

УДК 551.465.15:551.468.81

## АМПЛИТУДНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ С ТЕРМОХАЛИННОЙ КОНВЕКЦИЕЙ

С. Б. Козицкий

Тихоокеанский океанологический институт, 690041 Владивосток

Методом многомасштабных разложений выведены амплитудные уравнения для системы с термохалинной конвекцией в окрестности точек бифуркации Хопфа, Тейлора, а также точки двойного нуля дисперсионного соотношения. При этом получены комплексное уравнение Гинзбурга — Ландау, уравнение типа Ньюэла — Уайтхеда и уравнение типа  $\varphi^4$  соответственно. Приведены аналитические выражения для коэффициентов уравнений и их различные асимптотики. В случае бифуркации Хопфа для малых и больших частот амплитудное уравнение сводится к возмущенному нелинейному уравнению Шредингера. В высокочастотном пределе для исследуемой физической системы характерны структуры типа «темных» солитонов.

**Введение.** В 80–90-е гг. в литературе, посвященной бидиффузионной конвекции, появился ряд работ, в которых изучается процесс формирования структур в окрестности точки бифуркации Хопфа для трансляционно-инвариантных по горизонтали систем. Осцилляции в таких системах могут привести к возникновению различных типов волн (например, стоячих, бегущих, модулированных, хаотических), удобным методом исследования которых является построение амплитудных уравнений [1]. Впервые амплитудное уравнение для системы с конвекцией получено в работе [2]. Оно описывает двумерную тепловую конвекцию и имеет вид обобщенного уравнения Гинзбурга — Ландау. В [3] предложена система уравнений типа Гинзбурга — Ландау, описывающая бегущие волны двойной диффузии, распространяющиеся в обе стороны в бесконечной по горизонтали полосе жидкости:

$$\begin{aligned}(\partial_t + s\partial_x)A_R &= (c_0 + ic_1)A_R + (c_2 + ic_3)\partial_x^2 A_R - (c_4 + ic_5)|A_R|^2 A_R - (c_6 + ic_7)|A_L|^2 A_R, \\(\partial_t - s\partial_x)A_L &= (c_0 + ic_1)A_L + (c_2 + ic_3)\partial_x^2 A_L - (c_4 + ic_5)|A_L|^2 A_L - (c_6 + ic_7)|A_R|^2 A_L.\end{aligned}\quad (1)$$

Вид этих уравнений постулируется из общих соображений (типа соображений симметрии); предполагается, что коэффициенты в них должны быть выведены асимптотическими методами из уравнений в частных производных, описывающих конкретную физическую систему.

Однако полный и обоснованный вывод амплитудных уравнений для систем с двойной диффузией отсутствует. Во многих работах вид коэффициентов в уравнениях (1) не обосновывается. В некоторых работах эти коэффициенты получаются на основе тех или иных физических соображений. Так, автор работы [4], рассматривая систему с конвекцией бинарных смесей в пределе малых частот Хопфа, в качестве первого, самого грубого приближения коэффициенты  $c_1, c_3, c_5, c_7$  в (1) положил равными нулю, мотивируя это эмпирическими данными об аналогии рассматриваемого случая со случаем чисто температурной конвекции. Понятно, что строго обосновать подобные предположения о виде коэффициентов можно только при строгом математическом выводе амплитудных уравнений.

В работах по бидиффузионной конвекции, посвященных конвекции бинарных смесей в объемных и пористых средах, частота Хопфа при изучении колебательной конвекции

оказывается порядка единицы. В случае же термохалинной конвекции имеет смысл рассмотреть асимптотику, когда частота Хопфа стремится к бесконечности. В этом пределе амплитудное уравнение должно принимать вид нелинейного уравнения Шредингера, описывающего внутренние волны в двумерной геометрии.

В данной работе методом разложения производной, являющимся разновидностью метода многомасштабных разложений, выводятся амплитудные уравнения для волн двойной диффузии в двумерной, бесконечной по горизонтали геометрии в окрестности точек бифуркации Хопфа, Тейлора и точки двойного нуля дисперсионного соотношения. Рассмотрен простейший случай идеализированных граничных условий. В случае бифуркации Хопфа рассматривается амплитудное уравнение для волн, распространяющихся только в одну сторону. Получены аналитические выражения для коэффициентов уравнений. Исследованы их различные асимптотики, обсуждаются асимптотические формы, которые принимают амплитудные уравнения при различных значениях параметров.

**1. Постановка задачи и основные уравнения.** Исходные уравнения описывают двумерную термохалинную конвекцию в слое жидкости толщиной  $h$ , ограниченном двумя бесконечными плоскими горизонтальными границами. Движение жидкости происходит в вертикальной плоскости и описывается функцией тока  $\psi(t, x, z)$ . Используются горизонтальная  $x$  и вертикальная  $z$  пространственные переменные; время обозначено через  $t$ . Предполагается, что распределенные источники тепла и соли отсутствуют, а на верхней и нижней границах области поддерживаются постоянные значения этих величин, что соответствует линейному по вертикали и не зависящему от времени основному распределению температуры и солености. Переменные  $\theta(t, x, z)$  и  $\xi(t, x, z)$  описывают вариации температуры и солености относительно этого основного распределения. Существует два типа термохалинной конвекции: пальцевая, когда более теплая и соленая жидкость находится у верхней границы области, и диффузионная, когда температура и соленость больше у нижней границы. В настоящей работе рассматривается второй тип.

Эволюционные уравнения в приближении Буссинеска в безразмерном виде представляют собой систему нелинейных уравнений в частных производных первого порядка по времени, зависящих от четырех параметров: числа Прандтля  $\sigma$ , числа Льюиса  $\tau$  ( $0 < \tau < 1$ ), температурного  $R_T$  и соленостного  $R_S$  чисел Рэлея [5, 6]:

$$\begin{aligned} (\partial_t - \sigma\Delta)\Delta\psi + \sigma(R_S\partial_x\xi - R_T\partial_x\theta) &= -J(\psi, \Delta\psi), \\ (\partial_t - \Delta)\theta - \partial_x\psi &= -J(\psi, \theta), \quad (\partial_t - \tau\Delta)\xi - \partial_x\psi = -J(\psi, \xi). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь введен якобиан  $J(f, g) = \partial_x f \partial_z g - \partial_x g \partial_z f$ . Граничные условия для зависимых переменных выберем нулевыми, что означает постоянную температуру и соленость на границах области, обращение в нуль вихря на границах, а также непроницаемость границ:

$$\psi = \partial_z^2\psi = \theta = \xi = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, 1. \quad (3)$$

Эти граничные условия в литературе обычно называются условиями со свободным скольжением или просто свободными, так как горизонтальная компонента скорости на границе не обращается в нуль.

Обезразмеривание по пространственным переменным осуществлено по отношению к толщине слоя жидкости  $h$ . В качестве масштаба времени взята величина  $t_0 = h^2/\chi$ , где  $\chi$  — коэффициент температуропроводности жидкости. Вертикальная и горизонтальная компоненты поля скорости жидкости определяются по формулам

$$v_z = \frac{\chi}{h} \partial_x \psi, \quad v_x = -\frac{\chi}{h} \partial_z \psi.$$

Размерные температура  $T$  и соленость  $S$  находятся из соотношений

$$T(t, x, z) = T_- + \delta T[1 - z + \theta(t, x, z)], \quad S(t, x, z) = S_- + \delta S[1 - z + \xi(t, x, z)].$$

Здесь  $\delta T = T_+ - T_-$ ,  $\delta S = S_+ - S_-$ ;  $T_+$ ,  $T_-$  и  $S_+$ ,  $S_-$  — значения температуры и солёности на нижней и верхней границах области соответственно. Температурное и солёностное числа Рэлея можно выразить через параметры задачи:

$$R_T = \frac{g\alpha h^3}{\chi\nu} \delta T, \quad R_S = \frac{g\gamma h^3}{\chi\nu} \delta S,$$

где  $g$  — ускорение свободного падения;  $\nu$  — коэффициент вязкости жидкости;  $\alpha$ ,  $\gamma$  — температурный и солёностный коэффициенты объёмного расширения.

**2. Дисперсионное соотношение и его следствия.** Рассмотрим систему уравнений в частных производных, которая получается линеаризацией исходной системы (2) в окрестности нулевого решения:

$$(\partial_t - \sigma\Delta)\Delta\psi + \sigma(R_S\partial_x\xi - R_T\partial_x\theta) = 0, \quad (\partial_t - \Delta)\theta - \partial_x\psi = 0, \quad (\partial_t - \tau\Delta)\xi - \partial_x\psi = 0. \quad (4)$$

Решение этих уравнений с граничными условиями (3) можно получить методом разделения переменных. Выберем анзац следующего вида:

$$\varphi = [A_1 \exp(\lambda t - i\beta x) + \bar{A}_1 \exp(\bar{\lambda} t + i\beta x)] \sin(\pi z). \quad (5)$$

Здесь чертой сверху обозначено комплексное сопряжение;  $\varphi = (\psi, \theta, \xi)$  — вектор основных зависимых величин;  $\beta$  — горизонтальное волновое число;  $A_1 = (a_{A1}, a_{T1}, a_{S1})$  — вектор амплитуд. Для  $a_{A1}$  далее будем использовать обозначение  $A \equiv a_{A1}$ .

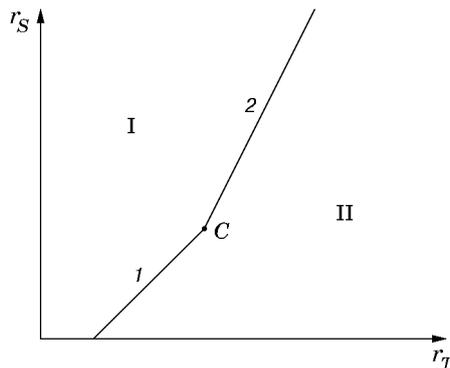
Подстановка (5) в (4) даёт систему алгебраических уравнений для переменных  $a_{A1}$ ,  $a_{T1}$ ,  $a_{S1}$ , условие существования решений которой принимает форму алгебраического уравнения третьего порядка по  $\lambda$  [6]

$$\lambda^3 + (1 + \tau + \sigma)k^2\lambda^2 + [(\tau + \sigma + \tau\sigma) + \sigma(r_S - r_T)]k^4\lambda + \sigma(r_S - \tau r_T + \tau)k^6 = 0. \quad (6)$$

Здесь введено волновое число  $k^2 = \pi^2 + \beta^2$ , а также нормализованные числа Рэлея  $r_T = R_T/R^*$  и  $r_S = R_S/R^*$ , где  $R^* = k^4(k/\beta)^2$  — число Рэлея, при котором происходит потеря устойчивости стационарного состояния для чисто температурной конвекции.

Уравнение (6) имеет три корня, два из которых могут быть комплексно-сопряжёнными. В рассматриваемой физической системе происходит потеря устойчивости, когда при изменении бифуркационных параметров  $r_T$  и  $r_S$  один или несколько корней переходят через нуль либо приобретают положительную вещественную часть, если они комплексные.

На плоскости параметров  $r_T$  и  $r_S$  (см. рисунок) можно выделить области I и II, на границе которых происходит потеря устойчивости. Сама граница состоит из двух прямолинейных участков. На участке 1 наблюдается бифуркация Тейлора, когда один из корней дисперсионного соотношения переходит через нуль, что приводит к возникновению стационарной валиковой конвекции. На участке 2 имеет место бифуркация Хопфа, когда у



двух комплексно-сопряженных корней становится положительной действительная часть. В результате возникает колебательная конвекция. Участки соединяются в точке  $C$ , в которой дисперсионное соотношение (6) имеет двойной корень. Значения параметров в этой точке определяются следующим образом:

$$r_{T1} = \frac{1}{\sigma} \frac{\tau + \sigma}{1 - \tau}, \quad r_{S1} = \frac{\tau^2}{\sigma} \frac{1 + \sigma}{1 - \tau}.$$

Уравнения прямых, на которых наблюдаются бифуркации Тейлора и Хопфа, соответственно имеют вид

$$r_T = \frac{1}{\tau} r_S + 1, \quad r_T = 1 + \frac{\tau}{\sigma} (1 + \tau + \sigma) + \frac{\tau + \sigma}{1 + \sigma} r_S.$$

Частота колебаний осцилляторной конвекции определяется мнимой частью  $\lambda$  и выражается через приведенную частоту  $\Omega$  как  $\text{Im}(\lambda) = \Omega k^2$ , а  $\Omega$  в свою очередь вычисляется по формуле

$$\Omega^2 = -\tau^2 + \frac{1 - \tau}{1 + \sigma} \sigma r_S, \quad \lambda = i\Omega k^2.$$

Далее приведенную частоту  $\Omega$  будем называть частотой Хопфа.

**3. Медленные переменные и разложение решений.** Рассмотрим уравнения конвекции с двойной диффузией в окрестности некоторой точки бифуркации, температурное и соленостное числа Рэлея для которой обозначены  $R_T^*$  и  $R_S^*$  соответственно. В этом случае числа Рэлея можно представить в виде

$$R_T = R_T^*(1 + \varepsilon^2 \eta), \quad R_S = R_S^*(1 + \varepsilon^2 \eta_S).$$

Значения  $\eta$  и  $\eta_S$  порядка единицы, а малый параметр  $\varepsilon$  показывает, насколько далеко от точки бифуркации находится рассматриваемая система. Для вывода амплитудных уравнений будем использовать метод разложения производной [7, 8]. Введем медленные переменные

$$T_1 = \varepsilon t, \quad T_2 = \varepsilon^2 t, \quad X_1 = \varepsilon x.$$

Далее в основные уравнения (2) введем продолженные производные по правилам

$$\partial_t \rightarrow \partial_t + \varepsilon \partial_{T_1} + \varepsilon^2 \partial_{T_2}, \quad \partial_x \rightarrow \partial_x + \varepsilon \partial_{X_1}. \quad (7)$$

Зависимые переменные представим в виде рядов по малому параметру:

$$\varphi = \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n \varphi_n(x, z, t, X_1, T_1, T_2) + O(\varepsilon^4).$$

Подставив эти выражения в уравнения (2) с удлинёнными согласно (7) производными и собрав члены при различных степенях  $\varepsilon$ , получим

$$O(\varepsilon): \quad L^* \varphi_1 = 0,$$

$$O(\varepsilon^2): \quad L^* \varphi_2 = -(L_1 \partial_{T_1} - L_2 \partial_{X_1}) \varphi_1 - M_1 \varphi_1,$$

$$O(\varepsilon^3): \quad L^* \varphi_3 = -(L_1 \partial_{T_1} - L_2 \partial_{X_1}) \varphi_2 - (L_1 \partial_{T_2} + L_3 \partial_{X_1}^2 + L_4 \partial_{X_1} \partial_{T_1} + L_5) \varphi_1 - M_2(\varphi_1, \varphi_2).$$

Здесь операторы  $L_1, L_3, L_4$  имеют диагональный вид:  $\text{diag } L_1 = (\Delta, 1, 1)$ ,  $\text{diag } L_3 = (\partial_t - 2\sigma\Delta - 4\sigma\partial_x^2, -1, -1)$ ,  $\text{diag } L_4 = (2\partial_x, 0, 0)$ ; операторы  $L^*, L_2$  можно записать следующим образом:

$$L^* = \begin{pmatrix} (\partial_t - \sigma\Delta)\Delta & -\sigma R_T^* \partial_x & \sigma R_S^* \partial_x \\ -\partial_x & \partial_t - \Delta & 0 \\ -\partial_x & 0 & \partial_t - \tau\Delta \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} -2(\partial_t - 2\sigma\Delta)\partial_x & \sigma R_T^* & -\sigma R_S^* \\ 1 & 2\partial_x & 0 \\ 1 & 0 & 2\tau\partial_x \end{pmatrix}.$$

У оператора  $L_5$  отлична от нуля только верхняя строка:  $(0, -\sigma R_T^* \eta \partial_x, \sigma R_S^* \eta_S \partial_x)$ . Векторы  $\mathbf{M}_i = (M_{Ai}, M_{Ti}, M_{Si})$  с нелинейными членами имеют компоненты

$$\begin{aligned} M_{A1} &= J(\psi_1, \Delta\psi_1), & M_{T1} &= J(\psi_1, \theta_1), & M_{S1} &= J(\psi_1, \xi_1), \\ M_{A2} &= J(\psi_2, \Delta\psi_1) + J(\psi_1, \Delta\psi_2) + J(\psi_1, 2\partial_x \partial_{X_1} \psi_1) + \partial_z \Delta\psi_1 \partial_{X_1} \psi_1 - \partial_z \psi_1 \partial_{X_1} \Delta\psi_1, \\ M_{T2} &= J(\psi_1, \theta_2) + J(\psi_2, \theta_1) + \partial_z \theta_1 \partial_{X_1} \psi_1 - \partial_z \psi_1 \partial_{X_1} \theta_1, \\ M_{S2} &= J(\psi_1, \xi_2) + J(\psi_2, \xi_1) + \partial_z \xi_1 \partial_{X_1} \psi_1 - \partial_z \psi_1 \partial_{X_1} \xi_1. \end{aligned}$$

Полученные системы можно записать в общем виде:

$$L^* \varphi_i = \mathbf{Q}'_i + \mathbf{P}_i.$$

Здесь функции  $\mathbf{Q}'_i$  состоят из членов, резонирующих с левой частью уравнений. Условие отсутствия секулярных членов в решении подобных систем уравнений, как известно (см. [7, 8]), сводится к требованию ортогональности функций  $\mathbf{Q}'_i$  и решения сопряженного однородного уравнения  $(L^*)^\times \varphi_i^\times = 0$ . Теперь выведем соотношение, к которому в данном случае сводится условие отсутствия секулярных членов и которое в дальнейшем будет использовано при выводе амплитудных уравнений. Рассмотрим неоднородную систему алгебраических уравнений, получающуюся из (4) путем выбора одномодового анзаца (5) и подстановки в правую часть однородной системы функций  $\mathbf{Q}_i = (Q_{Ai}, Q_{Ti}, Q_{Si})$  таких, что  $\mathbf{Q}'_i = \mathbf{Q}_i \exp(\lambda t - i\beta x) + \mathbf{Q}_i \exp(\lambda t + i\beta x)$ :

$$\begin{aligned} (\lambda + \sigma k^2)(-k^2)a_{Ai} + \sigma R_T^* i\beta a_{Ti} - \sigma R_S^* i\beta a_{Si} &= Q_{Ai}, \\ (\lambda + k^2)a_{Ti} + i\beta a_{Ai} &= Q_{Ti}, & (\lambda + \tau k^2)a_{Si} + i\beta a_{Ai} &= Q_{Si}. \end{aligned} \quad (8)$$

Условие разрешимости для этой системы уравнений формулируется как требование ортогональности правой части решению сопряженной однородной системы [9]  $(1, -i\beta\sigma R_T^*/(\lambda + k^2), i\beta\sigma R_S^*/(\lambda + \tau k^2))$  и сводится к следующему уравнению:

$$(\lambda + k^2)k^6 \sigma r_S^* Q_{Si} - (\lambda + \tau k^2)k^6 \sigma r_T^* Q_{Ti} - (\lambda + k^2)(\lambda + \tau k^2)i\beta Q_{Ai} = 0. \quad (9)$$

При  $\lambda = 0$  это соотношение имеет более простой вид

$$\frac{1}{\tau} r_S^* Q_{Si} - r_T^* Q_{Ti} - \frac{i\beta}{\sigma k^4} Q_{Ai} = 0.$$

**4. Вывод амплитудных уравнений.** Положим, что решение уравнений для  $\varphi_1$  имеет вид (5), причем амплитуда этого решения теперь зависит от медленных переменных:  $A = A(T_1, X_1, T_2)$ . Подставив его в уравнения для  $\varphi_2$ , получим систему уравнений вида (8), функции  $\mathbf{Q}_2$  в которой записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_{A2} &= k^2 \partial_{T_1} A + i\beta\sigma \left( \frac{R_S^*}{\lambda + \tau k^2} - \frac{R_T^*}{\lambda + k^2} + 4k^2 + \frac{2\lambda}{\sigma} \right) \partial_{X_1} A, \\ Q_{T2} &= \frac{i\beta}{\lambda + k^2} \partial_{T_1} A + \left( 1 - \frac{2\beta^2}{\lambda + k^2} \right) \partial_{X_1} A, & Q_{S2} &= \frac{i\beta}{\lambda + \tau k^2} \partial_{T_1} A + \left( 1 - \frac{2\tau\beta^2}{\lambda + \tau k^2} \right) \partial_{X_1} A. \end{aligned}$$

Для того чтобы эта алгебраическая система была разрешима, необходимо, чтобы выполнялось условие (9). В различных точках бифуркации это условие будет формулироваться в виде различных уравнений. Рассмотрим последовательно уравнения, получаемые из условия разрешимости указанной системы в точках бифуркации, характерных для рассматриваемой физической системы.

В последние соотношения подставим значение  $\lambda$  в точке бифуркации Хопфа  $\lambda = i\Omega k^2$  и положим  $k^2/\beta^2 = 3$  и  $\beta = \pi/\sqrt{2}$ , что справедливо для первой теряющей устойчивость моды колебаний [5]. Учтем также соотношения

$$r_T^* = \frac{1}{\sigma} \frac{\sigma + \tau}{1 - \tau} (\Omega^2 + 1), \quad r_S^* = \frac{1}{\sigma} \frac{\sigma + 1}{1 - \tau} (\Omega^2 + \tau^2).$$

Тогда уравнение (9) можно преобразовать следующим образом:

$$\partial_{T_1} A + \sqrt{2}\pi\Omega \partial_{X_1} A = 0$$

и решить в общем виде, введя новую медленную переменную  $X = X_1 - \sqrt{2}\pi\Omega T_1$ . Если принять, что амплитуда  $A(X, T_2)$  зависит от  $X_1$  и  $T_1$  только через  $X$ , то это уравнение становится тождеством.

В других случаях, когда мы рассматриваем систему в точке бифуркации Тейлора или в точке двойного нуля, условие разрешимости (9) имеет вид

$$\frac{1}{\tau}(1-\tau)\left(r_T^* - \frac{\sigma+\tau}{\sigma(1-\tau)}\right)\partial_{T_1} A + 2i\beta\left(\frac{k^2}{\beta^2} - 3\right)\partial_{X_1} A = 0. \quad (10)$$

Если в этом уравнении, как и выше,  $k^2/\beta^2 = 3$ , т. е. рассматривается наименее устойчивая мода колебаний, то для случая бифуркации Тейлора справедливо  $\partial_{T_1} A = 0$ . В случае же точки двойного нуля уравнение (10) удовлетворяется тождественно.

**5. Амплитудное уравнение в точке бифуркации Хопфа.** Выпишем теперь решение для  $\varphi_2$  с волновым числом, при котором происходит потеря устойчивости стационарного состояния:

$$\varphi_2 = [\mathbf{A}_2 \exp(i\Omega k^2 t - i\beta x) + \bar{\mathbf{A}}_2 \exp(-i\Omega k^2 t + i\beta x)] \sin(\pi z) + \mathbf{B}_2 \sin(2\pi z).$$

Здесь  $\mathbf{A}_2 = (a_{A2}, a_{T2}, a_{S2})$  и  $\mathbf{B}_2 = (0, b_{T2}, b_{S2})$  — векторы, зависящие от медленных переменных. Компоненты этих векторов имеют следующие значения:

$$b_{T2} = -\frac{1}{6\pi} \frac{|A|^2}{1+\Omega^2}, \quad b_{S2} = -\frac{1}{6\pi} \frac{|A|^2}{\tau^2 + \Omega^2},$$

$$a_{T2} = \frac{2}{9\pi^2} \frac{1}{1+i\Omega} \left( \partial_X A - \frac{3i\pi}{\sqrt{2}} a_{A2} \right), \quad a_{S2} = \frac{2}{9\pi^2} \frac{1}{\tau+i\Omega} \left( \partial_X A - \frac{3i\pi}{\sqrt{2}} a_{A2} \right).$$

Используя приведенные решения, составим систему уравнений, из которой можно найти  $\varphi_3$ . Эта система уравнений, так же как система для  $\varphi_2$ , имеет вид (8). Тогда функции  $\mathbf{Q}_3$  можно записать следующим образом, оставив в них только члены с  $A(X, T_2)$ :

$$Q_{A3} = \frac{3}{2} \pi^2 \left\{ \partial_{T_2} A - \frac{1}{3} (4i\Omega + 7\sigma) \partial_X^2 A + \frac{3\pi^2}{2(1-\tau)} [(\sigma+1)(\tau-i\Omega)\eta_S - (\sigma+\tau)(1+i\Omega)\eta] A \right\},$$

$$Q_{T3} = \frac{i\sqrt{2}}{3\pi} \frac{1}{1+i\Omega} \left[ \partial_{T_2} A - \frac{1}{3} (2i\Omega + 5) \partial_X^2 A + \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{1-i\Omega} A|A|^2 \right],$$

$$Q_{S3} = \frac{i\sqrt{2}}{3\pi} \frac{1}{\tau+i\Omega} \left[ \partial_{T_2} A - \frac{1}{3} (2i\Omega + 5\tau) \partial_X^2 A + \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\tau-i\Omega} A|A|^2 \right].$$

Условие (9) для рассматриваемой системы уравнений типа (8) имеет следующий вид:

$$(\sigma+1)(\tau-i\Omega)Q_{S3} - (\sigma+\tau)(1-i\Omega)Q_{T3} - (1-\tau)(i\beta/k^4)Q_{A3} = 0.$$

Проведя необходимые преобразования, получим, что амплитуда  $A(X, T_2)$  должна удовлетворять комплексному уравнению Гинзбурга — Ландау

$$\partial_{T_2} A = \alpha_1 A + \beta_1 A|A|^2 + \gamma_1 \partial_X^2 A. \quad (11)$$

Коэффициенты в этом уравнении выражаются формулами

$$\alpha_1 = \frac{3i\pi^2[\eta_S(\sigma+1)(\Omega^2 + \tau^2)(i\Omega + 1) - \eta(\sigma+\tau)(\Omega^2 + 1)(i\Omega + \tau)]}{4\Omega[i\Omega + (1 + \sigma + \tau)](1-\tau)},$$

$$\beta_1 = -\frac{i\pi^2}{8\Omega}, \quad \gamma_1 = i\Omega + 2 \frac{(\sigma + \sigma\tau + \tau)\Omega - i\sigma\tau}{\Omega[i\Omega + (1 + \sigma + \tau)]}.$$

### 6. Уравнение в форме возмущенного нелинейного уравнения Шредингера.

Полученное уравнение можно преобразовать к более удобному для дальнейших исследований виду. Положим  $\eta_S = 0$ . Это значит, что поведением системы можно управлять, изменяя градиент температуры в слое, градиент же солености остается постоянным, равным своему критическому значению. Исключим из уравнения коэффициент  $\alpha_R$  ( $i\alpha_1/\eta = \alpha_R + i\alpha_I$ ), осуществив замену зависимой переменной по формуле  $A = A' \exp(-i\alpha_R \eta T_2)$ . Тогда уравнение (11) примет вид

$$i\partial_{T_2} A' + \gamma_R \partial_X^2 A' - \beta_R A' |A'|^2 = i\alpha_I \eta A' + i\gamma_I \partial_X^2 A'. \quad (12)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha_R &= \frac{3}{4} \pi^2 \frac{\sigma + \tau}{1 - \tau} \frac{\Omega^2 + 1}{\Omega^2 + (1 + \tau + \sigma)^2} \left( \Omega + \frac{\tau(1 + \tau + \sigma)}{\Omega} \right), \\ \alpha_I &= \frac{3}{4} \pi^2 \frac{(\sigma + \tau)(\sigma + 1)}{1 - \tau} \frac{\Omega^2 + 1}{\Omega^2 + (1 + \tau + \sigma)^2}, \quad \beta_R = \frac{\pi^2}{8\Omega}, \\ \gamma_R &= \Omega - 2 \frac{(\sigma + \sigma\tau + \tau)\Omega^2 + \sigma\tau(1 + \tau + \sigma)}{\Omega[\Omega^2 + (1 + \tau + \sigma)^2]}, \quad \gamma_I = 2 \frac{(\sigma + \tau)(1 + \tau + \sigma + \tau\sigma)}{\Omega^2 + (1 + \tau + \sigma)^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, амплитудное уравнение приобрело вид нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) с возмущением в правой части. Отметим, что значения коэффициентов в этом уравнении не совпадают с приведенными в работе [10], где рассматривается уравнение типа (11), полученное методом разложения линейного дисперсионного соотношения в окрестности критического волнового числа.

Известно [11], что для диссипативно возмущенного НУШ возмущение слабо меняет вид решений, в силу чего при стремлении возмущающих членов к нулю эти решения переходят в решения НУШ без возмущенной правой части, которое можно решить в общем виде, используя метод обратной задачи рассеяния [7]. Если для НУШ характерны солитонные решения (как солитоны огибающей, так и солитоны над полем конечной плотности), то решения такого же вида будут иметь уравнение (12) при достаточно малых возмущающих членах. Тип НУШ определяется знаком при второй производной. В данном случае знак коэффициента  $\gamma_R$  меняется с изменением  $\Omega$  от нуля до бесконечности. Следовательно, НУШ в рассматриваемой задаче может быть двух типов:

— при  $\Omega \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \gamma_R &= -\frac{2\sigma\tau}{1 + \tau + \sigma} \Omega^{-1} + \left( 1 - \frac{2(\tau + \sigma + \tau\sigma)}{(1 + \tau + \sigma)^2} + \frac{2\tau\sigma}{(1 + \tau + \sigma)^3} \right) \Omega + O(\Omega^3), \\ \gamma_I &= 2 + \frac{2}{1 + \tau + \sigma} \left( \tau\sigma - 1 - \frac{\tau\sigma}{1 + \tau + \sigma} \right) + O(\Omega^2); \end{aligned}$$

— при  $\Omega \rightarrow \infty$

$$\gamma_R = \Omega - 2(\tau + \sigma + \tau\sigma)\Omega^{-1} + O(\Omega^{-3}), \quad \gamma_I = 2(\tau + \sigma)(1 + \tau + \sigma + \tau\sigma)\Omega^{-2} + O(\Omega^{-4}).$$

В пределе  $\Omega = 0$  коэффициент  $\gamma_R$  обращается в бесконечность и уравнение (12) теряет смысл. Этот предельный случай соответствует точке двойного нуля дисперсионного соотношения, амплитудное уравнение в  $\varepsilon^2$ -окрестности которой будет выведено ниже. При возрастании  $\Omega$  от нуля до бесконечности  $\gamma_R$  меняет знак, тогда как  $\gamma_I$  монотонно убывает, оставаясь всегда положительным. Частота  $\Omega_0$ , при которой  $\gamma_R$  обращается в нуль, определяется по формуле

$$\Omega_0^2 = \frac{1}{2} (1 + \sigma^2 + \tau^2) \left( \sqrt{1 + \frac{8\sigma\tau(1 + \tau + \sigma)}{(1 + \sigma^2 + \tau^2)^2}} - 1 \right).$$

При достаточно больших  $\sigma$  или малых  $\tau$  эта формула имеет асимптотику  $\Omega_0^2 \approx 2\tau\sigma(1 + \tau + \sigma)/(1 + \tau^2 + \sigma^2)$ .

**7. Преобразование к нелинейному уравнению Шредингера.** Рассмотрим два случая, когда выведенное амплитудное уравнение переходит в НУШ. Используя подстановку

$$A = \sqrt{\alpha_I/\beta_R} \exp[-i(\alpha_R + \alpha_I\rho^2)T_2]F(\alpha_I T_2, \sqrt{\alpha_I/\gamma_R}X),$$

где  $\rho$  — положительная константа, преобразуем уравнение (12) к виду

$$iF_T + F_{XX} - F(|F|^2 - \rho^2) = i\eta F + i\mu F_{XX}, \quad (13)$$

где  $\mu = \gamma_I/\gamma_R$ . Здесь и далее нижними индексами  $T$  и  $X$  обозначены частные производные по медленному времени  $T_2$  и координате  $X$  соответственно. Коэффициент  $\mu$  стремится к нулю при увеличении  $\Omega$  в соответствии с асимптотикой  $\mu \approx 2(\tau + \sigma)(1 + \tau + \sigma + \tau\sigma)\Omega^{-3}$ . Кроме того, в непосредственной близости от точки бифуркации Хопфа (в  $\varepsilon^3$ -окрестности) первый член в правой части уравнения (13) можно исключить. Вторым членом также можно пренебречь, если частота  $\Omega$  достаточно велика. В результате уравнение (12) принимает вид НУШ

$$iF_T + F_{XX} - F(|F|^2 - \rho^2) = 0.$$

Это уравнение имеет решения, известные как солитоны конечной плотности или «темные» солитоны [12]:

$$F = \rho \frac{\exp(i\zeta) + \exp \Phi}{1 + \exp \Phi}, \quad |F|^2 = \rho^2 \left(1 - \frac{\sin^2(\zeta/2)}{\operatorname{ch}^2 \Phi}\right), \quad (14)$$

$$\Phi = -\rho T \sin \zeta \pm (X - X_0)\sqrt{2\rho} \sin(\zeta/2).$$

Параметры  $\zeta$  и  $X_0$  характеризуют ширину и начальное положение солитона соответственно.

Таким образом, в настоящей работе обнаружено, что в рассматриваемой физической системе наряду с другими могут существовать решения типа «темных» солитонов, что справедливо в пределе больших частот Хопфа. По-видимому, конвекция с двойной диффузией при больших частотах Хопфа может встречаться в океанологических системах. Одной из таких систем является так называемая *термохалинная лестница* [13]. Инверсии термохалинной лестницы нередко имеют параметры стратификации, которые соответствуют началу диффузионной конвекции, причем частота Хопфа  $\Omega$  оказывается порядка  $10^3$ – $10^5$ .

Когда частота Хопфа стремится к нулю, уравнение (12) принимает иную асимптотическую форму. В этом случае положим

$$A = \sqrt{\alpha_I/\beta_R} \exp(-i\alpha_R T_2)F(\alpha_I T_2, \sqrt{-\alpha_I/\gamma_R}X).$$

Тогда

$$iF_T - F_{XX} - F|F|^2 = i\eta F + i\mu F_{XX},$$

где  $\mu$  имеет следующую низкочастотную асимптотику:

$$\mu \approx -\Omega \left(1 + \frac{\tau + \sigma}{\tau\sigma} - \frac{1}{1 + \tau + \sigma}\right).$$

Таким образом,  $\mu \rightarrow 0$  при  $\Omega \rightarrow 0$ . Как и в предыдущем случае, в правой части уравнения можно исключить первый член, предположив, что система находится в непосредственной близости (в  $\varepsilon^3$ -окрестности) от точки бифуркации Хопфа. Тогда уравнение (12) вновь принимает вид НУШ

$$iF_T = F_{XX} + F|F|^2.$$

Это уравнение имеет известные решения в виде солитонов огибающей.

Интересно отметить, что локализованные волновые пакеты, с которыми можно сравнить солитонные решения, наблюдались экспериментально в ряде работ, касающихся конвекции бинарных смесей при достаточно низких частотах Хопфа (см., например, [14, 15]).

**8. Уравнения в точках бифуркации Тейлора и двойного нуля.** Рассмотрим случай бифуркации Тейлора или бифуркации к стационарной валиковой конвекции. На прямой, где происходит эта бифуркация, дисперсионное соотношение имеет корень первого порядка. При членах порядка  $O(\varepsilon^2)$  уравнение имеет вид  $\partial_{T_1} A = 0$ , т. е. амплитуда не зависит от медленной переменной  $T_1$ . Для членов порядка  $O(\varepsilon^3)$  функций  $\mathbf{Q}_3$  получаем следующие выражения:

$$Q_{A3} = \frac{9}{4} \sigma \pi^4 [r_T^* (\eta_S - \eta) - \eta_S] A + \frac{3\pi}{\sqrt{2}} \partial_{T_2} A - \frac{7\sigma\pi^2}{2} \partial_{X_1}^2 A,$$

$$Q_{T3} = \frac{i\pi}{6\sqrt{2}} \left( A|A|^2 + \frac{4}{\pi^2} \partial_{T_2} A - \frac{20}{3\pi^2} \partial_{X_1}^2 A \right), \quad Q_{S3} = \frac{i\pi}{6\tau^2\sqrt{2}} \left( A|A|^2 + \frac{4\tau}{\pi^2} \partial_{T_2} A - \frac{20\tau^2}{3\pi^2} \partial_{X_1}^2 A \right).$$

При подстановке этих формул в условие совместимости имеем амплитудное уравнение

$$\partial_{T_2} A = \alpha_3 A - \beta_3 A|A|^2 - \gamma_3 \partial_{X_1}^2 A, \quad (15)$$

где

$$\alpha_3 = \frac{3}{2} \pi^2 \tau \frac{r_T^* (\eta_S - \eta) - \eta_S}{r_T^* (1 - \tau) - (1 + \tau/\sigma)}, \quad \beta_3 = \frac{\pi^2}{4\tau} \frac{r_T^* (1 - \tau^2) - 1}{r_T^* (1 - \tau) - (1 + \tau/\sigma)},$$

$$\gamma_3 = \frac{4\tau}{r_T^* (1 - \tau) - (1 + \tau/\sigma)}.$$

Данное уравнение по виду аналогично уравнению, выведенному в работе [2], и в случае отсутствия градиента солености сводится к нему.

Рассмотрим  $\varepsilon^2$ -окрестность точки, в которой пересекаются прямые, где наблюдаются бифуркации Хопфа и Тейлора соответственно. В этой точке дисперсионное соотношение имеет корень второго порядка (бифуркация Такенса — Богданова). Как отмечено выше, для случая наиболее нестабильной конвективной моды уравнение, получающееся при членах порядка  $O(\varepsilon^2)$  удовлетворяется тождественно, поэтому отсутствует необходимость использовать переменную  $T_2$  либо вводить другие медленные переменные. Для членов порядка  $O(\varepsilon^3)$  функций  $\mathbf{Q}_3$  получим следующие выражения:

$$Q_{A3} = \frac{9\pi^4}{4(1 - \tau)} [(\sigma + 1)\eta_S - (1 + \sigma/\tau)\eta] A - \frac{i\pi}{\sqrt{2}} \partial_{X_1} \partial_{T_1} A - \frac{7\sigma\pi^2}{2} \partial_{X_1}^2 A,$$

$$Q_{T3} = \frac{i\pi}{6\sqrt{2}} \left( A|A|^2 - \frac{8}{3\pi^4} \partial_{T_1}^2 A - \frac{20}{3\pi^2} \partial_{X_1}^2 A \right) + \frac{2}{9\pi^2} \partial_{X_1} \partial_{T_1} A,$$

$$Q_{S3} = \frac{i\pi}{6\tau^2\sqrt{2}} \left( A|A|^2 - \frac{8}{3\pi^4} \partial_{T_1}^2 A - \frac{20\tau}{3\pi^2} \partial_{X_1}^2 A \right) + \frac{2}{9\pi^2\tau} \partial_{X_1} \partial_{T_1} A.$$

После подстановки этих выражений в условие отсутствия секулярных членов получаем уравнение

$$\partial_{T_1}^2 A - c^2 \partial_{X_1}^2 A = \alpha_2 A + \beta_2 A|A|^2, \quad (16)$$

где

$$c^2 = \frac{6\pi^2\sigma\tau}{1 + \tau + \sigma}, \quad \beta_2 = \frac{3}{8} \pi^4, \quad \alpha_2 = \frac{9}{4} \pi^4 \tau^2 \frac{(1 + \sigma/\tau)\eta - (1 + \sigma)\eta_S}{(1 - \tau)(1 + \tau + \sigma)}.$$

Уравнения такого типа известны как  $\varphi^4$ -уравнения, и их нельзя точно проинтегрировать методом обратной задачи рассеяния [7]. В ряде работ рассматриваются амплитудные уравнения в двойной точке для случая конвекции бинарных смесей [16–18]. Согласно [19] результаты, полученные для термохалинной конвекции, распространяются на случай конвекции бинарных смесей, где необходимо учитывать эффект термодиффузии. Поэтому для последнего случая справедливы все выведенные в настоящей статье уравнения в точках бифуркации с преобразованными соответственно параметрами задачи (числами Прандтля, Льюиса и Рэлея). В работе [18] получено амплитудное уравнение в точке двойного нуля, имеющее вид  $\partial_{T_1}^2 A = C_1 A + C_2 A |A|^2$  в главном порядке по  $\varepsilon$  ( $C_1$  и  $C_2$  — константы). Уравнение (16) можно рассматривать как его обобщение на случай пространственных модуляций. В работе [16] представлено амплитудное уравнение в точке двойного нуля другого типа, содержащее член с третьей производной вида  $\partial_t \partial_x^2 A$ . Поэтому оно отличается от уравнений, выведенных в рамках использованного в данной работе метода многомасштабных разложений.

**9. Выводы.** Подводя основные итоги исследования, можно отметить следующее.

1. В работе методом разложения производной выведены амплитудные уравнения для системы с термохалинной конвекцией в окрестности основных точек бифуркации, характерных для этой системы. В частности, в рамках единого подхода получено комплексное уравнение Гинзбурга — Ландау (11) в случае бифуркации Хопфа, уравнение (15) типа Ньюэла — Уайтхеда в случае бифуркации Тейлора и уравнение (16) типа  $\varphi^4$  в окрестности точки двойного нуля дисперсионного соотношения.

2. Приведены аналитические выражения для коэффициентов рассматриваемых уравнений. Для уравнения в окрестности точек бифуркации Хопфа формулы, определяющие его коэффициенты, уточняют полученные ранее в работе [10] результаты. Для двух других уравнений такие формулы, насколько известно автору, ранее в литературе не приводились.

3. Показано, что амплитудное уравнение в окрестности точек бифуркации Хопфа в случае малых и больших частот сводится к возмущенному нелинейному уравнению Шредингера (12) с характерными для него решениями в виде солитонов огибающей. В высокочастотном пределе исследуемой физической системе присущи структуры типа «темных» солитонов (14).

4. Выведенное в точке двойного нуля дисперсионного соотношения уравнение типа  $\varphi^4$  можно рассматривать как обобщение уравнения, полученного в работе [18], на случай медленных пространственных модуляций амплитуды.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Dean A. E., Knobloch E., Toomre J.** Travelling waves and chaos in thermosolutal convection // Phys. Rev. A. 1987. V. 36. P. 2862–2869.
2. **Newell A. C., Whitehead J. A.** Finite bandwidth, finite amplitude convection // J. Fluid Mech. 1968. V. 38. P. 279–303.
3. **Coullet P., Fauve S., Tirapegui E.** Large scale instability of nonlinear standing waves // J. Phys. Lett. 1985. V. 46. P. 787–791.
4. **Cross M. C.** Structure of nonlinear travelling wave states in finite geometries // Phys. Rev. A. 1988. V. 38. P. 3593–3600.
5. **Huppert H. E., Moore D. R.** Nonlinear double-diffusive convection // J. Fluid Mech. 1976. V. 78. P. 821–854.
6. **Knobloch E., Moore D. R., Toomre J., Weiss N. O.** Transitions to chaos in two-dimensional double-diffusive convection // J. Fluid Mech. 1986. V. 166. P. 409–448.

7. **Dodd R., Eilbeck J., Gibbon J., Morris H.** Solitons and nonlinear wave equations. L.: Acad. Press Inc., 1982.
8. **Nayfeh A. H.** Perturbation methods. N. Y.; L.; Sydney; Toronto: John Wiley and Sons, 1973.
9. **Nayfeh A. H.** Introduction to perturbation techniques. N. Y.; Chichester; Brisbane; Toronto: John Wiley and Sons, 1981.
10. **Bretherton C. S., Spiegel E. A.** Intermittency through modulational instability // Phys. Lett. 1983. V. 96A. P. 152–156.
11. **Ablowitz M., Segur H.** Solitons and the inverse scattering transform. Philadelphia: SIAM, 1981.
12. **Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.** Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
13. **Marmorino G. O.** Intrusions and diffusive interfaces in a salt-finger staircase // Deep-Sea Res. 1990. V. 38. P. 1431–1454.
14. **Predtechensky A. A., McCormick W. D., Swift J. B., et al.** Travelling wave instability in sustained double-diffusive convection // Phys. Fluids. 1994. V. 6. P. 3923–3935.
15. **Kolodner P.** Counter-propagating quasilinear wave packets in binary fluid convection // Phys. Rev. Lett. 1992. V. 69. P. 2519–2522.
16. **Brand H., Hohenberg P. C., Steinberg V.** Codimension-2 bifurcation for convection in binary fluid mixtures // Phys. Rev. A. 1984. V. 30. P. 2548–2561.
17. **Cross M. C., Kim K.** Linear instability and the codimension-2 region in binary fluids convection between rigid impermeable boundaries // Phys. Rev. A. 1988. V. 37. P. 3909–3920.
18. **Knobloch E.** Oscillatory convection in binary mixtures // Phys. Rev. A. 1986. V. 34. P. 1538–1549.
19. **Knobloch E.** Convection in binary fluids // Phys. Fluids. 1980. V. 23. P. 1918–1920.

*Поступила в редакцию 22/IX 1998 г.,  
в окончательном варианте — 17/V 1999 г.*

---