

УДК 532.517.4

POD анализ ближнего поля турбулентной круглой струи при смешении газов различной плотности*

В.А. Иващенко, Е.В. Палкин, В.О. Рыженьков, Р.И. Мулляджанов

*Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет*

E-mail: v.ivashchenko@g.nsu.ru

Исследуется турбулентная круглая струя с переменной плотностью, обусловленной смешением воздуха с газами различной плотности: воздухом, гелием и углекислым газом. Число Рейнольдса фиксировано для всех случаев: $Re = 5300$. При помощи собственного ортогонального разложения и данных прямого численного моделирования проведен сравнительный анализ трех рассматриваемых газов и показано, что при уменьшении плотности окружающего газа уменьшается частота образования когерентных структур, а также уменьшается и количество POD-мод, необходимых для построения низкоразмерной модели течения.

Ключевые слова: турбулентность, струи, прямое численное моделирование (DNS), собственное ортогональное разложение (POD).

Введение

Турбулентные струйные течения являются классическим объектом исследования в гидродинамике, которому посвящено множество работ. В работе [1] был представлен достаточно полный обзор исследований круглых турбулентных струй, включающий описание осредненных характеристик, структуры и динамики когерентных вихрей. Большое количество визуализаций различных неустойчивостей в таких струях приведено в книге [2].

На практике чаще всего реализуются течения жидкости и газа с переменной плотностью, что существенно влияет на процессы перемешивания, теплообмена и ряд других явлений [3]. В работах [4, 5] с целью анализа автомоделных характеристик дальнего поля изучалась струя воздуха с гелием, истекающая в воздушное пространство. Аналогичные исследования различных газов были проведены в работах [6–10], они позволили выявить влияние переменной плотности на основные осредненные по времени характеристики. В работе [11] были выполнены эксперименты по измерению струй с гелием, воздухом и углекислым газом, вытекающих в воздушное пространство. Полученные данные были успешно использованы, в частности, для верификации расчетов методом крупных вихрей (Large Eddy Simulations, LES), проведенных в работе [12].

* Работа частично поддержана РФФИ (гранты № 18-38-20167 и № 19-08-01227), разработка вычислительного кода выполнена в рамках государственного задания ИТ СО РАН.

В работах [13] и [14] исследовалось влияние переменной плотности соответственно на устойчивость круглых струй и на характеристики закрученных струй.

В связи с быстрым развитием компьютерных технологий наряду с развитием экспериментальных техник исследования турбулентности [15, 16] стало возможным применение различных методик анализа и визуализации вихревых структур, например, с помощью собственного ортогонального разложения (POD). POD-анализ является современным методом статистического анализа турбулентных потоков. Он позволяет идентифицировать наиболее энергетичные вихревые структуры в потоке (моды), которые определяют динамику течения [17]. Таким образом, если просуммировать несколько мод, содержащих около 90 % от общей турбулентной кинетической энергии, можно с некоторой точностью построить низкоразмерную модель течения. Подобные модели используются при проектировании энергетического оборудования [18]. В настоящей работе используется вариант разложения, предложенный автором [19]. Он основан на сингулярном разложении матрицы, составленной из полей скорости в различные моменты времени с равным шагом по времени. В литературе можно встретить различные варианты применения метода POD для исследования различных аспектов турбулентного струйного течения, таких как поля давления [20], акустических эффектов [21, 22], вихревых структур в струях в поперечном потоке [23] и в закрученных струях [24] и т. д. Настоящая работа направлена на исследование влияния переменной плотности в турбулентных струях на развитие неустойчивостей в них, поскольку несмотря на многообразие существующих работ этот вопрос до конца не изучен.

Уравнения движения и собственное ортогональное разложение

Для исследования характеристик струй переменной плотности рассматриваются безразмерные уравнения Навье–Стокса в приближении малого числа Маха [25], которое соответствует ситуации, когда характерная скорость в потоке много меньше скорости звука в среде:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho^*} \cdot \frac{D\rho^*}{Dt}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad (2)$$

где u_i — компоненты вектора поля скорости, ρ^* — плотность, безразмерная на $\rho_{\text{возд}}$, $f_{\text{возд}}$ — плотность воздуха, p — давление,

$$\tau_{ij} = \mu^* \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \quad (3)$$

является тензором вязких напряжений, μ^* — динамическая вязкость, безразмерная на $\mu_{\text{возд}}$, $\text{Re} = \rho_{\text{возд}} \cdot U \cdot D / \mu_{\text{возд}}$ — число Рейнольдса, построенное по среднерасходной скорости, характерному размеру, плотности и динамической вязкости воздуха. Также, поскольку в работе рассматриваются течения переменной плотности в результате смешения воздуха с гелием или углекислым газом, необходимо привести уравнения переноса поля концентрации и состояния:

$$\rho^* \left(\frac{\partial c}{\partial t} + u_j \frac{\partial c}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{\text{ReSc}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho^* \frac{\partial c}{\partial x_j} \right), \quad (4)$$

$$\rho^* = \left(\frac{\rho_{\text{возд}}}{\rho_{\text{газ}}} + c \left(1 - \frac{\rho_{\text{возд}}}{\rho_{\text{газ}}} \right) \right), \quad (5)$$

где c — поле концентрации, $\rho_{\text{возд}}$ и $\rho_{\text{газ}}$ — плотности воздуха и газа соответственно, $Sc = \mu_{\text{возд}} / (\rho_{\text{возд}} D_{\text{дифф}})$ — число Шмидта, построенное по вязкости и плотности воздуха и по коэффициенту взаимной диффузии двух газов $D_{\text{дифф}}$. При $c = 0$ значение безразмерной плотности смеси составляет $\rho_{\text{смеси}} / \rho_{\text{возд}} = \rho^* = \rho_{\text{газ}} / \rho_{\text{возд}}$, что в размерных терминах означает присутствие в рассматриваемом объеме только газа, а при $c = 1$ только воздуха, так как в этом случае $\rho_{\text{смеси}} / \rho_{\text{возд}} = \rho^* = 1$. Вязкость газовой смеси задается в соответствии с формулой [26]

$$\mu^* = \sum_{j=1}^n \frac{X_j \mu_j^*}{X_j + \sum X_j \Phi_{jk} - X_j \Phi_{jj}}, \quad (6)$$

где X_j — мольная доля j -й компоненты, μ_j^* — безразмерная динамическая вязкость j -й компоненты,

$$\Phi_{jk} = \frac{1}{4} \left(1 + \left(\frac{\mu_j}{\mu_k} \right)^{1/2} \left(\frac{M_k}{M_j} \right)^{1/4} \right)^2 \cdot \left(\frac{2M_k}{M_j + M_k} \right)^{1/2}, \quad (7)$$

где M_j — молярная масса соответствующей компоненты, выражает коэффициенты, характеризующие взаимодействие двух компонент смеси.

В работе также используется декомпозиция Рейнольдса, заключающаяся в разложении мгновенных величин на сумму средних и пульсаций. Осреднение по времени обозначается вертикальной линией над переменной. Пример разложения для поля скорости: $u_j = \overline{u_j} + u'_j$.

Одним из наиболее популярных методов условного осреднения и идентификации вихревых (когерентных) структур является метод собственного ортогонального разложения, который впервые был предложен Ламли [17]. Его идея заключается в нахождении оптимального эмпирического базиса η_i , который наилучшим образом описывает наблюдаемые реализации исследуемой функции $u(\vec{x})$. Определим скалярное произведение двух произвольных функции $f(\vec{x})$ и $g(\vec{x})$:

$$(f \cdot g) = \int_V f(\vec{x}) g^*(\vec{x}) dV, \quad (8)$$

где $*$ обозначает комплексное сопряжение, а V соответствует рассматриваемому объему. Оптимальность базиса $\eta_i(\vec{x})$ означает, что ряд с некоторыми коэффициентами

$\sum_{i=1}^N a_i \eta_i(\vec{x})$ наиболее близок к $u(\vec{x})$ по сравнению с любым рядом, составленным из дру-

гих базисных функций $\tilde{\eta}_i(\vec{x})$. Выражение «наиболее близок» будем понимать в среднеквадратичном смысле. Математически это условие сводится к минимизации следующего выражения путем подбора соответствующих базисных функций:

$$\min \left\langle \left\| u - \frac{(u \cdot \eta)}{\|\eta\|^2} \eta \right\|^2 \right\rangle, \quad (9)$$

где запись в виде $\|f\| = (f \cdot f)^{1/2}$ обозначает норму некоторой функции f , а $\langle \dots \rangle$ — осреднение по ансамблю возможных реализаций u . Выражение (9) можно переписать как

$$\max \frac{\langle |u \cdot \eta|^2 \rangle}{\|\eta\|^2}. \quad (10)$$

Таким образом, при нормировке базисных функций $\|\eta\|^2 = 1$ задача сводится к максимизации $\langle |(u, \eta)|^2 \rangle$. Соответствующий функционал для такой вариационной задачи имеет вид

$$J[\eta] = \langle |u \cdot \eta|^2 \rangle - \sigma_p (\|\eta\|^2 - 1), \quad (11)$$

где σ_p — соответствующий множитель Лагранжа.

Поиск экстремума функционала J приводит к уравнению

$$K\eta = \sigma_p \eta, \quad (12)$$

где

$$K\eta = \langle (\eta \cdot u)u \rangle, \quad (13)$$

Таким образом, $\eta(\bar{x})$ и σ_p представляют собой собственные функции и собственные значения оператора K . Также можно убедиться, что этот набор соответствует максимуму функционала (11), проверив, что $\frac{d^2 J[\eta]}{d\eta^2} \leq 0$, тем самым выполняется условие (10).

Более подробное математическое обоснование представлено в работе [27]. Указанные функции называются эмпирическими собственными функциями или POD-модами. Аналогичный вывод можно получить и для векторного поля, например, $\vec{u}(\bar{x})$.

Экономичной реализацией задачи на собственные значения является метод кадров (method of snapshots), который был предложен в работе [19] и который используется в представленной работе.

Вычислительные детали и постановка задачи

Для численного решения уравнений (1)–(4) применяется вычислительный код Nek5000 [28]. В его основе лежит метод спектральных элементов (Spectral Element Method, SEM), в котором решение и данные представлены в виде разложения по многочленам N -го порядка внутри каждого гексагонального элемента [29]. В настоящей работе используется $N = 10$. Метод спектральных элементов отличается малой величиной численной дисперсии и диссипации, что важно при расчете эволюции гидродинамических неустойчивостей [30, 31], а также для случаев, когда числа Рейнольдса достаточно высоки. Спектральная точность означает экспоненциальное уменьшение ошибки с ростом количества вычислительных узлов. Дискретизация по времени происходит при помощи формулы «дифференцирования назад» третьего порядка и метода расщепления, который детально описывался в работе [32]. В рамках пространственной дискретизации в каждом спектральном элементе переменные задачи раскладываются по базису, состоящему из интерполяционных полиномов Лагранжа.

В представленной работе рассматривается струя воздуха при фиксированном числе Рейнольдса $Re = \rho_{\text{возд}} \cdot U \cdot D / \mu_{\text{возд}} = 5300$, истекающая в пространство, затопленное другим газом (воздухом, гелием или углекислым газом). В начальный момент времени газ

Таблица

Параметры используемых газов

Газ	ρ , кг/м ³	$\mu \cdot 10^2$, Па·с	$D_{\text{дифф}}$, см ² /с	M , г/моль
Воздух	1,293	1812	0,17	28,98
He	0,179	1946	0,62	4,002
CO ₂	1,977	1463	0,21	44,01

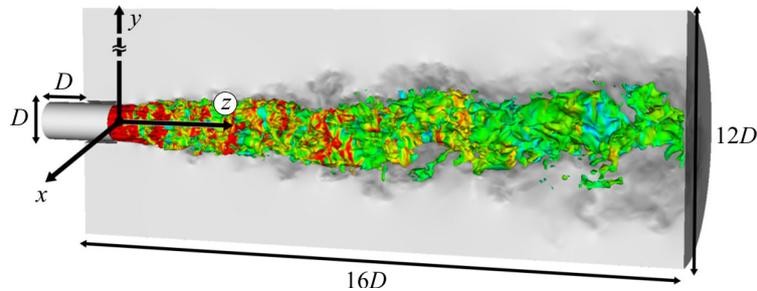


Рис. 1. Геометрия основной вычислительной области с обозначением используемой системы координат.

в пространстве движется с постоянной скоростью спутного потока — $U_{\text{газ}} = 0,04U$. Важным аспектом является тот факт, что в рассматриваемых случаях меняется только окружающий газ, в то время как все характеристики истекающего воздуха остаются неизменными. Это упрощает процедуру сравнения между собой результатов для всех пар газов. Значения используемых параметров для всех трех газов (воздуха, гелия, углекислого газа) представлены в таблице. Для случая «воздух–воздух» в качестве коэффициента диффузии используется коэффициент самодиффузии азота.

В геометрическом смысле в задаче рассматривается цилиндр размером $16D \times 12D$ с круглой трубой в центре длиной $2D$, где D — диаметр трубы (рис. 1). Точка отсчета системы координат располагается в центре правой кромки трубы. Далее в статье все значения координат приводятся в обезразмеренном на D виде. В каждый момент времени на вход трубы подается полностью развитый турбулентный поток воздуха, одновременно вычисляемый во вспомогательном расчете для периодического круглого канала длиной $5D$. Рассматриваемое течение является прототипом широкого класса задач и довольно часто исследуется в других работах. В работе [33] авторами было проведено сравнение средних полей скорости, пульсаций и слагаемых баланса турбулентной кинетической энергии с имеющимися литературными данными.

Для вспомогательного расчета турбулентного профиля в периодическом круглом канале была построена сетка, состоящая из 7,2 млн. вычислительных узлов, что соответствует пространственному разрешению прямого численного моделирования, выполненного в работе [34]. Вблизи стенок имело место сгущение сетки. Вычислительная сетка для основной области состояла из 124 млн. точек. На рис. 2 она проиллюстрирована в двух перпендикулярных сечениях.

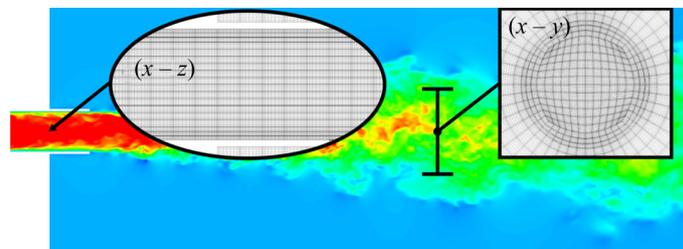


Рис. 2. Пример вычислительной сетки в $(x-z)$ и $(x-y)$ сечениях.

Результаты

POD-разложение производится на базе $N_t = 700\text{--}900$ файлов (в зависимости от рассматриваемого случая), содержащих в себе данные о поле скорости в плоскостях $x\text{-}z$ и $y\text{-}z$ в последовательные моменты времени на равномерной сетке. Интерполяция данных с вычислительной сетки на сетку для POD производится со спектральной точностью благодаря свойствам спектральных методов. Безразмерный шаг по времени, с которым производится запись файлов, равен 0,1 для всех трех расчетов (с воздухом, углекислым газом, гелием) и является достаточным для исследования крупномасштабных когерентных вихревых структур.

С помощью полученных POD-мод можно восстановить мгновенное поле скорости в любой момент времени. Влияние количества используемых мод n_g показано на рис. 3, где приведены поля для случая «воздух–воздух», построенные по первым 2, 5 и 15 POD-модам, в сравнении с полным мгновенным полем скорости. Также на рис. 3 хорошо заметно проявление длинноволновой синусоидальной неустойчивости, исследование которой и является главной целью настоящей работы.

Для решения задачи согласно [19] была использована статистическая симметрия относительно плоскости $y = 0$ через декомпозицию поля скорости на симметричную и антисимметричную части, что увеличивает точность итогового POD-разложения:

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{u}_{\text{симм}}(\vec{x}, t) + \vec{u}_{\text{анти}}(\vec{x}, t), \quad (14)$$

где симметричная часть определяется как

$$u_{x,\text{симм}}(x, y, z, t) = (u_x(x, y, z) + u_x(x, -y, z))/2, \quad (15)$$

$$u_{y,\text{симм}}(x, y, z, t) = (u_y(x, y, z) - u_y(x, -y, z))/2, \quad (16)$$

$$u_{z,\text{симм}}(x, y, z, t) = (u_z(x, y, z) + u_z(x, -y, z))/2, \quad (17)$$

а антисимметричная как

$$u_{x,\text{анти}}(x, y, z, t) = (u_x(x, y, z) - u_x(x, -y, z))/2, \quad (18)$$

$$u_{y,\text{анти}}(x, y, z, t) = (u_y(x, y, z) + u_y(x, -y, z))/2, \quad (19)$$

$$u_{z,\text{анти}}(x, y, z, t) = (u_z(x, y, z) - u_z(x, -y, z))/2. \quad (20)$$

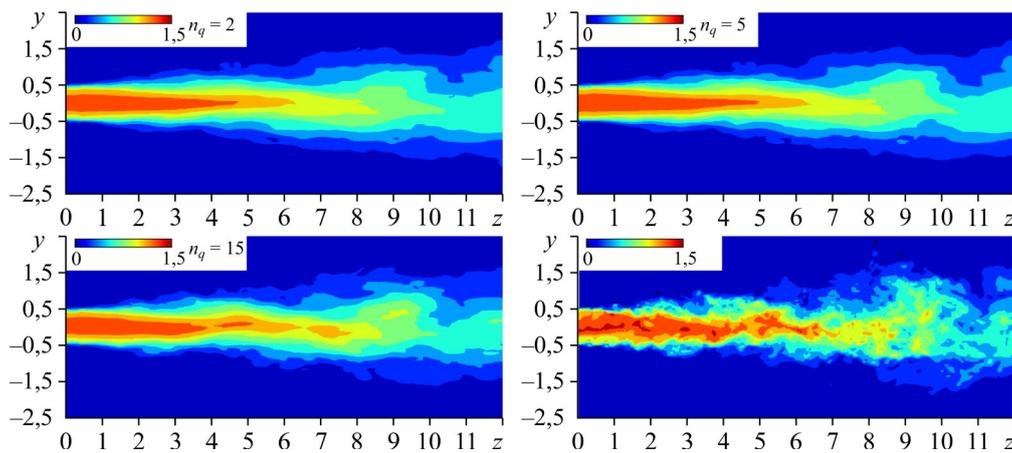


Рис. 3. Мгновенное поле продольной скорости, восстановленное по первым 2, 5, 15 POD-модам и полное мгновенное поле скорости.

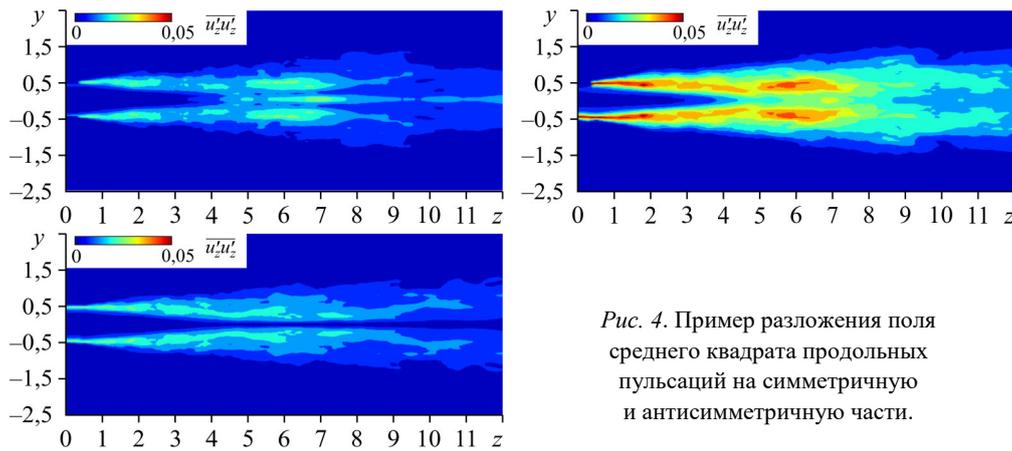


Рис. 4. Пример разложения поля среднего квадрата продольных пульсаций на симметричную и антисимметричную части.

После данной декомпозиции POD-разложение применяется по отдельности к каждой из двух компонент. На рис. 4 продемонстрирован пример такой декомпозиции для поля среднего квадрата продольных пульсаций. Видно, что амплитуды антисимметричной и симметричной частей примерно равны. В дальнейшем это будет показано также на примере турбулентной кинетической энергии (ТКЭ, $k = \overline{u_i' u_i'}/2$, где под повторяющимся индексом подразумевается суммирование).

На рис. 5 проиллюстрированы поля продольной компоненты завихренности, а также поля полной турбулентной кинетической энергии и ее симметричной и антисимметричной частей. Для случаев «воздух–воздух» и «воздух–углекислый газ» процентное соотношение доли ТКЭ, построенное по симметричной и антисимметричной частям поля

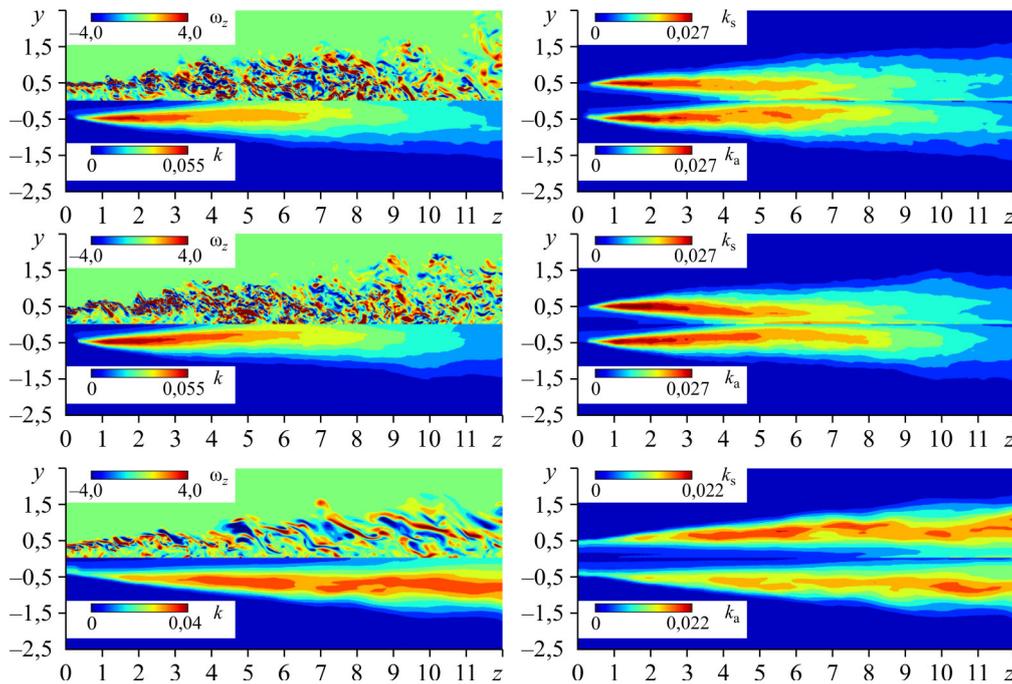


Рис. 5. Поля продольной компоненты завихренности, полной ТКЭ и ее симметричной и антисимметричной частей.

Сверху вниз: «воздух–воздух», «воздух–углекислый газ», «воздух–гелий»;
 левая колонка: мгновенное поле завихренности (сверху) и поле полной ТКЭ (снизу);
 правая колонка: поле ТКЭ, построенное по симметричной части поля скорости (сверху)
 и поле ТКЭ, построенное по антисимметричной части поля скорости (снизу).

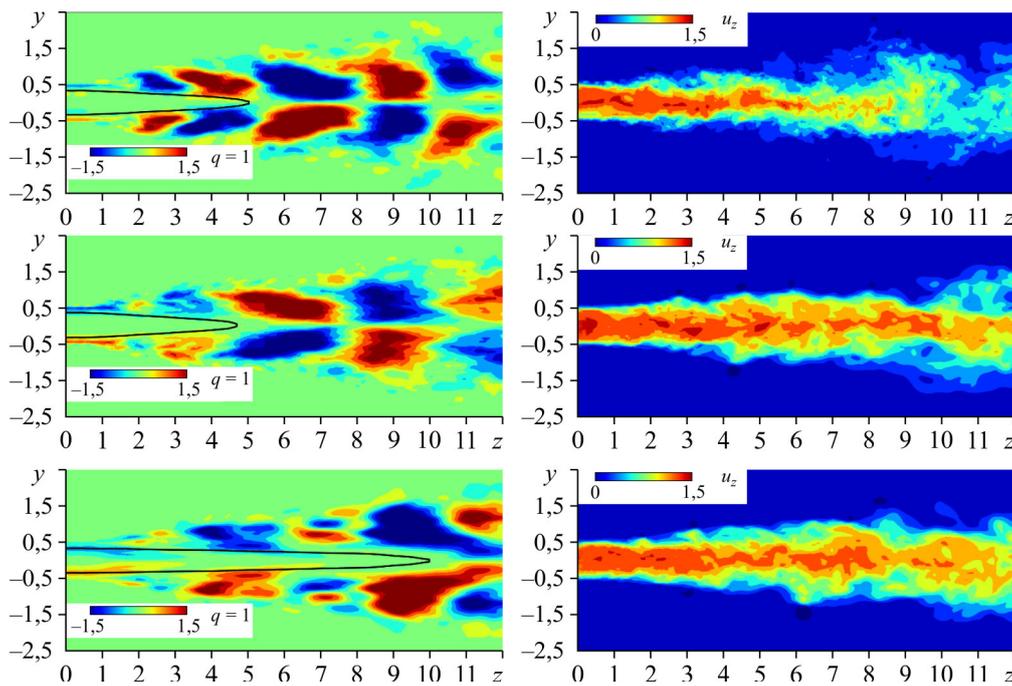


Рис. 6. POD-моды антисимметричной части поля мгновенной скорости (16) для всех трех случаев с нанесенным черным контуром $\bar{u}_z = 1,2$.
Сверху вниз: «воздух–воздух», «воздух–углекислый газ», «воздух–гелий».

скорости, составляет примерно 50 % на 50 %, в то время как для случая «воздух–гелий» наблюдается отклонение в сторону симметричной части. В случае «воздух–гелий» величина ТКЭ слабо меняется с увеличением продольной координаты, что, как будет показано далее, связано с увеличением пространственного периода когерентных структур.

Проанализируем пространственное распределение POD-мод антисимметричной части поля мгновенной скорости (18–20). На рис. 6 изображены чередующиеся положительные и отрицательные области, что соответствует спиралевидной структуре возмущений, поведение которых схоже с бегущими волнами. Черный изоконтур продольной средней скорости, соответствующий значению $\bar{u}_z = 1,2$, определяет местоположение слоя смешения, который прилегает к когерентным структурам. Таким образом, можно заключить, что возмущения, вносящие наибольший вклад в динамику турбулентной струи, являются спиралевидными когерентными структурами, которые берут начало в слое смешения и распространяются вниз по потоку. Эти выводы согласуются с литературными данными [35]. Обнаруженные когерентные структуры задают общую динамику рассматриваемого струйного течения, поэтому они используются как базис для построения низкоразмерных представлений течения. С ростом отношения плотностей наблюдается увеличение пространственного периода когерентных структур практически в два раза, при этом скорость распространения меняется слабо, что говорит об уменьшении частоты их образования.

Одним из главных критериев при построении низкоразмерных моделей течения является доля турбулентной кинетической энергии, которую описывает модель. На рис. 7 изображен график зависимости полной турбулентной кинетической энергии от количества мод, по которым восстанавливается течение (14). Первые три POD-моды для каждого случая содержат практически одинаковое количество энергии, однако, чтобы описать половину турбулентной кинетической энергии для случая «воздух–гелий», необходимо взять примерно 10 мод, что в два раза меньше количества мод, необходимых для остальных пар газов. При дальнейшем увеличении количества мод

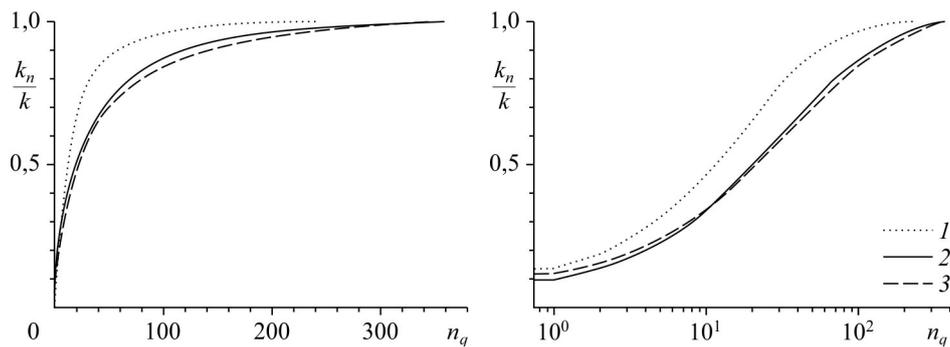


Рис. 7. Зависимость полной турбулентной кинетической энергии от количества мод, построенных по полному полю скорости (14).

Слева — линейная шкала, справа — логарифмическая;

1–3 соответствуют парам «воздух – гелий», «воздух – углекислый газ» и «воздух – воздух».

содержание турбулентной кинетической энергии растет примерно линейно вплоть до 90 %. Дальнейшее увеличение количества мод в модели течения приводит к слабому росту турбулентной кинетической энергии, но 90 % вполне достаточно, чтобы с хорошей точностью описать динамику потока. Из рис. 7 видно, что для восстановления указанного процента от ТКЭ достаточно учесть динамику первых 56, 122 и 137 мод для случаев «воздух–гелий», «воздух–углекислый газ» и «воздух–воздух» соответственно.

Выводы

С помощью анализа методом собственного ортогонального разложения (POD) были выявлены наиболее энергетичные когерентные структуры, присутствующие в потоке. Пространственное распределение этих структур указывает на спиралевидную форму, что согласуется с данными [36]. Подобное разложение можно взять за основу при построении низкоразмерного представления потока. Причем количество структур, необходимых для создания достоверной модели течения, зависит от типа рассматриваемого газа. Одним из критериев точности моделей является турбулентная кинетическая энергия. Например, чтобы восстановить 90 % от общей турбулентной кинетической энергии для случая «воздух–гелий» достаточно учесть динамику вдвое меньшего количество мод по сравнению со случаями «воздух–углекислый газ» и «воздух–воздух». Следовательно, при уменьшении молекулярной массы газа количество необходимых базисных мод уменьшается, так как энергия «аккумулируется» в первых POD-модах. Авторами также обнаружено, что с ростом отношения молекулярных масс смешиваемых газов увеличивается пространственный период когерентных вихревых структур, что приводит к ослаблению затухания турбулентной кинетической энергии в продольном направлении.

Авторы благодарны Сибирскому суперкомпьютерному центру, межведомственному суперкомпьютерному центру и информационному вычислительному центру НГУ за предоставленные вычислительные ресурсы.

Список литературы

1. Ball C.G., Fellouah H., Pollard A., The flow field in turbulent round free jets // Prog. Aero Sci. 2012. Vol. 50. P. 1–26
2. Kozlov V.V., Grek G.R., Litvinenko Y.A. Visualization of conventional and combusting subsonic jet instabilities. Dordrecht: Springer International Publishing, 2016. 126 p.
3. Штербачек З., Тауск П. Перемешивание в химической промышленности. 1963. 416 с.
4. Panchapakesan N.R., Lumley J.L. Turbulence measurements in axisymmetric jets of air and helium. Part 1. Air jet // J. Fluid Mechanics. 1993. Vol. 246. P. 197–224.
5. Panchapakesan N.R., Lumley J.L. Turbulence measurements in axisymmetric jets of air and helium. Part 2. Helium jet // J. Fluid Mechanics. 1993. Vol. 246. P. 225–247.

6. **Pitts W.M.** Effects of global density ratio on the centerline mixing behavior of axisymmetric turbulent jets // Experiments in Fluids. 1991. Vol. 11. P. 125–134.
7. **Pitts W.M.** Reynolds number effects on the mixing behavior of axisymmetric turbulent jets // Experiments in Fluids. 1991. Vol. 11. P. 135–141.
8. **Chassing P., Harran G., Joly L.** Density fluctuation correlations in free turbulent binary mixing // J. Fluid Mechanics. 1994. Vol. 279. P. 239–278.
9. **Djeridane T., Amielh M., Anselmet F., Fulachier L.** Velocity turbulence properties in the near-field region of axisymmetric variable density jets // Physics of Fluids. 1996. Vol. 8, No. 6. P. 1614–1630.
10. **Talbot B., Mazellier N., Renou B., Danaila L., Boukhalfa M.A.** Time-resolved velocity and concentration measurements in variable-viscosity turbulent jet flow // Experiments in Fluids. 2009. Vol. 47. P. 769–787.
11. **Amielh M., Djeridane T., Anselmet F., Fulachier L.** Velocity near-field of variable density turbulent jets // Inter. J. Heat and Mass Transfer. 1996. Vol. 10. P. 2149–2164.
12. **Wang P., Fröhlich J., Michelassi V., Rodi W.** Large-eddy simulation of variable-density turbulent axisymmetric jets // Inter. J. Heat and Fluid Flow. 2008. Vol. 29, No. 3. P. 654–664.
13. **Sreenivasan K.R., Raghu S., Kyle D.** Absolute instability in variable density round jets // Experiments in Fluids. 1989. Vol. 7, No. 5. P. 309–317.
14. **Ahmed S.A., So R.M.C., Mongia H.C.** Jet characteristics in confined swirling flow // Experiments in Fluids. 1985. Vol. 3. P. 231–238.
15. **Lai C.C.K., Charonko J.J., Prestridge K.** A Kármán–Howarth–Monin equation for variable-density turbulence // J. Fluid Mechanics. 2018. Vol. 843. P. 382–418
16. **Charonko J.J., Prestridge K.** Variable-density mixing in turbulent jets with coflow // J. Fluid Mechanics. 2017. Vol. 825. P. 887–921.
17. **Lumley J.L.** The structure of inhomogeneous turbulent flows // Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation. 1967. P. 166–178.
18. **Patte-Rouland B., Danlos A., Lalizel G., Rouland E., Paranthoen P.** Proper orthogonal decomposition used for determination of the convection velocity of the initial zone of the annular jet // Intern. J. Computational Fluid Dynamics. 2008. Vol. 1. P. 1–10.
19. **Sirovich L.** Turbulence and the dynamics of coherent structures. I. Coherent structures // Quarterly of Applied Mathematics. 1987. Vol. 45, No. 3. P. 561–571.
20. **Arndt R.E.A., Long D.F., Glauser M.N.** The proper orthogonal decomposition of pressure fluctuations surrounding a turbulent jet // J. Fluid Mechanics. 1997. Vol. 340. P. 1–33.
21. **Freund J.B., Colonius T.** Turbulence and sound-field POD analysis of a turbulent jet // Inter. J. Aeroacoustics. 2009. Vol. 8, No. 4. P. 337–354.
22. **Schmidt O.T., Towne A., Rigas G., Colonius T., Bres G.A.** Spectral analysis of jet turbulence // J. Fluid Mechanics. 2018. Vol. 855. P. 953–982.
23. **Meyer K.E., Pedersen J.M., Ozcan O.** A turbulent jet in crossflow analysed with proper orthogonal decomposition // J. Fluid Mechanics. 2007. Vol. 583. P. 199–227.
24. **Markovich D.M., Abdurakipov S.S., Chikishev L.M., Dulin V.M., Hanjalić K.** Comparative analysis of low- and high-swirl confined flames and jets by proper orthogonal and dynamic mode decomposition // Physics of Fluids. 2014. Vol. 26, No. 5, P. 065109-1–065109-22.
25. **Paolucci S.** Filtering of sound from the Navier-Stokes equations. CA, USA Livermore: Sandia National Laboratories, 1982. P. 3–52.
26. **Gordon S., McBride B.J.** Computer program for calculation of complex chemical equilibrium compositions and applications. Part 1: Analysis // NASA Report. 1994. P. 1–5.
27. **Volkwein S.** Proper orthogonal decomposition: theory and reduced-order modelling // Lecture Notes, University of Konstanz. 2013. Vol. 4, No. 4. P. 1–29.
28. **Fischer P.F., Lottes J.W., Kerkemeier S.G.** nek5000 Web page, 2008. <https://nck5000.mcs.anl.gov/>
29. **Patera A.T.** A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion // J. Computational Physics. 1984. Vol. 54, No. 3. P. 468–488.
30. **Kreiss H.O., Olinger J.** Comparison of accurate methods for the integration of hyperbolic equations // Tellus. 1972. Vol. 24, No. 3. P. 199–215.
31. **Deville M.O., Fischer P.F., Mund E.H.** High-order methods for incompressible fluid flow // Cambridge University Press. 2002. Vol. 9. 528 p.
32. **Tomboulides A.G., Lee J.C.Y., Orszag S.A.** Numerical simulation of low Mach number reactive flows // J. Sci. Computing. 1997. Vol. 12, No. 2. P. 139–167.
33. **Ivashchenko V.A., Abdurakipov S.S., Mullyadzhano R.I.** DNS of round turbulent jets with variable density // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 2027, No. 1. P. 040027-1–040027-5.
34. **El Khoury G.K., Schlatter P., Noorani A., Fischer P.F., Brethouwer G., Johansson A.V.** Direct numerical simulation of turbulent pipe flow at moderately high Reynolds numbers // Flow, Turbulence and Combustion. 2013. Vol. 91, No. 3. P. 475–495.
35. **Mullyadzhano R., Abdurakipov S., Hanjalić K.** Helical structures in the near field of a turbulent pipe jet // Flow, Turbulence and Combustion. 2017. Vol. 98, No. 2. P. 367–388.
36. **Mullyadzhano R.I., Sandberg R.D., Abdurakipov S.S., Geogre W.K., Hanjalić K.** Propagating helical waves as a building block of round turbulent jets // Physical Review Fluids. 2018. Vol. 3, No. 6. P. 062601-1–062601-9.

*Статья поступила в редакцию 20 апреля 2020 г.,
после доработки — 27 июля 2020 г.,
принята к публикации 7 октября 2020 г.*