УДК 51: 101.8

DOI:
10.15372/PS20180104

В.М. Резников

ТЕОРЕМА БЕРНУЛЛИ И ТРЕБОВАНИЕ КОЛМОГОРОВА О БЛИЗОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ И ЧАСТОТ

Известные математики Борель; Леви и др. критиковали требование Колмогорова о близости вероятности события и его частотных характеристик в контексте применения теории вероятностей. Они полагали; что это требование является избыточным; совпадая с заключением теоремы Бернулли. В статье показано; что в рамках последовательной частотной интерпретации условие Колмогорова не является заключением теоремы; оно выполняется вследствие устойчивости частот. Кроме того; показано; что вывод условия Колмогорова в субъективистской интерпретации не является обоснованным в частотном подходе.

Ключевые слова: частотная интерпретация; субъективистская интерпретация; теорема Бернулли; близость вероятности и частот; устойчивость частот; принцип Курно; Колмогоров; Мизес; Борель; Фреше; Леви

V.M. Reznikov

BERNOULLI'S THEOREM AND KOLMOGOROV'S REQUEST FOR THE PROXIMITY OF PROBABILITY AND FREQUENCES

The famous mathematicians Borel, Levy and others criticized Kolmogorov's request for the proximity of event probability and its frequency characteristics in the context of applying the probability theory. They believed this request to be redundant, since it is the conclusion of Bernoulli's theorem. The article shows that within the frequency interpretation, Kolmogorov's condition is not the conclusion of the theorem, but it is fulfilled as a consequence of frequency stability. In addition, we show that the deduction of Kolmogorov's request made within the subjectivist interpretation is not justified within the frequency one.

Keywords: frequency interpretation; subjectivist interpretation; Bernoulli theorem; proximity of probability and frequencies; stability of frequencies; Cournot principle; Kolmogorov; Mises; Borel; Frechet; Levy

В 1933 г. в Германии вышла книга А.Н. Колмогорова; посвященная аксиоматическому обоснованию теории вероятностей; в 1936 г. она была опубликована на русском языке; а в 1974 г. вышло второе издание этой книги; на которое мы будем ссылаться в данной статье [2]. Кроме того; известны издания книги на английском [9] и др. языках. Несмотря на то, что в целом работа А.Н. Колмогорова имеет математический характер, она является разноплановой. Несколько страниц небольшой по объему монографии посвящены исследованию понятия независимости в теории вероятностей и условиям применения математики.

Если колмогоровская аксиоматика известна практически всем специалистам, так или иначе связанным с математикой, то условия применения теории вероятностей по Колмогорову не являются популярными. Известные специалисты в теории вероятностей Г. Шейфер и В. Вовк в связи с семидесятилетием выхода книги Колмогорова исследовали историю аксиоматизации теории вероятностей и разработки требований к ее применению [11, 12]. Они отмечают, что современники Колмогорова, в отличие от математиков нашего времени, не оставили без внимания его условия применения теории вероятностей. Так, Гадамер, Борель, Фреше, Леви и др. критиковали одно из его требований, полагая, что последнее является зависимым. Прежде чем исследовать их критические аргументы, остановимся на основаниях применимости теории вероятностей по Колмогорову.

Как отмечает Колмогоров, в контексте приложений он в значительной мере следует Мизесу [2]. Сформулируем кратко схему применения теории вероятностей по Колмогорову [2].

1. Определяются условия проведения экспериментов, называемые комплексом условий S, допускающим неограниченную реализуемость.

2.Описывается круг изучаемых событий, связанных, например, с бросанием монеты, и определяются элементарные исходы такого эксперимента, в данном случае герб и решка. Формулируются условия проведения реального эксперимента, состоящего, для примера, в бросании двух монет одновременно, определяется изучаемое событие, состоящее в повторении исходов, и описываются элементарные исходы этого эксперимента: РР, РГ, ГР, ГГ.

3. Определяется связь изучаемых событий с элементарными событиями. Реализация элементарного события означает реализацию события.

4. Этот пункт описываемой схемы является значимым для нашей статьи, поэтому при

его изложении, мы в точности следуем Колмогорову: «Предполагается, что при реализации условий S, могут наступить события *A*, которым поставлены в соответствие действительные числа *P(A),* которые обладают следующими свойствами:

А. Можно практически быть уверенным, что если комплекс условий *S* будет повторен большое число *n* раз и если при этом через *m* обозначено число случаев, при которых событие *A* наступило, то отношение *m/n* будет мало отличаться от *P(A).*

В. Если *P(A)* очень мало, то можно практически быть уверенным, что при однократной реализации условий *S* событие *A* не будет иметь место» [2, с. 12–13].

Свойства А и В, которыми, согласно Колмогорову, должны обладать изучаемые вероятности событий, мы будем называть требованиями к вероятностям в контексте применений теории вероятностей по Колмогорову. Первое требование является неформальным вариантом асимптотического определения вероятности у Мизеса [4]. Второе оказывается неформальным описанием принципа Курно [3]. А. Курно – разносторонний исследователь, чьи результаты получили признание во многих областях науки и философии. Так, он один из создателей математической экономики. Кроме того, он открыл геометрическую вероятность и предложил принцип, который осуществляет связь математики с миром опыта, – так называемый принцип Курно. Известны две формы этого принципа: сильная и слабая. Принцип Курно в слабой форме утверждает, что маловероятное событие при большом числе испытаний будет происходить редко. Принцип в слабой форме является корректным, однако в приложениях математической статистики используется принцип в сильной форме. Принцип Курно в сильной форме запрещает появление маловероятного события в первом испытании.

Требования Колмогорова представляют интерес для теории вероятностей и математической статистики. Так, условие А значимо для частотной интерпретации теории вероятностей и для различных подходов в математической статистике к оцениванию вероятностей на основе частот. Условие В является составной частью раздела проверки статистических гипотез.

Теперь перейдем к основаниям критики условий Колмогорова. Так, математики Гадамер, Борель, Фреше, Леви критиковали требование А, поскольку считали, что оно является избыточным, совпадая с заключением теоремы Бернулли, а при учете требования В первое условие Колмогорова оказывается верным для выборки произвольного объема данных.

Наша работа посвящена двум тезисам. Первый заключается в том, что если Колмогорова можно считать сторонником частотной интерпретации, то формальное описание требования А не оказывается заключением теоремы Бернулли: оно выполняется вследствие устойчивости частот и в случае его выполнимости оно является условием применения теоремы. Почему Борель, Фреше, Леви критиковали требование А А.Н. Колмогорова? По нашему мнению, это связано с тем, что условия применения теории вероятностей по Колмогорову частично совпадали с требованиями Мизеса. Как известно из истории математики, частотная интерпретация Мизеса получила жесткую критику со стороны математиков и философов, которые не являлись сторонниками эмпирической интерпретации. Не вызывает сомнений, что близость требований Колмогорова и Мизеса и привела к критике первого автора, а направленность критики на его условие А объясняется тем, что оно является финитным вариантом условия Мизеса о сходимости частотной последовательности к пределу.

Почему критики обратились к теореме Бернулли и решили, что критикуемое ими требование Колмогорова является заключением теоремы Бернулли? Дело в том, что для субъективистов теорема Бернулли имеет значение. Так, они полагали, что на основе принципа Курно, представляющего второе условие Колмогорова и теоремы Бернулли, обеспечивается объективация субъективно назначенных вероятностей. Почему они считали, что первое требование Колмогорова является заключением теоремы Бернулли? Во-первых, потому, что оно задано Колмогоровым неформально, поэтому допускало различные формализации, в том числе на основе заключения теоремы Бернулли. Во-вторых, действительно, строго о близости вероятности события и его частотных характеристик можно говорить лишь на языке теории вероятностей и, в частности, для этого подходит заключение теоремы Бернулли. Однако существуют более убедительные аргументы, свидетельствующие о том, что в частотной интерпретации близость вероятности и частотных характеристик определяется геометрически, а не на основе заключения теоремы Бернулли.

Во-первых, у Мизеса близость вероятности и частот определяется геометрически, поскольку вероятность – это предел сходящихся частот, где сходимость определяется так, как это принято в математическом анализе, а не в теории вероятностей. Коль скоро требование Колмогорова представляет собой финитный вариант требования Мизеса о сходимости частот к вероятности, естественно считать, что близость вероятности и частот определяется на основе их геометрической близости.

Во-вторых, хотя первое требование Колмогорова действительно определяет близость частотных характеристик и вероятности, в эмпирической интерпретации теоретические вероятности, как правило, неизвестны. Существуют различные подходы к оцениванию неизвестной вероятности некоторого события. Предлагаемый в нашей работе подход предполагает, что оцениваемая неизвестная вероятность является постоянной. Как известно, характерной чертой многих естественных процессов оказывается то, что наблюдаемые в них частоты со временем стабилизируются. Это свойство частот называется устойчивостью. Отметим, что постоянные вероятности часто определяется на основе устойчивости частот. Если частоты являются устойчивыми, т.е. принадлежат некоторой ограниченной области, например интервалу, то тогда взяв в качестве вероятности любую точку в этом интервале, получим геометрическую близость вероятности и частот, и тем самым выполнимость первого условия Колмогорова. Если считать, что требование Колмогорова определяет геометрическую близость, тогда не нужна теорема Бернулли для определения близости вероятности и частот.

В-третьих, если проводимые эксперименты не являются независимыми, тогда теорема Бернулли неприменима. Однако и в этом случае ничто не препятствует осуществлению эмпирической верификации устойчивости и определению неизвестной вероятности, если устойчивость частот имеет место.

Итак, если Колмогорова можно считать последовательным сторонником частотной интерпретации и если понимать, что первое условие Колмогорова определяет геометрическую близость частот и вероятности, тогда это требование невыводимо из теоремы Бернулли. Более того, она и не нужна.

Однако сложно признать Колмогорова безусловным сторонником частотной интерпретации. Известно, что его ссылка на Мизеса в большой степени была обусловлена соображениями политкорректности. Действительно, ссылаться на Мизеса было удобно, потому, что известный математик А.Я. Хинчин обосновал совместимость частотной интерпретации с марксистской философией [5]. Так как рационально считать, что Колмогоров интересовался частотной интерпретацией, но не был ее безоговорочным сторонником, рассуждения Шейфера и Вовка, направленные на объяснение использования Колмогоровым «зависимого условия», представляют интерес. Второй в нашей работе защищаемый тезис состоит в том, что некоторые объяснения Шейфера и Вовка имеют в некоторой степени субъективистский характер. Поэтому с целью их объективизации предложены дополнительно к их объяснениям, наши собственные аргументы. Но прежде чем обратиться к объяснениям Шейфера и Вовка, отметим один их критический аргумент, предполагающий, что Колмогоров ошибся, используя условие А.

Шейфер и Вовк полагали, что об ошибочности условия А свидетельствует то обстоятельство, что Колмогоров никогда не отвечал на критику [11]. Однако трудно согласиться с такой аргументацией. Мы полагаем, что Колмогоров не отвечал на критику по двум причинам. Во-первых, из прагматических соображений, основанных на том, что плодотворная дискуссия возможна, если оппоненты придерживаются в определенной степени совпадающих точек зрения. Однако субъективисты и эмпирики занимают противоположные позиции относительно природы вероятности, поэтому конструктивный диалог между ними практически невозможен. Во-вторых, Колмогоров не отвечал на критику из соображений политкорректности. Известно, что у него возникли творческие профессиональные отношения с французскими математиками, поэтому не было особого смысла вступать с ними в полемику, тем более эта критика, по существу, была направлена не на Колмогорова, а на Мизеса. История признания колмогоровской аксиоматики показывает, что ее автор был прав, не вступив в полемику с французскими коллегами. В 1939 г. в Женеве участники международной математической конференции жестко раскритиковали теорию вероятностей Мизеса и пришли к решению о признании аксиоматической теории вероятностей Колмогорова. В своем письме к Колмогорову об этом сообщил Фреше, причем он подчеркнул, что имеет значение то, что в работе Колмогорова не только изложена теория вероятностей на основе предложенной им аксиоматики, но также сформулированы требования к применению теории вероятностей.

Предположим, что Колмогоров действительно в качестве условия А использовал заключение теоремы Бернулли, и в связи с этим перейдем к анализу соображений Шейфера и Вовка, объясняющих, почему Колмогоров использовал в качестве требования к вероятностям зависимое условие, которое является заключением теоремы Бернулли. Шейфер и Вовк предложили несколько объяснений, мы же рассмотрим основные начиная с наиболее убедительных.

Самая серьезная аргументация Шейфера и Вовка связана с применением теоремы Бернулли. «Как Борель и Леви многократно объясняли, – пишут авторы, – принцип А может быть выведен на основе принципа В совместно с теоремой Бернулли, которая является следствием аксиом. Однако в схеме, которую формулирует Колмогоров, выводимость влечет за собой дополнительное предположение: мы должны полагать, что принцип В применяется не только к вероятностям, специфицированным к повторению условий S, но также к соответствующим вероятностям (полученных при допущении независимости) для n кратных повторов условий S». И далее они отмечают, что: «возрастание модели за счет n-кратных повторений вызывает ухудшение эмпирической точности в такой степени, что мы больше не оправдываем получение высоковероятностных предсказаний как практически достоверных» [12, p. 91–92].

К соображениям Шейфера и Вовка о проблемах применения теоремы Бернулли, связанных с проверкой на независимость увеличивающихся объемов данных и верификацией выполнимости принципа Курно при этих условиях, добавляются наши условия относительно применения теоремы. Как мы уже писали, в частотной интерпретации теоретические величины заранее неизвестны, поэтому необходимо на основе частот определить постоянную, но неизвестную вероятность успеха в теореме Бернулли. Если частотные характеристики окажутся устойчивыми, то на их основе будет определена постоянная вероятность, близкая к частотам, и тогда на основе теоремы будет выведено требование А Колмогорова. Однако в субъективистской интерпретации теоретические вероятности не определяются на основе эмпирических частот, а назначаются на основе индивидуальных оценок. Так как в объективистской интерпретации теории вероятностей нормы на применение формального аппарата предполагают его применимость не к произвольным, а к эмпирически обоснованным результатам, поэтому вывод условия А действительно осуществим в частотной интерпретации. Но в субъективистской интерпретации не предполагается ни эмпирической верификации частотных характеристик, ни верификации устойчивости частот, поэтому вывод условия А в субъективистской интерпретации не может быть признан обоснованным в частотной интерпретации.

Другое сильное объяснение Шейфера и Вовка апеллирует к тому, что условие А играет особую роль для Колмогорова в контексте применений математики, так как он сам отмечал, что в вопросе применения теории вероятностей в целом следует Мизесу. Данное объяснение имеет в некотором смысле субъективный характер, так как основано на предпочтениях Колмогорова. Мы полагаем, что эту аргументацию имеет смысл дополнить соображениями, опирающимися на значимость этой концепции для науки. В частности, дополнить рассуждениями И. Хакинга о значимости этой интерпретации для науки [8]. Кроме того, в отличие от чистых логиков, математиков и философов, критиковавших Мизеса, прикладные математики, в частности Ю.И. Алимов, В.Н. Тутубалин и др., высоко оценивают частотную интерпретацию Мизеса в контексте приложений [1, 6].

Выводы

1. Показано, что в эмпирической интерпретации требование А близости вероятности и частотных характеристик некоторого события имеет онтологический характер. Эта близость не может быть установлена теоретически, например на основе теоремы Бернулли, а верифицируется экспериментально на основе устойчивости частот.

2. Однако поскольку нет оснований считать А.Н. Колмогорова последовательным сторонником частотной интерпретации, постольку имеет право на существование предположение французских математиков, состоящее в том, что условие А Колмогорова оказывается заключением теоремы Бернулли. Если в эмпирической интерпретации применение теоремы Бернулли основано на верификации геометрической близости вероятности и частотных характеристик изучаемого события и если последняя имеет место, то колмогоров-

ское условие А выводимо. Так как в субъективистской интерпретации не предполагается проведения реальных наблюдений с целью анализа частотных характеристик изучаемого события и осуществления верификации устойчивости частотных характеристик, вывод условия А, сделанный в этой интерпретации, не считается обоснованным в частотной интерпретации.

3. Борель, Леви и другие критики Колмогорова не принимали во внимание такое общее соображение, которое состоит в том, что определение причинного описания на основе формального вывода предполагает включение этого причинного описания в посылки рассуждения. В данном случае это означает следующее: получение вероятностной оценки геометрической близости вероятности и частот события предполагает, что имеются основания считать геометрическую близость была выявленной, что, по нашему мнению, задано в условии А Колмогорова.

4. Так как ни одна интерпретация не является универсальной, то актуальна проблема синтеза основных вероятностных интерпретаций. По крайней мере, частично она решена Шейфером [10], критика неуниверсального характера этого подхода дана в работах Н. Картрайт [7].

Литература

1. *Алимов Ю.И.* Альтернатива методу математической статистики. – М.: Знание, 1980.

2. *Колмогоров А.Н.* Основные понятия теории вероятностей. – М.: Наука, 1974.

3. *Курно А.* Основы теории шансов и вероятностей. – М: Наука, 1970.

4. *Мизес Р.* Вероятность и статистика. М.-Л: Гостехиздат, 1930.

5. *Хинчин А.Я.* Частотная теория Р. Мизеса и современные идеи теории вероятностей // Вопросы философии. – 1961. – Vol. 1, № 1. P. 91–102.

6. *Тутубалин В.Н.* Теория вероятностей. – М: Академия, 2008.

7. *Cartwright N.* The dappled world. A Study of the boundaries of science. – Cambridge; New York: Cambridge University Press, 2001.

8. *Hacking I.* Logic of statistical inference. – Cambridge: Cambridge University Press, 1965.

9. *Kolmogorov A. N.* Foundations of the theory of probability. – New York: Chelsea Publishing Company, 1956.

10. *Shafer G.* The art of causal conjecture. – Cambridge: MIT Press, 1996.

11. *Shafer G., Vovk V.* Probability and Finance It's Only a Game! – N.Y.:A Wiley-Interscience Publication, 2001.

12. *Shafer G., Vovk V.* The Sources of Kolmogorov's Grundbegriffe // Statistical Science. – 2006. – Vol. 21, № 1. P. 70–98.

References

1. *Alimov, Yu.I.* (1980). Alternativa metodu matematicheskoy statistiki [An Alternative to the Method of Mathematical Statistics]. Moscow, Znanie Publ.

2. *Kolmogorov, A.N.* (1974). Osnovnye ponyatiya teorii veroyatnostey [Foundations of the Theory of Probability]. Moscow, Nauka Publ.

3. *Cournot, A*. (1970). Osnovy teorii shansov i veroyatnostey [Exposition of the Theory of Chances and Probabilities]. Moscow, Nauka Publ. (In Russ.).

4. *Mises, R*. (1930). Veroyatnost i statistika [Probability and Statistics]. Moscow & Leningrad, Gostekhizdat Publ. (In Russ.).

5. *Khinchin, A.Ya.* (1961). Chastotnaya teoriya R. Mizesa i sovremennye idei teorii veroyatnostey [R. Mises' frequency theory and contemporary ideas of the probability theory]. Voprosy filosofii [Problems of Philosophy], Vol. 1, No. 1, 91–102.

6. *Tutubalin, V.N.* (2008). Teoriya veroyatnostey [Theory of Probabilities]. Moscow, Akademiya Publ.

7. *Cartwright, N.* (2001). The Dappled World. A Study of the Boundaries of Science. Cambridge & New York, Cambridge University Press.

8. *Hacking, I.* (1965). Logic of Statistical Inference. Cambridge, Cambridge University Press.

9. *Kolmogorov, A.N.* (1956). Foundations of the Theory of Probability. New York, Chelsea Publishing Company.

10. *Shafer, G.* (1996). The Art of Causal Conjecture. Cambridge, MIT Press.

11. *Shafer, G. & V. Vovk.* (2001). Probability and Finance It's Only a Game! New York, Wiley-Interscience.

12. *Shafer, G. & V. Vovk.* (2006). The sources of Kolmogorov's Grundbegriffe. Statistical Science, 21 (1), 70–98.

Информация об авторе

Резников Владимир Моисеевич – кандидат философских наук, доцент, старший научный сотрудник Института философии и права СО РАН (630090, Новосибирск, ул. Николаева, 8); доцент кафедры логики и методологии науки Новосибирского национального исследовательского государственного университета (630090, Новосибирск, ул. Пирогова 2, e-mail: mathphil1976@gmail.com).

Information about the author

Reznikov Vladimir Moiseevich – Candidate of Sciences (Philosophy), Associate Professor, Senior Researcher at the Institute of Philosophy and Law, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (8, Nikolaev st., Novosibirsk, 630090, Russia); Associate Professor at the Department of Logic and Methodology of Science, Novosibirsk National Research State University (2, Pirogov st., Novosibirsk, 630090, Russia, e-mail: mathphil1976@gmail.com).

Дата поступления 17.02.2018