

УДК 532.528

## **Исследование структуры вихревого следа при отрывном обтекании пластинки**

**Д.Н. Горелов, А.И. Говорова**

*Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН*

E-mail: [gorelov@ofim.oscsbras.ru](mailto:gorelov@ofim.oscsbras.ru), [govorovaai@mail.ru](mailto:govorovaai@mail.ru)

Рассмотрена плоская нелинейная начально-краевая задача об отрывном обтекании пластинки, начавшей движение с постоянной скоростью из состояния покоя. Приведены результаты численного эксперимента, позволившие детально проследить процесс формирования вихревого следа за вертикальной пластинкой. Показано, что после начала движения за пластинкой последовательно формируются несколько устойчивых вихревых структур, включая дорожку Кармана. Обнаружено, что с появлением дорожки Кармана возникает резкий и существенный рост интенсивности вихревого следа и силы гидродинамического сопротивления с пульсирующим характером изменения с течением времени. Сделан вывод о возникновении на этом режиме автоколебаний жидкости около пластинки.

**Ключевые слова:** отрывное обтекание пластинки, автоколебания вихревых следов, дорожка Кармана.

Обтекание тел жидкостью происходит обычно с отрывом потока. При этом за телом образуются вихревые структуры, которые эволюционируют с течением времени. Эти вихревые структуры порождают на теле силы сопротивления, которые могут быть существенно больше сил вязкого трения, особенно при больших числах Рейнольдса. При теоретическом исследовании отрывного обтекания тел широко применяется модель плоского нестационарного течения идеальной несжимаемой жидкости. В рамках этой модели получено большое количество результатов, в частности, при исследовании отрывного обтекания пластинки, начавшей движение с постоянной скоростью из состояния покоя.

Теоретические исследования этой задачи берут начало с середины прошлого столетия и продолжают до сих пор. Такой стойкий интерес к этой задаче можно объяснить тем, что пластинка является наиболее простым геометрическим телом, для которого построено много решений различных задач гидродинамики. Поэтому пластинка стала удобным объектом для апробации и сравнительной оценки методов решений, способов моделирования, технологии вычислений и исследования гидродинамического взаимодействия вихревых структур с обтекаемым телом. Наиболее важными представляются задачи моделирования вихревых структур и способы решения нелинейной начально-краевой задачи нестационарного отрывного

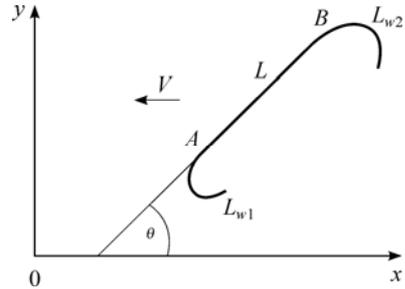
обтекания пластинки. В общем случае задачи нестационарного обтекания тел являются нелинейными задачами с неизвестными границами области решения, которые изменяются с течением времени. Для решения таких задач была предложена процедура дискретизации по времени [1]. Применение этой процедуры позволило исходную нелинейную краевую задачу свести к последовательному решению линейных краевых задач на каждом шаге по времени. В свою очередь, процедура дискретизации по времени позволила моделировать вихревые структуры системами дискретных особенностей. Для моделирования вихревых следов в двумерных задачах нестационарного обтекания тел была предложена модель точечного дискретного вихря, которая в течение длительного времени широко и успешно применяется для решения многих задач гидродинамики [2, 3]. Каждый способ моделирования вихревых структур нуждается в создании собственных технологий вычисления. Наиболее полно эти технологии проработаны в методе дискретных вихрей. Но и в этом методе ряд вопросов остается без ответа. К одному из них относится выбор шага по времени в задаче отрывного обтекания наклонной пластинки. В этом случае скорости изменения гидродинамических характеристик вблизи кромок пластинки могут существенно различаться при одном шаге по времени. Проблемой остается и расчет координат свободных дискретных вихрей, сходящих с кромок пластинки. Вопросы технологии вычислений обсуждаются во многих работах. Представляет интерес доклад на симпозиуме в Карлсруе [4], в котором проведен сравнительный анализ решений задачи отрывного обтекания наклонной пластинки, полученных разными авторами и разными методами. Приведенные данные показали большой разброс результатов расчета сил сопротивления, особенно для вертикальной пластинки. Причины такого разброса результатов расчета до сих пор не установлены.

Среди первых исследований отрывного обтекания пластинки особое место занимают работы С.М. Белоцерковского и его учеников. Основные результаты этих исследований представлены в трудах [5–9], в которых метод дискретных вихрей применен для детального изучения структуры вихревых следов и их влияния на гидродинамические реакции. Исследования в этом направлении продолжают до сих пор [10–12]. У авторов наибольший интерес вызвала работа [12], в которой было обнаружено резкое увеличение силы сопротивления вертикальной пластинки с некоторого момента времени после начала ее движения. Объяснить этот эффект удалось в настоящей работе. Оказалось, что внезапный рост гидродинамического сопротивления вызван автоколебаниями вихревого следа вблизи пластинки после формирования вихревых структур типа дорожки Кармана. Авторы обнаружили этот эффект не только для вертикальной, но и для наклонной пластинки. Результаты получены путем детального исследования формирования вихревых следов за пластинкой с течением времени после начала ее движения из состояния покоя.

### Постановка начально-краевой задачи

Рассмотрим двумерное отрывное нестационарное обтекание наклонной пластинки, начавшей движение с постоянной скоростью  $V$  из состояния покоя. Введем систему координат  $Oxy$ , в бесконечно удаленной точке которой жидкость покоится (рис. 1). Жидкость полагаем идеальной и несжимаемой. В таком течении циркуляция скорости вокруг пластинки изменяется во времени, что приводит к появлению вихревых следов, сходящих с кромок  $A, B$ . Пластинку и вихревые следы моделируем бесконечно тонкими вихревыми слоями  $L, L_{w1}, L_{w2}$ . Начально-краевая задача ставится для комплексной скорости  $\bar{v}(z, t)$  в плоскости комплексной переменной  $z = x + iy$ . Представим комплексную скорость рассматриваемого течения в виде:

Рис. 1. Отрывное обтекание пластинки.



$$\bar{v}(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L(t)} \frac{\gamma(s, t) ds}{z - \zeta(s, t)} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^2 \int_{L_{wj}(t)} \frac{\gamma_{wj}(\sigma, t) d\sigma}{z - \zeta_w^{(j)}(\sigma, t)},$$

$$\zeta(s, t) \in L(t), \zeta_w^{(j)}(\sigma, t) \in L_{wj}(t), \quad (1)$$

здесь  $\gamma(s, t)$  — интенсивность вихревого слоя, моделирующего контур  $L(t)$ ,  $\gamma_{wj}(\sigma, t)$  — интенсивность

вихревых следов,  $s, \sigma$  — дуговые координаты. Интегрирование по контуру  $L(t)$  в формуле (1) ведется по часовой стрелке, а на вихревых следах дуговая координата отсчитывается от точки схода вихрей с  $L(t)$  вдоль каждого вихревого следа  $L_{wj}(t)$ .

Границами области течения являются контуры  $L, L_{w1}, L_{w2}$  и бесконечно удаленная точка  $|z| = \infty$ . Граничные условия имеют вид:

условие непротекания жидкости через пластинку —

$$\text{Im} \left\{ [\bar{v}(z, t) - \bar{u}] e^{i\theta} \right\} = 0, \quad z \in L,$$

$$\bar{u} = 0, t < 0; \bar{u} = -V, t \geq 0, \quad (2)$$

условие затухания возмущенных скоростей в бесконечно удаленной точке —

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} v(z, t) = 0, \quad (3)$$

условие непрерывности давления  $p$  и нормальной составляющей скорости жидкости  $v_n$  при переходе через вихревые следы —

$$[p(x, y, t)] = 0, [v_n(x, y, t)] = 0, (x, y) \in L_{wj}, j = 1, 2, \quad (4)$$

здесь квадратные скобки определяют разрыв соответствующих функций. Отметим, что условия (4) выполняются, если точки вихревого следа перемещаются свободно вместе с жидкостью. Условие (3) выполняется в соответствии с представлением комплексной скорости формулой (1).

Начальные условия задачи имеют вид:

$$\bar{v}(z, t) = 0, t = 0. \quad (5)$$

Задача (1)–(5) является нелинейной. Это обусловлено тем, что границы области течения (вихревые следы) заранее неизвестны и определяются в процессе решения задачи.

### Расчет гидродинамических реакций

Решение кинематической задачи (1)–(5) позволяет определять поле давления в области течения жидкости и гидродинамические реакции на пластинку. Перепад гидродинамического давления в точках пластинки определяется интегралом Коши–Лагранжа, который в случае отрывного обтекания принимает вид [13, 14]

$$\Delta p(s, t) = -\rho [v_{rs}(s, t) \gamma(s, t) + (d\Gamma(s, t)/dt) + w_1(t) \gamma_{w1}(0, t)], \quad s \in (0, l), \quad (6)$$

здесь  $\rho$  — плотность жидкости,  $v_{\tau s}$  — касательная составляющая относительной скорости жидкости,  $d\Gamma(s, t)$  — циркуляция скорости вдоль элемента  $(0, s)$  на пластинке,  $l$  — длина пластинки. Можно показать, что выражение (6) удовлетворяет условию равенства нулю перепада давления на кромках пластинки.

Задача (1)–(5) решалась методом дискретных вихрей по разработанному ранее алгоритму [15, 16]. Этот алгоритм включает в себя расчет интенсивностей вихрей  $\gamma_{w1}, \gamma_{w2}$  и скорости их схода  $w_1, w_2$  в вихревые следы  $L_{w1}, L_{w2}$ , координаты свободных дискретных вихрей, сходящих с кромок пластинки, коэффициент силы сопротивления  $c_x$  и распределение перепада давления  $\Delta c_p$  вдоль пластинки. Такой объем информации позволяет подробно исследовать процесс формирования вихревых следов и их влияние на гидродинамические реакции, действующие на пластинку. Коэффициент силы сопротивления  $c_x(t)$  и перепад гидродинамического давления  $\Delta c_p(s, t)$  введены следующим образом:

$$R_x(t) = -\sin \theta \int_0^l \Delta p(s, t) ds,$$

$$c_x(t) = 2R_x(t)/(\rho V^2 l), \quad \Delta c_p(s, t) = 2\Delta p(s, t)/(\rho V^2), \quad s \in [0, l],$$

где  $R_x(t)$  — сила сопротивления, действующая на пластинку вдоль оси  $Ox$ .

Для перехода к безразмерным функциям, координатам и времени выберем в качестве характерных физических величин следующие:  $V$  — скорость движения пластинки,  $l$  — длина пластинки,  $T = l/V$  — время прохождения пластинкой расстояния, равного ее длине. Точность решения системы уравнений (1)–(5) методом дискретных вихрей зависит от числа элементов вихревого слоя на пластинке  $N$  и безразмерного шага по времени  $\Delta\tau = 1/N_t$ ,  $\tau = t/T$ . Путем предварительного анализа были выбраны значения  $N = N_t = 50$ .

Численный эксперимент проводился с целью исследования особенностей формирования вихревых следов и их влияния на силу сопротивления при отрывном обтекании пластинки. Расчет проводился для разных углов установки пластинки  $\theta$  к потоку. Безразмерное время изменялось в диапазоне  $0 < \tau < 100$ . За это время пластинка перемещалась на 100 единиц своей длины. В процессе численного эксперимента был получен большой объем информации, которую трудно изложить в рамках одной статьи. Наиболее интересные результаты получены для угла установки  $\theta = 90^\circ$ . Они представлены на рис. 2–5.

Зависимость коэффициента сопротивления  $c_x$  от безразмерного времени приведена на рис. 2. Эта зависимость оказалась настолько неожиданной, что авторы решили проверить

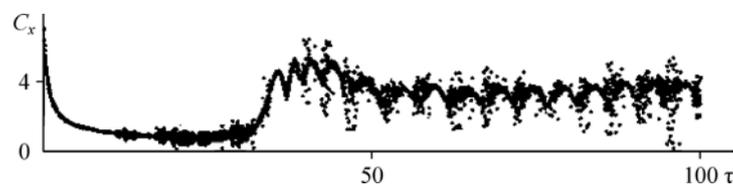


Рис. 2. Зависимость коэффициента сопротивления  $c_x$  от времени  $\tau$  для  $\theta = 90^\circ$ .

результаты расчетов с тем, чтобы исключить возможность ошибки. Вместе с тем, результаты работы [12] для угла  $\theta = 90^\circ$  хорошо соответствовали полученным данным. Неожиданным оказался резкий рост коэффициента сопротивления после прохождения пластинкой расстояния около 30 единиц ее длины. На меньших расстояниях от начала движения пластинки наблюдается плавное падение силы сопротивления почти до нулевого уровня. Для выяснения физических причин этого явления был проведен расчет формы вихревых следов за пластинкой для разных значений времени. Результаты расчета представлены на рис. 3. Темные точки соответствуют вихрям с положительной интенсивностью (вращение против часовой стрелки), а светлые точки — вихрям с отрицательной интенсивностью. Приведенные данные показывают, что за вертикально установленной пластинкой в течение длительного промежутка времени сохраняется устойчивая симметричная вихревая структура. При этом вихревой след не сносится внешним потоком, а концентрируется за пластинкой, образуя область с гладкой внешней границей. Такая хорошо обтекаемая форма следа приводит к низкому уровню гидродинамического сопротивления пластинки. По мере возрастания размеров этой симметричной области ослабевает ее связь с пластинкой, что приводит к неустойчивости следа. Наблюдается переходный режим, который приводит к новой устойчивой вихревой структуре типа дорожки Кармана. Сравнение расчетных данных, приведенных на рис. 2, 3 показывает, что возникновение вихревой структуры типа дорожки Кармана происходит практически одновременно с резким ростом гидродинамического сопротивления. Этот результат заслуживает более детального рассмотрения.

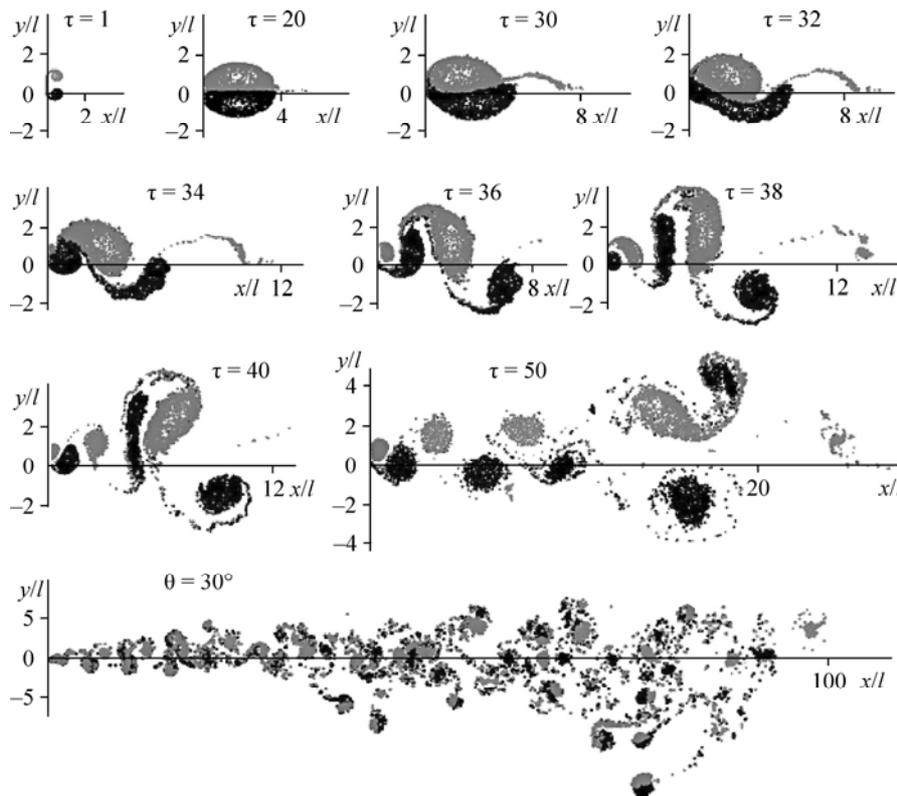


Рис. 3. Изменение структуры вихревых следов за пластинкой с течением времени для  $\theta = 90^\circ$ .

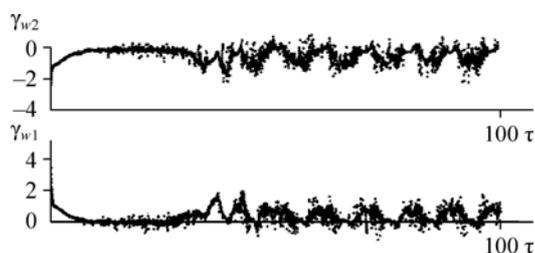


Рис. 4. Зависимость интенсивностей  $\gamma_{w1}, \gamma_{w2}$  сходящихся вихрей от времени  $\tau$  для  $\theta = 90^\circ$ .

Через некоторое время после образования дорожки Кармана в процессе формирования вихревого следа за ней образуется новая вихревая структура, состоящая из пар вихревых ядер, расположенных друг над другом. Эти новообразовавшиеся вихревые структуры удалены достаточно далеко от пластинки и определяются, видимо, внутренними закономерностями формирования вихревых структур. Численный эксперимент показывает не хаотичность, а устойчивость и внутреннюю организованность вихревых структур в вихревом следе за пластинкой.

Вихревые следы возникают за счет схода вихрей с кромок пластинки. Поэтому процесс формирования следов зависит от изменения по времени интенсивностей вихрей  $\gamma_{w1}, \gamma_{w2}$ , сходящихся с кромок пластинки. Соответствующие результаты расчета даны на рис. 4. Характер изменения во времени интенсивности сходящихся вихрей имеет те же особенности, что и зависимость  $c_x(\tau)$  на рис. 2. В начальной стадии движения пластинки интенсивности вихрей убывают по модулю практически до нуля, а затем резко возрастают и начинают пульсировать с большой амплитудой. Такой характер изменения интенсивностей сходящихся вихрей позволяет сделать вывод о наличии автоколебаний жидкости в области течения вблизи пластинки. Эти автоколебания возникают через некоторое время после начала движения пластинки. Численный эксперимент показывает, что автоколебания, появление дорожки Кармана, рост интенсивности вихревых следов и силы сопротивления возникают в одно и то же время после начала движения пластинки. Процесс автоколебаний включает в себя образование вихревых ядер за счет вихрей, сходящихся с кромок пластинки, и пополнение этими ядрами дорожки Кармана.

Аналогичные особенности, включая режим автоколебаний, имеют вихревые следы за наклонной пластинкой. При этом с уменьшением угла установки происходит сужение дорожки Кармана и более быстрое ее появление после начала движения пластинки. Характер изменения интенсивностей вихревых следов и резкого роста силы сопротивления не изменяется.

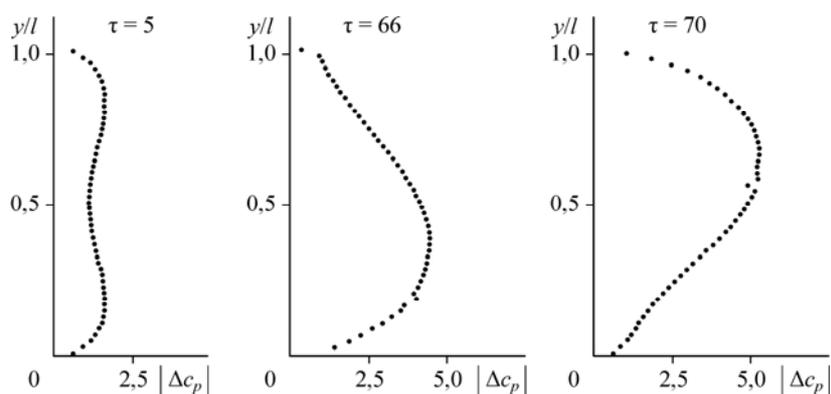


Рис. 5. Распределение перепада давления на пластинке для  $\theta = 90^\circ$ .

Характерной особенностью, наблюдаемой в опыте дорожки Кармана, является расположение вихревых ядер в виде двух параллельных цепочек. В обеих цепочках расстояния между соседними ядрами одинаковы. При этом ядра в одной цепочке располагаются посередине между ядрами другой цепочки. Интенсивности вихрей в цепочках одинаковы по модулю и изменяют знак при переходе из одной цепочки в другую. Наряду с реализуемой в эксперименте дорожкой Кармана широко исследовалась ее теоретическая модель, состоящая из двух бесконечно длинных цепочек точечных вихрей. Была доказана устойчивость дорожки Кармана в теоретической модели, если отношение ширины дорожки ( $h$ ) к расстоянию между соседними вихрями в каждой цепочке ( $d$ ) равно  $h/d = 0,28$  [17]. В проведенном численном эксперименте дорожка Кармана имеет ограниченные размеры. Данные, представленные на рис. 2, 3, позволяют оценить величину отношения  $h/d$  для рассматриваемой расчетной дорожки Кармана. Оказалось, она изменяется в интервале  $0,25 < h/d < 0,35$ , что мало отличается от значения этого отношения для теоретической дорожки.

Сила сопротивления определяется перепадом давления на пластинке. Автоколебания жидкости вблизи пластинки создают незатухающие пульсации давления и силы сопротивления. Поэтому характер изменения коэффициента  $c_x$  во времени на рис. 2 подтверждает вывод об автоколебаниях вихревых следов вблизи пластинки.

Интересно отметить, что при отрывном обтекании пластинки, установленной вертикально, период пульсаций интенсивности вихревых следов  $T_w$  в два раза больше периода пульсаций  $T_p$  коэффициента  $c_x$  (рис. 2, 4). Это вызвано гидродинамическим взаимодействием вихревых ядер в дорожке Кармана при наличии пластинки. Вихревые ядра с разным знаком интенсивности образуются попеременно вблизи кромок пластинки. Поэтому через каждую половину периода  $T_w$  за пластинкой оказывается то верхнее, то нижнее вихревое ядро. Такие перемещения вихревых ядер создают всплески перепада давления на пластинке (рис. 5), что приводит к пульсациям коэффициента  $c_x$  с удвоенной частотой.

Представляется интересным определить число Струхалия  $Sh$ , характеризующее уровень нестационарности движения жидкости, на режиме автоколебаний. Период пульсаций жидкости вблизи пластинки совпадает в этом случае с периодом пульсаций  $T_p$  давления на пластинке и силы сопротивления. Поэтому число Струхалия можно определять выражением

$$Sh = \frac{l}{VT_p} = \frac{T}{T_p}.$$

В соответствии с данными рис. 2 число Струхалия на режиме автоколебаний жидкости около пластинки, установленной под углом  $\theta = 90^\circ$ , имеет значение  $Sh = 0,2$ , что соответствует результатам, приведенным в работах [9, 10].

### Заключение

Разработанный ранее авторами алгоритм решения нелинейной начально-краевой задачи отрывного обтекания пластинки, начавшей движение из состояния покоя, позволил детально исследовать процесс формирования вихревых следов за пластинкой при произвольном угле ее наклона. В статье приведены данные расчета для вертикальной пластинки. В этом случае обнаружено, что с течением времени за пластинкой последовательно формируются несколько устойчивых вихревых структур. В начальные моменты времени образуется симметричная вихревая структура, имеющая форму хорошо обтекаемого тела. На этой стадии движения пластинки гидродинамическое сопротивление монотонно убывает практически до нуля.

Вместе с сопротивлением уменьшается и интенсивность вихрей, сходящих с кромок пластинки. На следующей стадии движения пластинки возникает новая устойчивая вихревая структура типа дорожки Кармана. Появление дорожки Кармана вызывает интенсивные пульсации и резкий существенный рост гидродинамического сопротивления и интенсивности сходящих вихрей. Расчетные значения геометрических параметров дорожки Кармана и числа Струхала на этом режиме хорошо согласуются с данными других исследований. Авторы полагают, что внезапный рост силы гидродинамического сопротивления вызван процессом автоколебаний жидкости около пластинки. Аналогичные результаты получены и для наклонной пластинки.

### Список литературы

1. **Giesing J.P.** Nonlinear two-dimensional unsteady potential flow with lift // *J. Aircraft*. 1968. Vol. 5, No. 2. P. 135–143.
2. **Djojodiharjo R.H., Widnall S.E.** A numerical method for the calculation of nonlinear unsteady lifting potential flow problems // *AIAA J.* 1969. Vol. 7, No. 10. P. 2001–2009.
3. **Сарпкаяя Т.** Вычислительные методы вихрей. Фримановская лекция 1988 // *Современное машиностроение*. Серия А. 1989. № 10. С. 1–60.
4. **Maull D.J.** An introduction to the discrete vortex method // *Practical Experiences with Flow-Induced Vibration: Symposium Karlsruhe, Germany, September 3–6, 1978, University of Karlsruhe*. Berlin–Heidelberg–New York–Springer–Verlag, 1980. P. 769–785.
5. **Белоцерковский О.М.** Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984. 519 с.
6. **Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.** Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985. 256 с.
7. **Белоцерковский С.М.** Основные идеи методов дискретных вихрей и дискретных особенностей // *Вопросы кибернетики*. 1986. Вып. 124: Численный эксперимент в прикладной аэрогидродинамике. С. 3–23.
8. **Белоцерковский С.М., Котовский В.Н., Ништ М.И., Федоров Р.М.** Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания. М.: Наука, 1988. 231 с.
9. **Белоцерковский С.М., Ништ М.И.** Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1985. 239 с.
10. **Скобелев Б.Ю., Шмагунов О.А.** Новый подход к моделированию вязкости в методе дискретных вихрей // *Вычислительные технологии*. 2007. Т. 12, № 5. С. 116–125.
11. **Jones M.A.** The separated flow of an inviscid fluid around a moving at plate // *J.Fluid Mech.* 2003. Vol. 496. P. 405–441.
12. **Головенко А.Д., Голубев С.А.** О некоторых особенностях нестационарных течений // *Вестник Харьковского нац. ун-та*. 2011. № 960. С. 76–87.
13. **Горелов Д.Н.** Расчет давления на контур на режимах нестационарного отрывного обтекания // *Прикл. механика и технич. физика*. 2008. Т. 49, № 3. С. 109–113.
14. **Горелов Д.Н.** Нелинейная теория крыла в плоском нестационарном потоке. Омск: Полиграфический центр КАН, 2013. 142 с.
15. **Горелов Д.Н., Говорова А.И.** Моделирование начальной стадии отрывного обтекания разомкнутого контура методом дискретных вихрей // *Вычислительные технологии*. 2010. Т. 15, № 5. С. 24–33.
16. **Говорова А.И.** Численное исследование отрывного нестационарного обтекания пластинки // *Вестник Омского университета*. 2013. № 2. С. 10–15.
17. **Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.** Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М: Физматгиз, 1963. 584 с.

*Статья поступила в редакцию 22 апреля 2016 г.,  
после доработки — 21 июня 2016 г.*