

- Schlichting waves in the boundary layer on a flat plate // *Acta Mech. Sinica*.— 1988.— V. 4, N 2.
6. Зельман М. Б. О нелинейном развитии возмущений в плоскопараллельных потоках // *Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук.*— 1974.— № 13, вып. 3.
  7. Зельман М. Б., Масленникова И. И. О формировании пространственной структуры субгармонического режима перехода в потоке Блазиуса // *Изв. АН СССР. МЖГ.*— 1989.— № 3.
  8. Зельман М. Б., Масленникова И. И. Об эффектах резонансных взаимодействий волновых возмущений в пограничном слое // *Изв. АН СССР. МЖГ.*— 1984.— № 4.
  9. Зельман М. Б., Масленникова И. И. О резонансном взаимодействии пространственных возмущений в пограничном слое // *ПМТФ.*— 1985.— № 1.
  10. Corke T. C. Effect of controlled resonant interactions and mode detuning on turbulent transition in boundary layers // *Laminar-Turbulent Transition.*— Berlin et al: Springer-Verlag, 1990.
  11. Maslennikova I. I., Zelman M. B. On subharmonic-type laminar-turbulent transition in boundary layer // *Laminar-Turbulent Transition.*— Berlin et al: Springer-Verlag, 1985.

г. Новосибирск

Поступила 5/II 1991 г.

УДК 531/534

А. И. Весницкий, А. В. Метрикин

### ПЕРЕХОДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В ОДНОМЕРНЫХ УПРУГИХ СИСТЕМАХ

Развитие высокоскоростного наземного транспорта, а также увеличение скорости работы машин и механизмов резко повысили интерес к вопросам взаимодействия упругих конструкций с движущимися объектами (см., например, [1, 2]). Однако, несмотря на обилие работ, остаются фактически не изученными волновые процессы, возникающие в несущих конструкциях, в частности эффекты волнообразования и сопутствующий им эффект давления волн на движущийся объект [3]. Наиболее интересным с практической точки зрения является случай, когда конструкция существенно неоднородна. Равномерное движение объекта по такой конструкции сопровождается возбуждением упругих волн. Это явление по аналогии с впервые описанным в [4] применительно к электромагнитным волнам естественно называть переходным излучением.

В настоящей работе приводится общая постановка задачи о взаимодействии движущегося сосредоточенного объекта с неоднородной упругой направляющей [3]. Подробно исследуется равномерное движение тела по полубесконечной струне на упругом основании. Показано, что при движении тела вблизи области неоднородности (точки закрепления) в струне возникает переходное излучение, в процессе которого на тело действует сила давления волн со стороны струны. Получено выражение, связывающее работу этой силы и энергию излучения.

1. Рассмотрим одномерную упругую систему, движение которой определено в области  $D: \{\alpha \leq t \leq \beta, a \leq x \leq b\}$  и характеризуется функционалом Лагранжа

$$L = \int_a^b \lambda(x, t) dx,$$

где  $\lambda = \lambda(t, x, \mathbf{U}(x, t); U_t, U_x)$  — плотность функции Лагранжа;  $\mathbf{U}(x, t)$  — вектор обобщенных координат с компонентами  $U_1, U_2, \dots, U_n$ , в предположении, что при  $x = d$  ( $a < d < b$ ) происходит конечный скачок параметров этой системы (например, погонной плотности, упругости основания и т. п.).

Пусть вдоль упругой системы по некоторому закону  $x = l(t)$  движется сосредоточенный объект, характеризующийся функцией Лагранжа  $L^0 = L^0(t, \mathbf{y}(t), \dot{\mathbf{y}}, l(t), \dot{l})$  и вектором обобщенных координат с компонентами  $y_1, y_2, \dots, y_m$ .

Будем считать, что при  $x = l(t)$  выполнены условия непрерывности упругой системы и безотрывности движения сосредоточенного объекта:

$$(1.1) \quad U_\alpha(t, l(t) - 0) = U_\alpha(t, l(t) + 0) = y_\alpha(t), \quad \alpha = 1, p; \quad p \leq n, \quad m.$$

Тогда, согласно принципу Гамильтона — Остроградского,

$$(1.2) \quad \delta \int_\alpha^\beta (L + L^0) dt + \int_\alpha^\beta \left( Q(t) \delta y + R \delta l + \delta \int_\alpha^b q(x, t) U dx \right) dt = 0.$$

Здесь  $Q(t)$ ,  $q(x, t)$  — векторы внешних обобщенных сосредоточенных и распределенных сил;  $R(t)$  — суммарная сила (включая внешние и диссипативные), обеспечивающая движение по закону  $x = l(t)$ .

Проводя в (1.2) варьирование, используя условия (1.1) и приравнявая слагаемые при одинаковых вариациях, получим [3, 5] краевую задачу

$$(1.3) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial U^k} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \lambda}{\partial U_t^k} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \lambda}{\partial U_x^i} + q^k(x, t) = 0, \quad k = 1, n,$$

$$\frac{\partial L^0}{\partial l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L^0}{\partial \dot{l}} + R(t) = [T - \dot{l}p]_{x=l(t)},$$

$$\frac{\partial L^0}{\partial y_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L^0}{\partial \dot{y}_\alpha} + Q_\alpha(t) = \left[ \frac{\partial \lambda}{\partial U_x^\alpha} - \dot{i} \frac{\partial \lambda}{\partial U_t^\alpha} \right]_{x=l(t)},$$

$$\frac{\partial L^0}{\partial y_\gamma} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L^0}{\partial \dot{y}_\gamma} + Q_\gamma(t) = 0, \quad \gamma = p + 1, m,$$

$$[U^k]_{x=d} = \left[ \frac{\partial \lambda}{\partial U_x^k} \right]_{x=d} = 0, \quad U(t, a) = \varphi(t), \quad U(t, b) = \psi(t),$$

где  $T = \lambda - \sum_{k=1}^n U_x^k \frac{\partial \lambda}{\partial U_x^k}$ ;  $p = \sum_{k=1}^n U_x^k \frac{\partial \lambda}{\partial U_t^k}$ ;  $F = -[T - \dot{l}p]_{x=l(t)}$  — сила давления волн на движущийся объект. Квадратные скобки означают разность между значениями выражений, стоящих в скобках, справа и слева от указанного значения  $x$ . Функции  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  предполагаются заданными.

Краевая задача (1.3) описывает процесс взаимодействия движущегося сосредоточенного объекта с неоднородной упругой системой. Видно, что колебания объекта и направляющей являются взаимообусловленными. Учет этого фактора особенно важен для механических систем в связи с большой инерционностью реальных объектов.

2. В качестве примера рассмотрим движение тела массы  $m$ , находящегося в поле тяготения, по полубесконечной струне на упругом основании модели Винклера (рис. 1). Лагранжиан струны и функция Лагранжа движущейся сосредоточенной системы в этом случае имеют вид [3]

$$(2.1) \quad \lambda(x, t) = \frac{1}{2} (\rho U_t^2 - N U_x^2 - k U^2), \quad L^0(t) = \frac{m}{2} (\dot{l}^2 + \dot{y}^2 - 2gy).$$

Здесь  $U(x, t)$  — амплитуда малых поперечных колебаний струны;  $\rho$  — погонная плотность;  $N$  — натяжение;  $k$  — жесткость упругого основания.

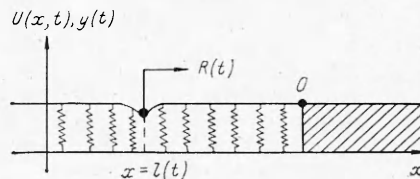
Подставляя (2.1) в (1.3), получим

$$(2.2) \quad U_{tt} - c^2 U_{xx} + h^2 U = 0, \quad x \leq 0, \quad -\infty < t < +\infty, \\ c^2 = N/\rho, \quad h^2 = k/\rho, \quad U(t, l(t) - 0) = U(t, l(t) + 0) = y(t),$$

$$R(t) - [T - \dot{l}p]_{x=l(t)} = m\ddot{l}(t), \quad m\ddot{y}(t) = [N U_x + \rho \dot{l}(t) U_t]_{x=l(t)} - P,$$

$$U(t, 0) = 0, \quad U \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x - vt \rightarrow -\infty,$$

где  $T = (1/2)(\rho U_t^2 + N U_x^2 - k U^2)$ ;  $p = -\rho U_x U_t$ ;  $P = mg$ .



Р и с. 1

В дальнейшем будем рассматривать стационарное движение тела, когда  $R = [T - vp]_{x=vt}$ , а  $\dot{l} = v = \text{const} < c$ . В качестве начальных условий выберем стационарный профиль, образующийся в сопутствующей равномерно движущемуся телу системе координат в случае, когда струна является бесконечной, а основание однородным [5]:

$$(2.3) \quad U(x, t) \rightarrow -\frac{P}{2\rho h\beta} \exp\left(-\frac{h}{\beta} |x - vt|\right) \quad \text{при } t \rightarrow -\infty.$$

Здесь и далее  $\beta = \sqrt{c^2 - v^2}$ .

3. Как видно из (2.2), при выполнении условия

$$(3.1) \quad |\ddot{y}(t)| \ll g \quad \forall t \leq 0$$

поперечную силу, действующую на струну со стороны тела, можно считать постоянной.

Предположим, что условие (3.1) выполнено. Сконструируем решение задачи (2.2)–(3.1), используя метод изображений [6], т. е. поставим ей в соответствие задачу о движении двух источников по бесконечной струне, лежащей на однородном упругом основании. Дополнительный источник подберем так, чтобы решения обеих задач совпадали при  $x \leq 0$ . Очевидно, что источник силы  $-P$ , движущийся по закону  $x = -vt$ , удовлетворяет данному требованию. Действуя таким образом и используя (2.3), имеем решение исходной задачи (2.2)–(3.1) для  $t \leq 0$ :

$$(3.2) \quad U^-(x, t) = -\frac{P}{2\rho h\beta} \left( \exp\left(-\frac{h}{\beta} |x - vt|\right) - \exp\left(\frac{h}{\beta} (x + vt)\right) \right), \quad x \leq 0.$$

Для  $t \geq 0$  получаем задачу о свободных колебаниях струны с начальными условиями, определяемыми выражением (3.2) при  $t \rightarrow 0$ , т. е. краевую задачу

$$(3.3) \quad U_{tt} - c^2 U_{xx} + h^2 U = 0, \quad t \geq 0, \quad x \leq 0, \quad U(x, 0) = 0, \\ U_t(x, 0) = (Pv/\rho\beta^2) \exp(hx/\beta), \quad U(0, t) = 0, \quad U \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow -\infty.$$

Решение (3.3) находим, действуя аналогично, т. е. продолжая нечетным образом начальные условия:

$$(3.4) \quad U^+(x, t) = \frac{P}{\rho h\beta} \left( \exp\left(\frac{h}{\beta} x\right) \text{sh}\left(\frac{h}{\beta} vt\right) - \text{sh}\left(\frac{h}{\beta} (x + vt)\right) \theta(x + ct) \right) + \\ + \frac{Pv}{\pi\rho} \int_{-h}^h \frac{\text{sh}\left(\frac{x}{c} \sqrt{h^2 - z^2}\right) \cos(tz)}{z^2\beta^2 + h^2v^2} dz \theta(x + ct).$$

Здесь  $\theta(x, t)$  — единичная функция.

Выражения (3.2), (3.4) описывают переходное излучение при следующих условиях, накладываемом на параметры исходной задачи:

$$(3.5) \quad \alpha^2/(1 - \alpha^2)^{3/2} \ll \rho N/2km, \quad \alpha = v/c.$$

Вычислим энергию этого излучения в виде  $W' = H(0) \left( H(t) - \right. \\ \left. = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 (\rho U_t^2 + N U_x^2 + k U^2) dx \right)$  — энергия струны на упругом основании).

Как видно из (3.2),  $U_x(x, 0) = 0$ , поэтому, учитывая (3.3), имеем

$$(3.6) \quad W' = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \rho U_t^2(x, 0) dx = \frac{P^2 v^2}{4h\rho\beta^3}.$$

С увеличением скорости движения тела энергия излучения растет, значит, возрастает вероятность разрушения конструкции. Кроме того,

становятся существенными энергозатраты внешнего источника, поддерживающего равномерное движение тела в процессе излучения.

В связи с этим представляет интерес найти выражение для силы давления волн на тело, работа которой определяет энергозатраты внешнего источника. Учитывая условия неразрывности струны, граничные условия при  $x = vt$ , из (3.2) получим

$$(3.7) \quad F = -[T - vp]_{x=vt} = -\frac{P^2}{2\rho\beta^2} \exp\left(\frac{2h}{\beta} vt\right);$$

$$(3.8) \quad W^f = -v \int_{-\infty}^0 F dt = \frac{P^2}{4h\rho\beta}.$$

Из анализа найденного решения следует, что для полного описания процесса преобразования энергии при переходном излучении необходимо учесть изменение энергии прогиба струны, движущегося вместе с источником  $\Delta H$ , и работу силы тяжести  $A^g$ . Действительно, вычисляя значения  $\Delta H$  и  $A^g$  в виде

$$(3.9) \quad \Delta H = 0 - \lim_{t \rightarrow -\infty} H(t) = -\frac{P^2 c^2}{4h\rho\beta^3},$$

$$A^g = P \left(0 - \lim_{t \rightarrow -\infty} U(vt, t)\right) = -\frac{P^2}{2\rho h\beta}$$

и сопоставляя (3.6), (3.8), (3.9), имеем выражение, связывающее  $W^f$  и  $W^r$  и представляющее собой интегральный закон изменения энергии при переходном излучении:

$$(3.10) \quad A^g + W^f - \Delta H = W^r.$$

Как видно из (3.10), при движении тела вблизи закрепления происходит преобразование энергии прогиба струны, движущегося вместе с объектом, в энергию излучения. При этом работу совершает не только внешний источник, поддерживающий равномерное движение объекта (как это происходит в электродинамических системах [4]), но и поле тяготения, являющееся поперечным к направлению движения тела.

4. Рассмотрим решение исходной задачи, считая, что инерцией тела нельзя пренебречь по сравнению с его весом (условие (3.1) не выполнено). Используя вновь метод изображений, поставим ей в соответствие вспомогательную задачу о движении двух источников поперечной силы: реального  $P_1 = m(g + \ddot{y}(t))$ , движущегося по закону  $x = vt$ , и фиктивного  $P_2 = -P_1$ , движущегося по закону  $x = -vt$  по бесконечной струне на однородном упругом основании:

$$(4.1) \quad U_{tt} - c^2 U_{xx} + h^2 U = 0, \quad t \leq 0, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$(4.2) \quad U(t, vt - 0) = U(t, vt + 0) = y(t), \quad [U(x, t)]_{x=-vt} = 0,$$

$$[NU_x + \rho v U_t]_{x=\pm vt} = \pm m(g + \ddot{y}), \quad R(t) = [T - vp]_{x=vt},$$

$$U \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \pm vt \rightarrow \pm\infty,$$

$$U \rightarrow -\frac{P}{2\rho h\beta} \exp\left(-\frac{h}{\beta} |x - vt|\right) \quad \text{при} \quad t \rightarrow -\infty.$$

Применим к (4.1) интегральное преобразование Фурье

$$V(k, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, t) \exp(ikx) dx.$$

Используя операционные равенства

$$U_{tt} \doteq V_{tt} - \frac{m\ddot{y}}{\rho\beta^2} (g + \ddot{y})(\exp(ikvt) - \exp(-ikvt)),$$

$$U_{xx} \doteq -k^2 V - \frac{m}{\rho\beta^2} (g + \ddot{y})(\exp(ikvt) - \exp(-ikvt)),$$

записанные с учетом (4.2), получим в изображениях

$$(4.3) \quad V_{tt} + (c^2k^2 + h^2)V = \frac{m}{\rho}(g + \ddot{y})(\exp(-ikvt) - \exp(ikvt)).$$

Будем искать решение (4.3) как  $V = V^0 + V^1$ , где  $V^0$  — решение уравнения

$$V_{tt}^0 + (c^2k^2 + h^2)V = \frac{m}{\rho}g(\exp(-ikvt) - \exp(ikvt)),$$

оригинал которого определяется выражением (3.2).

Очевидно, что  $V^1$  в этом случае будет удовлетворять уравнению

$$(4.4) \quad V_{tt}^1 + (c^2k^2 + h^2)V^1 = \frac{m}{\rho}\ddot{y}(\exp(-ikvt) - \exp(ikvt))$$

с начальными условиями

$$(4.5) \quad V^1 = V_t^1 = 0 \text{ при } t \rightarrow -\infty.$$

Общее решение уравнения (4.4) с начальными условиями (4.5) имеет вид

$$V^1(k, t) = \frac{m}{\rho} \int_{-\infty}^t \ddot{y}(\tau) (\exp(-ikv\tau) - \exp(ikv\tau)) \frac{\sin((t-\tau) \sqrt{h^2 + c^2k^2})}{\sqrt{h^2 + c^2k^2}} d\tau.$$

Перейдем к оригиналу. Используя формулу [7]

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos(kf) \frac{\sin(a \sqrt{k^2 + b^2})}{\sqrt{k^2 + b^2}} dk = \frac{1}{2} J_0(b \sqrt{a^2 - f^2}) \theta(a - |f|)$$

( $\theta$  — единичная функция,  $J_0$  — функция Бесселя нулевого порядка), получим

$$U^1(x, t) = \frac{m}{2c\rho} \int_{-\infty}^t \ddot{y}(\tau) \left( J_0\left(\frac{h}{c} \sqrt{c^2(t-\tau)^2 - (x+v\tau)^2}\right) \theta(c(t-\tau) - |x+v\tau|) - J_0\left(\frac{h}{c} \sqrt{c^2(t-\tau)^2 - (x-v\tau)^2}\right) \theta(c(t-\tau) - |x-v\tau|) \right) d\tau.$$

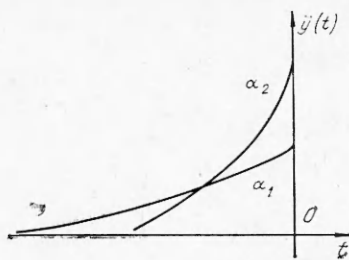
Окончательно, учитывая (3.2), при  $t \leq 0$ ,  $x \leq 0$  находим

$$(4.6) \quad U(x, t) = U^0(x, t) + U^1(x, t) = -\frac{m}{2\rho h\beta} g \left( \exp\left(-\frac{h}{\beta} |x-vt|\right) - \exp\left(\frac{h}{\beta} (x+vt)\right) \right) + \frac{m}{2c\rho} \begin{cases} \int_{-\infty}^{\mu^+/\Delta^-} \ddot{y}(\tau) J_0(v^+) d\tau - \int_{-\infty}^{\mu^+/\Delta^+} \ddot{y}(\tau) J_0(v^-) d\tau, & x \leq vt, \\ \int_{-\infty}^{\mu^+/\Delta^-} \ddot{y}(\tau) J_0(v^+) d\tau - \int_{-\infty}^{-\mu^-/\Delta^-} \ddot{y}(\tau) J_0(v^-) d\tau, & x \geq vt, \end{cases}$$

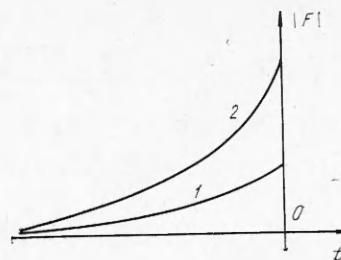
где  $\mu^\pm = x \pm ct$ ;  $\Delta^\pm = c \pm v$ ;  $v^\pm(x, t, \tau) = (h/c) \sqrt{c^2(t-\tau)^2 - (x \pm v\tau)^2}$ .

Для определения неизвестной  $y(t)$  используем условие безотрывности движения тела  $y(t) = U(vt, t)$ :

$$(4.7) \quad y(t) = -\frac{m}{2\rho h\beta} g \left( 1 - \exp\left(\frac{2h}{\beta} vt\right) \right) + \frac{m}{2c\rho} \left( \int_{-\infty}^{t\Delta^+/\Delta^-} \ddot{y}(\tau) J_0(v^+(vt, t, \tau)) d\tau - \int_{-\infty}^t \ddot{y}(\tau) J_0(v^-(vt, t, \tau)) d\tau \right), \quad t \leq 0.$$



Р и с. 2



Р и с. 3

Интегродифференциальное уравнение (4.7) почленным дифференцированием сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно  $\ddot{y}(t)$ , которое удобно для решения на ЭВМ.

Качественно зависимость  $\ddot{y}(t)$  для различных  $\alpha = v/c < 1$  ( $\alpha_1 < \alpha_2$ ), найденная посредством численного интегрирования (4.7), имеет вид, изображенный на рис. 2. Решение (4.6), (4.7) позволяет определить зависимость силы давления волн на движущееся тело от времени. На рис. 3 для фиксированных параметров задачи приведены качественные зависимости от времени: линия 1 — сила давления волн на тело  $F$ , найденная без учета инерции тела (согласно (3.7)), 2 — сила  $F$ , полученная из (4.6), (4.7). Видно, что учет инерции тела приводит к увеличению  $F$ . Следовательно, энергозатраты внешнего источника, поддерживающего равномерное движение тела, также возрастут. Уравнение энергетического баланса (3.10), в котором при учете инерции тела меняются лишь величины  $W^f$  и  $W^r$ , позволяет утверждать, что увеличивается и энергия переходного излучения.

Таким образом, показано, что при взаимодействии движущихся объектов с неоднородными несущими конструкциями характерным источником вибраций является переходное излучение. Проведенный анализ показывает также, что энергию, затрачиваемую на излучение, можно сравнить с энергией поступательного движения объекта, а сила давления волн, действующая на движущийся объект в процессе излучения, может иметь импульсный характер, особенно вблизи областей существенного изменения параметров упругой конструкции (в частности, вблизи закреплений).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппов А. П., Кохманюк С. С., Воробьев Ю. С. Воздействие динамических нагрузок на элементы конструкций.— Киев: Наук. думка, 1974.
2. Кохманюк С. С., Янютин Е. Г., Романенко Л. Г. Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках.— Киев: Наук. думка, 1980.
3. Весницкий А. И., Крысов С. В., Уткин Г. А. Постановка краевых задач динамики упругих систем исходя из вариационного принципа Гампльтона—Остроградского.— Горький: ГГУ, 1983.
4. Гинзбург В. Л., Франк И. М. Излучение равномерно движущегося электрона, возникающее при его переходе из одной среды в другую // ЖЭТФ.— 1946.— Т. 16.— С. 15.
5. Крысов С. В. Вынужденные колебания и резонанс в упругих системах с движущимися нагрузками.— Горький: ГГУ, 1985.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред.— М.: Наука, 1973.
7. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Наука, 1971.

г. Нижний Новгород

Поступила 13/IV 1990 г.,  
в окончательном варианте — 26/XI 1990 г.