$, $\bar{x} = r/r_*$, r_* — координата КП.

Учитывая волновой характер изменения плотности в возмущенной области, зададим функцию

$$\beta(t) = \beta_0 \exp(-\gamma \tau) \cos \omega \tau,$$

где $\tau = a_1 t / r_0$, a_1 — скорость звука в невозмущенной среде, r_0 — радиус (характерный размер) заряда ВВ, β_0 — начальное значение

функции β , которое находится из решения задачи о детонации (например, для тротила $\beta_0 = 0.60586$ [18]), а параметры γ и ω определяются из экспериментальных данных. При этом удобно параметр ω определить в виде

$$\omega = \frac{\pi \delta}{q_0},$$

где q_0 — начальное значение меры интенсивности УВ, $q_0 = a_1 / D_0$, δ — параметр, устанавливаемый по экспериментальным данным.

Подобласть I

Движение ПД, занимающих подобласть I, в каждый момент времени $t > 0$ определяется системой уравнений:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial r} + \bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + (\nu - 1) \frac{\bar{\rho} \bar{u}}{r} = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} = 0,$$

$$\bar{\rho} = \rho_3 \exp(\beta \xi), \quad \xi = \bar{x}^\nu, \quad \bar{x} = r/r_*, \quad (2)$$

$$\bar{p} = \frac{\bar{R} \bar{\rho} \bar{T}}{1 - b \bar{\rho}}, \quad \bar{R} = \frac{\bar{R}_0}{M},$$

$$\bar{E} = \frac{\bar{p}(1 - b \bar{\rho})}{(\chi_1 - 1) \bar{\rho}},$$

где $\bar{\rho}$, \bar{u} , \bar{p} , \bar{T} , $\bar{E}|r, t$ — искомые функции, описывающие распределения соответственно плотности, массовой скорости, давления, температуры, удельной внутренней энергии в любой фиксированный момент времени t по координате r . Первые два уравнения этой системы представляют соответственно законы сохранения массы и импульса, третье уравнение формулирует закон распределения плотности продуктов взрыва, а функция $\beta(t)$ учитывает волновой характер плотности в силу многократно проходящих волн разрежения. Предпоследнее уравнение системы (2) есть уравнение состояния расширяющихся ПД, представляющее собой упрощенное уравнение Ван-дер-Ваальса. Последнее уравнение системы выражает удельную внутреннюю энергию расширяющихся ПД. Функция $\rho_3(t)$ — изменяющаяся со временем плотность в центре симметрии, M — молярная масса, \bar{R}_0 — универсальная газовая постоянная, b — коволюм.

Граничные условия системы (2):
в центре симметрии

$$\bar{u}(0, t) \equiv 0, \quad (3)$$

на КП (при $r = r_*$)

$$\bar{p}(r_*, t) = p_*, \quad \bar{\rho}(r_*, t) = \rho_*^+, \quad \bar{u}(r_*, t) = u_*, \quad (4)$$

где p_* , ρ_*^+ , $u_*|t$ — соответственно давление, плотность, скорость частиц на КП, при этом ρ_*^+ означает плотность на КП с ее внутренней стороны (со стороны продуктов взрыва).

Начальные условия зададим распределениями плотности, скорости частиц, давления, температуры, внутренней энергии в возмущенной области в начальный момент времени $t = 0$, которые известны из решения задачи о детонации [18].

В дальнейшем потребуется интегральный закон сохранения массы применительно к подобласти I:

$$\int_0^{r_*} \bar{\rho} r^{\nu-1} dr = \frac{1}{\nu} \rho_0 r_0^\nu. \quad (5)$$

Интегрирование системы уравнений

1. Распределение плотности описывается третьим уравнением системы (2), в котором, однако, не известны функции времени $\rho_3(t)$ и $\beta(t)$. Функцию $\rho_3(t)$ можно выразить через функцию $\beta(t)$ и координату $r_*(t)$ КП, используя интеграл массы (5), в который подставляем выражение для плотности из третьего уравнения системы (2):

$$\rho_3(t) = \frac{\beta}{\exp \beta - 1} \frac{\rho_0}{R_*^\nu}, \quad (6)$$

где $R_* = r_*/r_0$.

Следовательно, распределение плотности в подобласти I определяется функцией $\bar{\rho}$ в системе (2), где $\rho_3(t)$ выражено уравнением (6). Функцию $R_*(t)$ находим из решения задачи о движении возмущенной среды в подобласти II.

2. Функцию $\bar{u}(r, t)$, определяющую распределение массовой скорости в подобласти I, находим, интегрируя первое уравнение системы (2), в которое вместо функции $\bar{\rho}$ подставляем найденное для нее выражение, при этом используем граничное условие (3):

$$\begin{aligned} \bar{u}(r, t) = \\ = u_* \bar{x} \left[1 - \frac{r_*}{u_*} \frac{\dot{\beta}}{\nu \beta} \left(1 - \frac{1 - \exp(-\beta \xi)}{\xi(1 - \exp(-\beta))} \right) \right], \quad (7) \end{aligned}$$

где точка над функцией означает оператор дифференцирования по времени.

3. Функцию $\bar{p}(r, t)$, дающую распределение давления в подобласти I, находим, интегрируя второе уравнение системы (2), в которое подставляем найденные функции $\bar{\rho}(r, t)$ и $\bar{u}(r, t)$, при этом используем граничное условие (4) для давления:

$$\begin{aligned} \bar{h} = \frac{\bar{p}}{p_*} = 1 - \frac{\rho_3 u_*^2}{p_*} [\Pi_2(1 - \bar{x}^2) + \\ + \Pi_{12}(1 - \bar{x}^{\nu-2}) + \Pi_{22}(1 - \bar{x}^{2\nu+2}) + \\ + \Pi_{32}(1 - \bar{x}^{3\nu+2}) + \Pi_{42}(1 - \bar{x}^{4\nu+2}) + \\ + \Pi_{52}(1 - \bar{x}^{5\nu+2}) + \Pi_{62}(1 - \bar{x}^{6\nu+2})], \quad (8) \end{aligned}$$

где функции $\Pi_2, \Pi_{12}, \dots, \Pi_{62}$ найдены в работе [17].

В распределения (6)–(8) входят неизвестные пока параметры среды u_* , p_* на КП (при $r = r_*$), которые найдем из решения задачи о движении подобласти II в УВ и граничных условий (4) на КП.

Подобласть II

Систему определяющих уравнений для подобласти II возьмем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial u}{\partial r} + (\nu - 1) \frac{\rho u}{r} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (9) \end{aligned}$$

$$\frac{\rho}{\rho_2} = \left(\frac{r}{r_2} \right)^{\alpha(t)},$$

где ρ , u , $p|r, t$ — соответственно плотность, массовая скорость, давление в точке r подобласти II ($r \in [r_*, r_2]$) в момент времени t ; $\rho_2 = \rho(r_2, t)$ — плотность на фронте УВ; функцию $\alpha(t)$ найдем в ходе решения задачи.

Уравнение состояния возмущенной среды запишем в калорической форме:

$$E = \frac{p}{(\chi - 1)\rho}, \quad (10)$$

где $\chi = c_p/c_v$ — отношение теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме.

С внешней стороны подобласть II ограничена фронтом УВ ($r = r_2$), а с внутренней — КП ($r = r_*$). Следовательно, к граничным условиям на КП:

$$u(r_*, t) = u_*, \quad \rho(r_*, t) = \rho_*^-, \quad p(r_*, t) = p_*, \quad (11)$$

где ρ_*^- — плотность среды на КП с ее внешней стороны, т. е. со стороны УВ, добавятся условия на фронте УВ:

$$u(r_2, t) = u_2, \quad \rho(r_2, t) = \rho_2, \quad p(r_2, t) = p_2. \quad (12)$$

При этом должны быть выполнены условия динамической совместности [17]:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} &= \frac{2}{\chi + 1}(1 - q^2), \\ \frac{p_2 - p_1}{p_1} &= \frac{2\chi}{\chi + 1} \left(\frac{1}{q^2} - 1 \right), \\ \frac{u_2}{a_1} &= \frac{2q}{\chi + 1} \left(\frac{1}{q^2} - 1 \right), \end{aligned} \quad (13)$$

где $q = a_1/D$, $D = dr_2/dt$, величина q определяет меру интенсивности УВ ($q = 0$ для бесконечно сильной УВ и $q = 1$ для УВ, вырожденной в звуковую). Формулы (13) представляют собой соотношения, полученные из законов сохранения при переходе через фронт УВ [1].

Начальные условия:

$$r_2(0) = r_0, \quad r_*(0) = r_0. \quad (14)$$

Интегральный закон сохранения массы для подобласти II запишем в виде

$$\int_{r_*}^{r_2} \rho r^{\nu-1} dr = \frac{1}{\nu} \rho_1 (r_2^\nu - r_0^\nu). \quad (15)$$

Интегральный закон сохранения энергии для всей возмущенной области (объединения подобластей I и II) имеет вид

$$\begin{aligned} \theta_0 + \frac{\delta_\nu}{\nu} \left[\rho_0(Q_0 + E_0)r_0^\nu + \frac{p_1(r_2^\nu - r_0^\nu)}{\chi - 1} \right] = \\ = \delta_\nu \left\{ \int_0^{r_*} \left[\frac{\bar{\rho}\bar{u}^2}{2} + \frac{\bar{p}(1 - b\bar{\rho})}{\chi_1 - 1} \right] r^{\nu-1} dr + \right. \\ \left. + \int_{r_*}^{r_2} \left(\frac{\rho u^2}{2} + \frac{p}{\chi - 1} \right) r^{\nu-1} dr \right\}, \quad (16) \end{aligned}$$

где E_0 — удельная внутренняя энергия ВВ в невозмущенном состоянии, θ_0 — энергия инициатора взрыва, выделившаяся в точке ($\nu = 3$), на единице длины ($\nu = 2$), на единице площади ($\nu = 1$), Q_0 — удельная энергия взрывного превращения, χ_1 — отношение теплоемкостей для продуктов взрыва, χ — отношение теплоемкостей для возмущенной среды в подобласти II, $\delta_\nu = 2\pi(\nu - 1) + (\nu - 2)(\nu - 3)$.

Интегрирование системы уравнений

Случай сильной волны. Для случая сильной волны характерно соотношение

$$q^2 \ll 1. \quad (17)$$

1. Введем безразмерные переменные $x = r/r_2$, $R = r_2/r_0$, $R_* = r_*/r_0$.

Распределение плотности в подобласти II определяется третьим уравнением системы (9), в котором функция $\alpha(t)$ неизвестна. Ее можно найти, используя интегральный закон сохранения массы (15) и соотношение (17) для сильной волны. Действительно, подставив выражение для плотности из третьего уравнения системы (9) в интегральный закон (15), получим

$$\alpha = \nu \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{1 - x_*^{\alpha+1}}{1 - R^{-\nu}} - 1 \right), \quad (18)$$

где $x_* = r_*/r_2$. Из первого уравнения системы (13) с учетом (17) следует

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\chi + 1}{\chi - 1}. \quad (19)$$

Из (18) и (19) находим выражение для функции α в случае сильной волны:

$$\alpha = \nu \left(\frac{\chi + 1}{\chi - 1} \frac{1 - x_*^{\alpha+1}}{1 - R^{-\nu}} - 1 \right). \quad (20)$$

Соотношение (20) в неявном виде определяет функцию α через закон движения КП $r_*(t)$ и закон движения фронта УВ $r_2(t)$. Однако, как будет показано ниже, для сильной волны функция α сохраняет постоянное значение и может быть определена при отыскании закона распределения скорости частиц в подобласти II.

2. Подставим в первое уравнение системы (9) выражение для плотности из третьего уравнения этой системы, а затем полученное уравнение проинтегрируем, используя граничное условие (12) для скорости. В результате

$$u = \frac{\alpha}{\alpha + 1} \frac{\dot{r}_2}{r_2} r.$$

Отсюда при $r = r_2$ находим

$$u_2 = \frac{\alpha}{\alpha + 1} \dot{r}_2. \quad (21)$$

С другой стороны, из третьего уравнения системы (9) и соотношений (13) для сильной волны получаем

$$u_2 = \frac{2}{\chi + 1} \dot{r}_2. \quad (22)$$

Сравнивая (21) и (22), определяем

$$\alpha = \alpha_0 = \frac{2}{\chi - 1}. \quad (23)$$

Таким образом, в случае сильной волны распределение плотности в подобласти II описывается функцией

$$\rho = \rho_2 \left(\frac{r}{r_2} \right)^{\frac{2\nu}{\chi-1}}, \quad (24)$$

а распределение массовой скорости — функцией

$$u = \frac{2a_1}{(\chi + 1)q} \left(\frac{r}{r_2} \right) \quad (25)$$

или

$$u = u_2 \left(\frac{r}{r_2} \right).$$

3. Подставим во второе уравнение системы (9) выражение для функции u из (25), а затем проинтегрируем полученное уравнение относительно функции $p(r, t)$ с использованием граничного условия (12) для давления, где функция p_2 для сильной волны, согласно второму уравнению системы (13), выражается в виде

$$p_2 = \frac{2\chi p_1}{(\chi + 1)q^2}. \quad (26)$$

В результате

$$h = \frac{p}{p_2} = 1 - \mu(1 - x^{\alpha_0+2}), \quad (27)$$

где

$$\mu = \frac{2\rho_1 a_1^2}{(\chi - 1)(\alpha_0 + 2)q^2 p_2} \left(\frac{R}{q} \frac{dq}{dR} + \frac{\chi - 1}{\chi + 1} \right).$$

Итак, решение задачи для случая сильной волны определяется функциями $\bar{\rho}(r, t)$ из третьего уравнения системы (2), $\bar{u}(r, t)$ в виде (7), $\bar{p}(r, t)$ из соотношения (8) для подобласти I и функциями $\rho(r, t)$ в виде (24), $u(r, t)$ из (25) и $p(r, t)$ в виде (27).

В это решение входят неизвестные параметры среды ρ_2, u_2, p_2 на фронте УВ и параметры среды $\rho_*^+, \rho_*^-, u_*, p_*$ на КП. Неизвестными пока остаются законы движения фронта УВ и КП.

Параметры на фронте УВ могут быть выражены через меру интенсивности q УВ и параметры невозмущенной среды по формулам (13).

Функция ρ_* на КП терпит разрыв первого рода. Со стороны продуктов взрыва на КП $\rho_* = \rho_*^+$, где ρ_*^+ определяется из третьего уравнения системы (2) при $\bar{x} = 1$ в виде

$$\rho_*^+ = \rho_3 \exp(\beta), \quad (28)$$

здесь ρ_3 выражено формулой (6).

Со стороны подобласти II плотность на КП ρ_*^- определяется третьим уравнением системы (9), где следует положить $r = r_*$, а именно:

$$\rho_*^- = \rho_2 x_*^\alpha, \quad (29)$$

или согласно (24) в виде

$$\rho_*^- = \rho_2 x_*^{\frac{2\nu}{\chi-1}}.$$

Функции u_*, p_* на КП являются непрерывными и поэтому могут быть, согласно формулам (25) и (27), определены в виде

$$u_* = \frac{2a_1}{(\chi + 1)q} x_*, \quad (30)$$

$$h_* = \frac{p_*}{p_2} = 1 - \mu(1 - x_*^{\alpha_0+2}). \quad (31)$$

Из этих выражений следует, что полученное решение задачи выражается через неизвестные пока законы движения КП: $r_* = r_*(t)$, а также фронта УВ: $r_2 = r_2(t)$.

Найдем связь между указанными законами. Для этого подставим значение α из (23) в уравнение (20), в результате имеем

$$R_* = R \frac{2}{\chi+1}. \quad (32)$$

Соотношение (32) связывает закон движения КП с законом движения фронта УВ для случая сильной волны ($q^2 \ll 1$).

Таким образом, с учетом соотношения (32) решение задачи определяется через одну неизвестную функцию $q(R)$.

Чтобы найти функцию $q(R)$, используем интегральный закон сохранения энергии (16). Подставив в (16) найденные функции $\bar{\rho}$, \bar{u} , \bar{p} , ρ , u , p и вычислив квадратуры, после элементарных преобразований запишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $q(R)$ и $\tau(R)$:

$$\frac{dq}{dR} = \varphi, \quad \frac{d\tau}{dR} = q. \quad (33)$$

Функция φ вследствие ее чрезвычайной громоздкости здесь не приводится (ее выражение приведено в работе [17]).

Начальные условия для системы уравнений (33) в соответствии с (14) имеют вид

$$q(1) = q_0, \quad \tau(1) = 0, \quad (34)$$

где q_0 — мера интенсивности УВ в начальный момент времени (при $R = 1$), определяемая из экспериментальных кривых $D(r_2)$ или с помощью расчетов [1, 12, 19].

Волна произвольной интенсивности. В общем случае (для УВ произвольной интенсивности) постановка задачи о разлете продуктов взрыва остается такой же, как и в случае сильной волны. Решение этой задачи определяется формулами (6)–(8), в которые входят неизвестные параметры u_* , p_* на КП (при $r = r_*$). Эти параметры найдем из решения задачи о движении возмущенной среды в подобласти II и граничных условий на КП.

В отличие от случая сильной волны в общем случае при интегрировании системы уравнений для подобласти II соотношение для функции α согласно (18) и (13) принимает вид

$$\alpha = \nu \left[\frac{\chi + 1}{\chi - 1 + 2q^2} \frac{1 - x_*^{\alpha+\nu}}{1 - R^{-\nu}} - 1 \right]. \quad (35)$$

При этом распределение плотности в подобласти II описывается функцией

$$\rho = \rho_2 \left(\frac{r}{r_2} \right)^\alpha. \quad (36)$$

Распределение массовой скорости получаем, интегрируя первое уравнение системы (9) с использованием граничного условия для скорости (12):

$$z = \frac{u}{u_2} = x^{1-\alpha-\nu}(1 - \varepsilon_1) + \varepsilon_1 x - \varepsilon_2 x \ln x, \quad (37)$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{(\alpha + \nu)u_2} \left[\alpha \dot{r}_2 + r_2 \left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha + \nu} - \frac{\dot{\rho}_2}{\rho_2} \right) \right], \quad (38)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\dot{\alpha} r_2}{(\alpha + \nu)u_2}.$$

Распределение давления получаем, интегрируя второе уравнение системы (9) с использованием граничного условия для давления (12):

$$h = \frac{p}{p_2} = 1 - \frac{\rho_2 r_2}{p_2} [(\varepsilon_7 + \varepsilon_{13})\varphi_1(x) + (\varepsilon_8 + \varepsilon_{15})\varphi_2(x) + (\varepsilon_9 + \varepsilon_{12})\varphi_3(x) + (\varepsilon_{10} + \varepsilon_{14})\varphi_4(x) + \varepsilon_{11}\varphi_5(x) + \varepsilon_{15}\varphi_6(x)]. \quad (39)$$

Функции, входящие в правую часть (39), вследствие их громоздкости здесь не приводятся, а даны в работе [17].

В решение (36)–(39) входят неизвестные функции q , α , R_* , $\tau|R$. Первое уравнение для определения указанных функций получаем, подставляя в интеграл энергии (16) найденные функции ($\bar{\rho}$, \bar{u} , \bar{h} , ρ , u , h) и выполняя элементарные, но весьма громоздкие преобразования:

$$b_{51} \frac{d^2 \alpha}{dR^2} + b_{52} \frac{d^2 q}{dR^2} + b_{53} \frac{d^2 R_*}{dR^2} = b_{54}. \quad (40)$$

Второе уравнение находим, дифференцируя по R уравнение (37):

$$\omega_1 \frac{d\alpha}{dR} - \omega_2 \omega_3 \frac{dq}{dR} - \omega_2 \omega_{41} \frac{dR_*}{dR} - \omega_2(\omega_{42} + \omega_5) = 0, \quad (41)$$

где $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{42}$ представлены в [17]. Третье уравнение получаем, используя соотношение (38) и граничное условие $u(r_*, t) = u_*$:

$$\frac{dR_*}{dR} = \varepsilon_{85} + \varepsilon_{86} \frac{d\alpha}{dR} + \varepsilon_{87} \frac{dq}{dR}, \quad (42)$$

где $\varepsilon_{85} - \varepsilon_{87}$ даны в [17].

Продифференцировав по R уравнения (41) и (42), запишем, совместно с уравнением (40), систему уравнений относительно вторых производных функций q , α , $R_*|R$:

$$b_{51} \frac{d^2 \alpha}{dR^2} + b_{52} \frac{d^2 q}{dR^2} + b_{53} \frac{d^2 R_*}{dR^2} = b_{54},$$

$$\omega_1 \frac{d^2 \alpha}{dR^2} - \omega_2 \omega_9 \frac{d^2 q}{dR^2} - \omega_2 \omega_{41} \frac{d^2 R_*}{dR^2} = b_{55}, \quad (43)$$

$$\varepsilon_{86} \frac{d^2 \alpha}{dR^2} + \varepsilon_{87} \frac{d^2 q}{dR^2} - \frac{d^2 R_*}{dR^2} = b_{56},$$

где

$$b_{55} = -\omega'_1 \frac{d\alpha}{dR} + (\omega'_2 \omega_3 + \omega_2 \omega'_3) \frac{dq}{dR} + (\omega'_2 \omega_{41} + \omega_2 \omega'_{41}) \frac{dR_*}{dR} + \omega'_2 (\omega_{42} + \omega_5) + \omega_2 (\omega'_{42} + \omega'_5),$$

$$b_{56} = -\varepsilon'_{85} - \varepsilon'_{86} \frac{d\alpha}{dR} - \varepsilon'_{87} \frac{dq}{dR},$$

штрихом обозначен оператор дифференцирования по R .

Разрешив систему (43) относительно вторых производных функций q , α , $R_*|R$, введя обозначения

$$\frac{d\alpha}{dR} = \alpha_1, \quad \frac{dq}{dR} = q_1, \quad \frac{dR_*}{dR} = z_1$$

и используя уравнение $\frac{d\tau}{dR} = q$, получаем систему уравнений относительно функций q , α , R_* , τ , α_1 , q_1 , $z_1|R$:

$$\frac{d\alpha}{dR} = \alpha_1, \quad \frac{dq}{dR} = q_1, \quad \frac{dR_*}{dR} = z_1, \quad \frac{d\tau}{dR} = q, \quad (44)$$

$$\frac{d\alpha_1}{dR} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \frac{dq_1}{dR} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \frac{dz_1}{dR} = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где Δ , $\Delta_1 - \Delta_3$ представлены в [17].

Для системы уравнений (44) начальными являются условия, налагаемые на искомые функции в момент выхода УВ на поверхность заряда, т. е. при $R = 1$. Однако эта точка является особой. В качестве асимптотики решения вблизи особой точки возьмем значения соответствующих функций из решения задачи для сильной волны: $\alpha = \alpha_0$, $q = q_0$, $R_* = R_{*0}$, $\tau = \tau_0$, $\alpha_1 = \alpha_{10}$, $q_1 = q_{10}$, $z_1 = z_{10}$ при $R = R_0$, где $R_0 = 1.001$.

В режиме сильной волны $\alpha_0 = 2\nu/(\chi - 1) = \text{const}$ функцию q_0 находим по экспериментальным данным, например, [1, 6, 8, 19, 20], $R_{*0} = R_0^{\frac{2}{\chi+1}}$, $\tau_0 = \int_1^{R_0} q_0 dR = q_0(R_0 - 1)$, $\alpha_{10} = 0$, функцию q_{10} находим по значению q_0 [17], $z_{10} = 2/(\chi + 1)$.

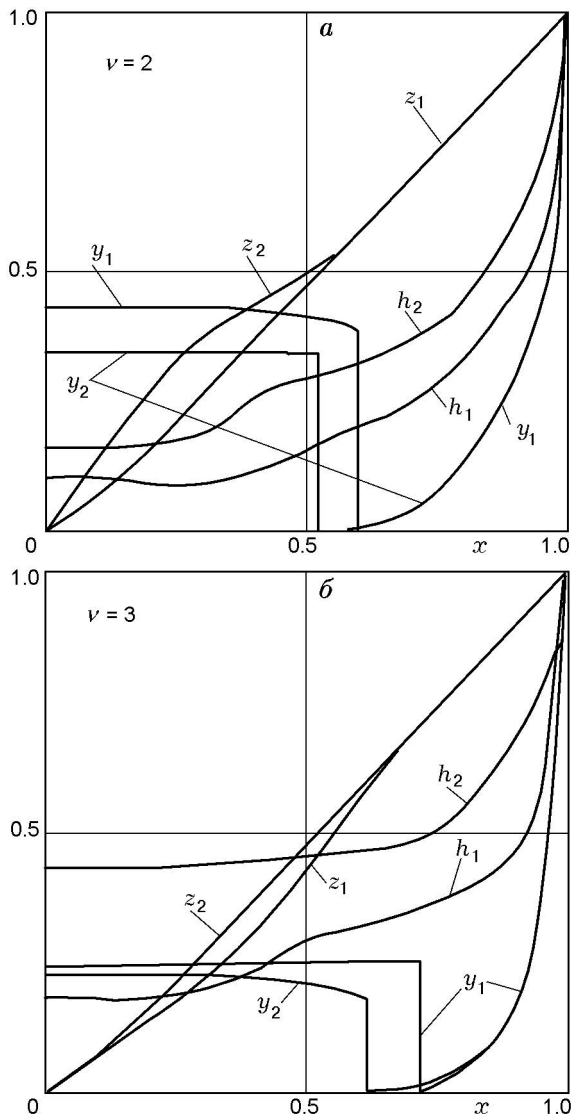
Численное интегрирование системы уравнений (44) с асимптотикой в начальной точке для сильной волны выполнено методом Рунге — Кутты — Фельберга с автоматическим выбором шага [21], при этом в качестве примера использовались данные, соответствующие заряду из прессованного тротила [1] для его взрыва в воздухе. Одновременно, согласно полученному решению, по соответствующим формулам найдены распределения параметров в возмущенных подобластях I и II, а также определены законы движения УВ и КП.

Расчеты проведены для взрыва в воздухе (со стандартными параметрами $\rho_1 = 1.225$ кг/м³, $u_1 = 0$, $p_1 = 1.012 \cdot 10^5$ Н/м²) заряда тротила с характеристиками $\rho_0 = 1.56 \cdot 10^3$ кг/м³, $D_0 = 7 \cdot 10^3$ м/с, $Q_0 = 4.2 \cdot 10^6$ Дж/кг, $\chi_1 = 1.25$, $\chi = 1.4$, $r_0 = 5.1 \cdot 10^{-3}$ м, $\gamma = 0.2$, $\beta_0 = 0.60686$, $\delta = 0.0075$, $E_0 = 0.228 \cdot 10^6$ Дж/кг.

На рисунке в качестве примера для цилиндрической ($\nu = 2$) и сферической ($\nu = 3$) симметрий показаны распределения по безразмерной координате $x = r/r_2$ безразмерных плотности $y = \rho/\rho_2$, массовой скорости $z = u/u_2$ и давления $h = p/p_2$. Индексы 1 и 2 у этих величин относятся к значениям R , равным соответственно 50 и 60 (часть а), 20 и 24 (часть б). Из этих рисунков можно определить границу между подобластями I и II, а также их относительную протяженность по скачку плотности для рассматриваемого момента времени, соответствующего приведенным значениям R . Так, например, для цилиндрической волны в момент времени, соответствующий положению фронта УВ $R = 50$, граница между подобластями I и II наблюдается в сечении $x = 0.6$, а для $R = 60$ — в сечении $x = 0.53$, т. е. с течением времени относительная протяженность подобласти I уменьшается, что соответствует физике явления.

Определить границу между подобластями I и II и их относительную протяженность можно также по кривым $z(x)$, а именно: положение указанной границы наблюдается там, где при движении со стороны подобласти II к центру симметрии нарушается линейность кривой $z(x)$, поскольку согласно (25) в подобласти II скорость распределена по линейному закону. Например, в случае сферической симметрии ($\nu = 3$) такая картина наблюдается в сечении $x = 0.7$ при $R = 20$ и в сечении $x = 0.6$ при $R = 24$.

Характерной особенностью кривых $h(x)$



Распределения безразмерных плотности $y(x)$, массовой скорости $z(x)$, давления $h(x)$ в случае цилиндрической (а) ($\nu = 2$) и сферической (б) симметрии потока ($\nu = 3$)

является тот факт, что кривые, соответствующие более поздним моментам времени, располагаются всеми своими точками выше кривых, соответствующих ранним моментам времени, т. е. во всем диапазоне x наблюдается соотношение $h_2(x) > h_1(x)$. Такая картина соответствует физике явления: в более поздние моменты рассматриваемого диапазона времени давление на фронте УВ p_2 ниже, чем в ранние моменты (с течением времени давление p_2 уменьшается), следовательно, параметр $h = p/p_2$ увеличивается во всем диапазоне x на более поздних временных интервалах.

Изменения параметров возмущенной среды на фронте УВ и на КП, найденные в полученном решении, приведены в работе [17], где также дан анализ поведения соответствующих кривых.

ВЫВОДЫ

В работе представлена единая математическая модель, описывающая всю последовательность развития взрыва: возбуждение инициатором взрыва внутри заряда взрывчатого вещества \rightarrow распространение ударной волны внутри заряда с переходом в режим нормальной детонации \rightarrow собственно режим нормальной детонации \rightarrow разлет продуктов взрыва в окружающую среду (воздух) \rightarrow движение образованной расширяющимися продуктами взрыва воздушной ударной волны.

Решение начально-краевых задач, к которым сводится математическое описание указанной последовательности явлений, выполнено на основе развитого в данной работе эффективного аналитического метода Т. М. Саламахина [1, 13]. Основная идея этого метода заключается во введении в систему определяющих уравнений замыкающего уравнения, формулирующего предположение о степенном законе распределения плотности возмущенной среды и продуктов взрыва. Такой подход позволил снять ограничение, связанное с предположением об адиабатичности взрывных процессов, и получить аналитическое решение задачи, что дало возможность проследить за развивающейся во времени, довольно сложной структурой взрывного процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саламахин Т. М. Физические основы механического действия взрыва и методы определения взрывных нагрузок. — М.: ВИА, 1974.
2. Андреев К. К., Беляев А. Ф. Теория взрывчатых веществ. — М.: Оборонгиз, 1960.
3. Харитон Ю. Б. Механизм взрывных реакций. Дополнительные статьи к книге Брунsvича «Теория ВВ». — М.; Л.: Госхимиздат, 1932.
4. Андреев К. К., Харитон Ю. Б. Некоторые соображения о механизме самораспространяющихся реакций // Докл. АН СССР. — 1934. — Т. 1, вып. 7.
5. Каупертвейт М. Модельные решения задачи об иницировании детонации в конденсированных взрывчатых веществах // Детонация и взрывчатые вещества. — М.: Мир, 1981.

6. Шведов К. К., Дремин А. Н. Исследование неидеальных режимов детонации конденсированных ВВ // Взрывное дело, № 60/17. — М.: Недра, 1967.
7. Володин Г. Т. Исследование развития взрыва конденсированных систем // Физика горения и взрыва. — 1994. — Т. 30, № 2. — С. 111–117.
8. Зубарев В. Н. Движение продуктов взрыва за фронтом детонационной волны // Прикладная механика и техническая физика. — 1965. — № 2. — С. 54–61.
9. Зубарев В. Н., Евстигнеев А. А. Уравнения состояния продуктов взрыва конденсированных ВВ // Физика горения и взрыва. — 1984. — Т. 20, № 6. — С. 114–126.
10. Дремин А. Н. Открытия в исследовании детонации молекулярных конденсированных взрывчатых веществ в XX веке // Физика горения и взрыва. — 2000. — Т. 36, № 6. — С. 31–44.
11. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. — М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
12. Физика взрыва: в 2 т. / под ред. Л. П. Орленко. — 3-е изд. — М.: Физматлит, 2002. — Т. 1.
13. Мельникова Н. С., Саламахин Т. М. О расчете точечного взрыва в различных газах // Прикладная механика и техническая физика. — 1964. — № 4. — С. 155–160.
14. Гиро С. М., Бах Г. Г. Неавтономные взрывные волны // Физика горения и взрыва. — 1991. — Т. 27, № 3. — С. 83–91.
15. Володин Г. Т. Распределение параметров продуктов детонации конденсированных ВВ // Физика горения и взрыва. — 1991. — Т. 27, № 1. — С. 123–127.
16. Юхансон К., Персон П. Детонация взрывчатых веществ. — М.: Мир, 1973.
17. Володин Г. Т. Действие взрыва зарядов конденсированных ВВ в газовой и жидкой средах. Часть 1. Параметры детонационных и ударных волн. — Тула: Левша, 2003.
18. Володин Г. Т. Стационарная детонация зарядов конденсированных систем // Дифференциальные уравнения и прикладные задачи: сб. науч. тр. — Тула: Изд-во ТулГУ, 1999. — С. 37–44.
19. Физика взрыва / Ф. А. Баум, Л. П. Орленко, К. П. Станюкович, В. П. Челышев, Б. И. Шехтер. — М.: Наука, 1975.
20. Дремин А. Н., Савров С. Д., Трофимов В. С., Шведов К. К. Детонационные волны в конденсированных средах. — М.: Наука, 1970.
21. Дьяконов В. П. Справочник по алгоритмам и программам на языке Бейсик для персональных ЭВМ. — М.: Наука, 1987.

Поступила в редакцию 7/V 2009 г.