УДК 519.653

Анализ формул численного дифференцирования на сетке Шишкина при наличии пограничного слоя*

А.И. Задорин

Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090

E-mail: zadorin@ofim.oscsbras.ru

Задорин А.И. Анализ формул численного дифференцирования на сетке Шишкина при наличии пограничного слоя // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2018. — Т. 21, № 3. — С. 243–254.

Исследуется вопрос численного дифференцирования функций с большими градиентами в пограничном слое. Проблема в том, что в случае функций с большими градиентами и равномерной сетки относительная погрешность классических разностных формул для производных может быть значительной. Предлагается использовать сетку Шишкина, чтобы относительная погрешность формул не зависела от малого параметра. Получены оценки погрешности, зависящие от числа узлов разностной формулы для производной задаваемого порядка. Доказано, что оценка погрешности равномерна по малому параметру. В случае равномерной сетки выделена область пограничного слоя, вне которой формулы численного дифференцирования обладают погрешностью, равномерной по малому параметру. Приведены результаты численных экспериментов.

DOI: 10.15372/SJNM20180301

Ключевые слова: *функция одной переменной, пограничный слой, формула численного дифференцирования, сетка Шишкина, оценка погрешности.*

Zadorin A.I. The analysis of numerical differentiation formulas on the Shishkin mesh with of a boundary layer // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2018. — Vol. 21, № 3. — P. 243–254.

The problem of numerical differentiation of functions with large gradients in the boundary layer is investigated. The problem is that in the case of functions with large gradients and a uniform grid, the relative error of the classical difference formulas for derivatives can be significant. It is proposed to use the Shishkin mesh to obtain a relative error of the formulas independent of a small parameter. Error estimates that depend on the number of nodes of the difference formulas for a derivative of a given order are obtained. It is proved that the error estimate is uniform in terms of a small parameter. In the case of the uniform grid, the region of the boundary layer is allocated, outside of which the numerical differentiation formulas have an error that is uniform in terms of a small parameter. The results of the numerical experiments are presented.

Keywords: *one-variable function, boundary layer, numerical differentiation formula, Shishkin mesh, error estimate.*

1. Введение

Известно, что на основе сингулярно возмущенных задач моделируются конвективно-диффузионные процессы с преобладающей конвекцией. Применение классических разностных схем на равномерной сетке для численного решения таких задач приводит к

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты № 15-01-06584, № 16-01-00727).

существенным погрешностям, если малый параметр соизмерим с шагом сетки. Для достижения равномерной по параметру сходимости разностных схем широко используются сетки, сгущающиеся в пограничном слое.

Представляет интерес разработка сплайн-интерполяционных методов и формул численного дифференцирования для функций с большими градиентами в пограничных слоях, в том числе на сетках, на которых строятся равномерно сходящиеся разностные схемы. Применение интерполяции Лагранжа и классических формул численного дифференцирования, основанных на такой интерполяции [1], к функциям с большими градиентами в пограничном слое может приводить к существенным погрешностям. Это было показано в [2]. Для того, чтобы погрешность формул численного дифференцирования не зависела от больших градиентов функции в пограничном слое, в [2–4] исследован подход, основанный на подгонке разностных формул для вычисления производных к составляющей, отвечающей за большие градиенты функции в пограничном слое. При таком подходе сетка может быть равномерной.

В работе [5] доказано, что если многочлен Лагранжа для интерполяции функций с большими градиентами в экспоненциальном пограничном слое применять на сетке Шишкина [6, 7], то оценка погрешности интерполяции становится равномерной по малому параметру.

В данной работе исследуем возможность применения на сетке Шишкина классических разностных формул для производных, построенных на основе дифференцирования многочлена Лагранжа, к функциям с большими градиентами в экспоненциальном пограничном слое.

Итак, пусть функция $u(x)$ представима в виде:

$$u(x) = q(x) + \Phi(x), \quad x \in [0,1], \tag{1.1}$$

где для составляющих $q(x), \Phi(x)$ справедливы оценки производных:

$$|q^{(j)}(x)| \le C_1, \quad |\Phi^{(j)}(x)| \le \frac{C_1}{\varepsilon^j}\, e^{-\alpha x/\varepsilon}, \quad 0 \le j \le m_0, \tag{1.2}$$

где $\alpha > 0$, $\varepsilon \in (0,1]$, C_1 — некоторая постоянная, не зависящая от параметра ε. Коэффициент α отделен от нуля, m_0 будет задано ниже.

Согласно (1.2), регулярная составляющая $q(x)$ имеет производные, ограниченные до некоторого порядка m_0, а производные сингулярной составляющей $\Phi(x)$ не ограничены равномерно по параметру ε.

В соответствии с [6–8], декомпозиция (1.1) функции $u(x)$ в виде суммы регулярной и сингулярной составляющих, с ограничениями (1.2), справедлива для решения сингулярно возмущенной краевой задачи:

$$\varepsilon u''(x) + a_1(x)u'(x) - a_2(x)u(x) = f(x), \quad u(0) = A, \quad u(1) = B, \tag{1.3}$$

где $a_1(x) \ge \alpha > 0$, $a_2(x) \ge 0$, $\varepsilon > 0$, функции $a_1(x)$, $a_2(x)$, $f(x)$ — достаточно гладкие. При малых значениях параметра ε решение задачи (1.3) имеет погранслойную область больших градиентов у границы $x = 0$, чему соответствует представление (1.1). Заметим, что в виде (1.1) может быть представлено и решение сингулярно возмущенной задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка [9, 10].

Таким образом, представление (1.1) справедливо для широкого класса функций, являющихся решением сингулярно возмущенных задач.

На примере покажем, что если функция $u(x)$ имеет представление (1.1), то погрешность классической формулы для производной на равномерной сетке может быть существенной. Пусть $u(x) = e^{-x/\varepsilon}$, $x \in [0,1]$. Выпишем формулу для производной:

$$u'(x) \approx \frac{u_k - u_{k-1}}{h}, \quad x \in [x_{k-1}, x_k].$$

Тогда при $\varepsilon = h$ будет $\varepsilon|(u_1 - u_0)/h - u'(0)| = e^{-1}$. Получаем, что точность не повышается с уменьшением шага сетки при $\varepsilon = h$. Относительная погрешность формулы для вычисления производной не равномерна по параметру ε. Итак, задача построения разностных формул для вычисления производных функций, имеющих представление (1.1), актуальна.

Пусть C и C_j — положительные постоянные, не зависящие от параметра ε и числа интервалов сетки N. Разные величины будем ограничивать одной постоянной C, если это не вызывает недоразумений.

2. Анализ формул численного дифференцирования на сетке Шишкина

В соответствии с [6], зададим на интервале $[0, 1]$ кусочно-равномерную сетку:

$$\Omega = \{x_k : \ x_k = x_{k-1} + h_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N, \quad x_0 = 0, \ x_N = 1\} \tag{2.1}$$

с шагом h в пограничном слое $[0, \sigma]$ и с шагом H вне пограничного слоя:

$$h_k = h = \frac{2\sigma}{N}, \quad 1 \le k \le \frac{N}{2}; \qquad h_k = H = \frac{2(1-\sigma)}{N}, \quad \frac{N}{2} < k \le N,$$

где $\sigma \in (0, 1/2]$. Параметр σ зададим ниже.

Оценим погрешность формул численного дифференцирования функций, имеющих декомпозицию (1.1), на сетке Шишкина (2.1). При оценке погрешности будем считать, что функция $u(x)$ задана в узлах сетки.

При решении сингулярно возмущенных задач с применением разностной схемы функция $u(x)$ в узлах сетки может быть найдена с некоторой погрешностью. Разностные схемы на сетке Шишкина, сходящиеся равномерно по параметру ε, разрабатывались в ряде работ, например в [6, 7]. Используя значения функции $u(x)$ в узлах сетки, мы не учитываем влияние погрешностей в задании этой функции на погрешность формул численного дифференцирования.

Итак, пусть заданы значения $u_k = u(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, N$. Влияние погрешности в задании u_k на погрешность формул численного дифференцирования обсудим в замечании.

Будем строить разностные формулы для вычисления производных функции $u(x)$ на подинтервалах с m узлами, покрывающих исходный интервал $[0, 1]$. Предполагаем, что N кратно $2(m-1)$, чтобы каждый подинтервал, на котором строится формула для производной, был целиком внутри или вне области пограничного слоя $[0, \sigma]$, $\sigma = x_{N/2}$.

Итак, разбиваем исходный интервал $[0, 1]$ на $N/(m-1)$ подинтервалов:

$$[0, 1] = \bigcup_{k=0,\, m-1}^{N-m+1} [x_k, x_{k+m-1}].$$

Для построения разностной формулы для производной на интервале $[x_k, x_{k+m-1}]$ осуществляем на этом интервале интерполяцию функции $u(x)$ многочленом Лагранжа:

$$L_{k,m}(u,x) = \sum_{j=k}^{k+m-1} u_j P_{j,k}(x),\ u_j = u(x_j), \tag{2.2}$$

где множитель Лагранжа $P_{j,k}(x)$ имеет вид:

$$P_{j,k}(x) = \prod_{\substack{i=k\\ i\neq j}}^{k+m-1} \frac{x-x_i}{x_j-x_i}.$$

Для сетки (2.1) зададим

$$\sigma = \min\Big\{\frac{1}{2}, \frac{m\varepsilon}{\alpha}\ln N\Big\}. \tag{2.3}$$

В соответствии с (1.1), (1.2), в области пограничного слоя $u^{(n)}(x) = O(1/\varepsilon^n)$, где параметр ε может быть близким к нулю. Поэтому перейдем к оценке относительной погрешности, получаемой умножением абсолютной погрешности на ε^n.

Теорема 1. *Пусть для функции $u(x)$ справедливо представление* (1.1) *с ограничениями* (1.2) *при $m_0 = m+n$, где m — число узлов в разностной формуле для производной, n — номер вычисляемой производной. Пусть сетка Ω задана согласно* (2.1), (2.3). *Тогда для некоторой постоянной C на каждом интервале $[x_k, x_{k+m-1}]$ при $k = 0, m-1, \ldots, N-m+1$ справедлива одна из оценок погрешности*:

$$\varepsilon^n\big|u^{(n)}(x) - L^{(n)}_{k,m}(u,x)\big| \le C\Big(\frac{\ln N}{N}\Big)^{m-n}, \quad n\ge 0, \quad \sigma < 1/2, \quad x_{k+m-1}\le\sigma, \tag{2.4}$$

$$\varepsilon^n\big|u^{(n)}(x) - L^{(n)}_{k,m}(u,x)\big| \le C\Big[\frac{1}{N^m}e^{-\alpha(x_k-\sigma)/\varepsilon} + \frac{\varepsilon^n}{N^{m-n}}\Big], \quad n\ge 0, \quad \sigma < 1/2, \quad x_k\ge\sigma, \tag{2.5}$$

$$\varepsilon^n\big|u^{(n)}(x) - L^{(n)}_{k,m}(u,x)\big| \le C\Big(\min\Big(\frac{\ln N}{N}, \frac{1}{N\varepsilon}\Big)\Big)^{m-n}, \quad n\ge 0, \quad \sigma = 1/2. \tag{2.6}$$

Доказательство. Для погрешности интерполяции многочленом Лагранжа известно представление [1, с. 89]:

$$u(x) - L_{k,m}(u,x) = w_{k,m}(x)[x, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+m-1}]u, \tag{2.7}$$

где $[x, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+m-1}]u$ — разделенная разность для функции $u(x)$ [1, с. 38],

$$w_{k,m}(x) = (x-x_k)(x-x_{k+1})\cdots(x-x_{k+m-1}).$$

На основе дифференцирования соотношения (2.7) в [1, с. 89] получена формула для погрешности приближения n-й производной на основе многочлена Лагранжа:

$$u^{(n)}(x) - L^{(n)}_{k,m}(u,x) = \sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{(n-j)!}w^{(n-j)}_{k,m}(x)[\underbrace{x,\ldots,x}_{j+1\ \text{раз}}, x_k, \ldots, x_{k+m-1}]u, \quad n\ge 0. \tag{2.8}$$

В случае произвольных узлов $y_1, y_2, \ldots, y_p$ для некоторого $s \in (\min\{y_j\}, \max\{y_j\})$ справедливо представление [1, с. 40]:

$$[y_1, y_2, \ldots, y_p]u = \frac{u^{(p-1)}(s)}{(p-1)!}. \tag{2.9}$$

Учитывая (2.9) в (2.8), при всех $x\in[x_k, x_{k+m-1}]$ получаем

$$|u^{(n)}(x)-L_{k,m}^{(n)}(u,x)|\le\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{(n-j)!(m+j)!}\max_{[x_k,x_{k+m-1}]}|u^{(m+j)}(s)|\,|w_{k,m}^{(n-j)}(x)|,\ \ n\ge 0. \quad (2.10)$$

Используем представление функции (1.1) и получаем

$$|u^{(n)}(x)-L_{k,m}^{(n)}(u,x)|\le|q^{(n)}(x)-L_{k,m}^{(n)}(q,x)|+|\Phi^{(n)}(x)-L_{k,m}^{(n)}(\Phi,x)|. \quad (2.11)$$

Учитывая оценки (1.2), из (2.10) для некоторой постоянной C_1 и для произвольного интервала $[x_k,x_{k+m-1}]$ получаем

$$|q^{(n)}(x)-L_{k,m}^{(n)}(q,x)|\le C_1\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{(n-j)!(m+j)!}\tau_k^{m+j-n},\quad n\ge 0, \quad (2.12)$$

где τ_k — шаг интервала $[x_k,x_{k+m-1}]$.

Из (2.12) следует, что для некоторой постоянной C_2:

$$|q^{(n)}(x)-L_{k,m}^{(n)}(q,x)|\le C_2\tau_k^{m-n}\le\frac{C_3}{N^{m-n}},\quad x\in[x_k,x_{k+m-1}],\quad n\ge 0. \quad (2.13)$$

Итак, получена оценка погрешности (2.13) для регулярной составляющей $q(x)$.

Теперь получим оценку погрешности на сингулярной составляющей $\Phi(x)$.

Рассмотрим случай $\sigma<1/2$. При этом рассмотрим случаи, когда интервал $[x_k,x_{k+m-1}]$ находится в пограничном слое и вне его.

1). Пусть $x_{k+m-1}\le\sigma$. Тогда интервал $[x_k,x_{k+m-1}]$ находится в погранслое, и в соответствии с (2.1)

$$\tau_k=\frac{2m\varepsilon}{\alpha N}\ln N. \quad (2.14)$$

Учитывая (1.2), (2.10), для некоторой постоянной C_4 получаем

$$|\Phi^{(n)}(x)-L_{k,m}^{(n)}(\Phi,x)|\le C_4\sum_{j=0}^{n}\frac{\tau_k^{m-n+j}}{\varepsilon^{m+j}}.$$

Следовательно,

$$\varepsilon^n|\Phi^{(n)}(x)-L_{k,m}^{(n)}(\Phi,x)|\le C_4\sum_{j=0}^{n}\Big(\frac{\tau_k}{\varepsilon}\Big)^{m-n+j}.$$

Учитывая (2.14), для некоторой постоянной C_5 получаем

$$\varepsilon^n|\Phi^{(n)}(x)-L_{k,m}^{(n)}(\Phi,x)|\le C_5\Big(\frac{\ln N}{N}\Big)^{m-n},\ \ x\in[x_k,x_{k+m-1}],\ \ x_{k+m-1}\le\sigma. \quad (2.15)$$

Из оценок (2.11), (2.13), (2.15) следует (2.4).

2). Пусть $x_k\ge\sigma$. Используем оценку

$$\varepsilon^n\Big|L_{k,m}^{(n)}(\Phi,x)-\Phi^{(n)}(x)\Big|\le\varepsilon^n\Big|L_{k,m}^{(n)}(\Phi,x)\Big|+\varepsilon^n|\Phi^{(n)}(x)|. \quad (2.16)$$

В силу условий (1.2) и (2.3) при $x_k\ge\sigma$

$$\varepsilon^n|\Phi^{(n)}(x)|\le\frac{C_6}{N^m}e^{-\alpha(x_k-\sigma)/\varepsilon}. \quad (2.17)$$

Из (2.2) для некоторой постоянной C_7 получаем

$$|L_{k,m}^{(n)}(u,x)| = \left|\sum_{j=k}^{k+m-1} u_j P_{j,k}^{(n)}(x)\right| \le \max_{k\le j\le k+m-1} |u_j| \frac{C_7}{\tau_k^n}. \tag{2.18}$$

Учитывая (1.2), (2.3), из (2.18) получаем, что при $x_k \ge \sigma$

$$|L_{k,m}^{(n)}(\Phi,x)| \le \frac{C_7}{N^{m-n}} e^{-\alpha(x_k-\sigma)/\varepsilon}. \tag{2.19}$$

Из (2.11), (2.13), (2.16), (2.17), (2.19) получаем (2.5).

Рассмотрим случай $\sigma = 1/2$, когда сетка является равномерной. Из (2.10) имеем

$$\varepsilon^n |u^{(n)}(x) - L_{k,m}^{(n)}(u,x)| \le C_8 \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{N\varepsilon}\right)^{m-n+j} \le C_9 \Big(\frac{1}{N\varepsilon}\Big)^{m-n}, \quad n \ge 0. \tag{2.20}$$

Из условия $\sigma = 1/2$ следует, что $\varepsilon \ge \alpha/(2m\ln N)$. Тогда из (2.20) получаем

$$\varepsilon^n |u^{(n)}(x) - L_{k,m}^{(n)}(u,x)| \le C_{10} \Big(\frac{\ln N}{N}\Big)^{m-n}, \quad n \ge 0. \tag{2.21}$$

Из (2.20), (2.21) следует (2.6). □

Заметим, что из оценок (2.4)–(2.6) следуют оценки погрешности, равномерные по параметру ε. Полученная оценка погрешности (2.6) при $\varepsilon = 1$ соответствует известной оценке погрешности в регулярном случае, когда производные функции являются равномерно ограниченными [1].

Оценка погрешности вне пограничного слоя. Вне области пограничного слоя можно получить оценку абсолютной погрешности, равномерную по ε.

Случай $\sigma < 1/2$. Из оценки (2.5) следует, что при $x_k \ge \sigma$ для некоторой постоянной C_{11}:

$$\big|u^{(n)}(x) - L_{k,m}^{(n)}(u,x)\big| \le \frac{C_{11}}{N^{m-n}}, \quad x \in [x_k, x_{k+m-1}], \tag{2.22}$$

если

$$e^{-\alpha\varepsilon^{-1}(x_k-\sigma)} \le (N\varepsilon)^n. \tag{2.23}$$

В случае $\varepsilon \ge 1/N$ неравенство (2.23) выполнено, поэтому справедлива оценка (2.22) при $x_k \ge \sigma$.

Пусть $\varepsilon < 1/N$. Тогда оценка (2.23) выполняется, если

$$x_k \ge \sigma^* = \sigma - \frac{n\varepsilon}{\alpha} \ln(N\varepsilon). \tag{2.24}$$

Итак, в случае $\sigma < 1/2$ при $\varepsilon \ge 1/N$, $x_k \ge \sigma$ на интервале $[x_k, x_{k+m-1}]$ для некоторой постоянной C_{11} справедлива оценка погрешности (2.22). В случае $\sigma < 1/2$ при $\varepsilon < 1/N$ оценка (2.22) справедлива при выполнении условия (2.24).

Несложно показать, что $0 < \sigma^* - \sigma \le n(\alpha e)^{-1}/N$.

Случай $\sigma = 1/2$. Применяя неравенство (2.10) к функции $\Phi(x)$, учитывая (1.2) и оценивая снизу ε в соответствии с (2.3), для некоторой постоянной C_{12} получаем

$$|\Phi^{(n)}(x) - L_{k,m}^{(n)}(\Phi,x)| \le C_{12} \Big(\frac{\ln N}{N}\Big)^{m-n} \varepsilon^{-n} e^{-\alpha\varepsilon^{-1}x_k}, \quad n \ge 0. \tag{2.25}$$

Учитывая (2.11), (2.13), (2.25), имеем

$$|u^{(n)}(x) - L^{(n)}_{k,m}(u,x)| \le \frac{C_3}{N^{m-n}} + C_{12}\Big(\frac{\ln N}{N}\Big)^{m-n} \varepsilon^{-n} e^{-\alpha\varepsilon^{-1}x_k}, \quad n \ge 0. \tag{2.26}$$

Условие $\varepsilon^{-n}e^{-\alpha\varepsilon^{-1}x_k} \le 1$ равносильно следующему:

$$x_k \ge -\frac{n\varepsilon}{\alpha}\ln\varepsilon. \tag{2.27}$$

Из (2.26) получаем, что в случае $\sigma = 1/2$ при выполнении условия (2.27) для некоторой постоянной C_{13} справедлива оценка погрешности:

$$|u^{(n)}(x) - L^{(n)}_{k,m}(u,x)| \le C_{13}\left(\frac{\ln N}{N}\right)^{m-n}, \quad x \in [x_k, x_{k+m-1}], \quad n \ge 0.$$

Замечание. Пусть функция $u(x)$ в узлах сетки задана с погрешностью δ: $\tilde u_k = u_k + \delta_k$, $|\delta_k| \le \delta$, $k = 0, 1, \ldots, N$. Тогда

$$|u^{(n)}(x) - L^{(n)}_{k,m}(\tilde u,x)| \le |u^{(n)}(x) - L^{(n)}_{k,m}(u,x)| + |L^{(n)}_{k,m}(\tilde u - u,x)| \le |u^{(n)}(x) - L^{(n)}_{k,m}(u,x)| + \frac{C_{14}\delta}{\tau_k^n},$$

где C_{14} — некоторая постоянная, τ_k — шаг сетки на интервале $[x_k, x_{k+m-1}]$. Оценка погрешности складывается из оценки погрешности формулы численного дифференцирования и оценки вычислительной погрешности. Оценка вычислительной погрешности, связанной с неточностью задания $u(x)$, согласуется с [1, с. 93].

3. Оценка погрешности формул численного дифференцирования на равномерной сетке вне пограничного слоя

Во введении показано, что на равномерной сетке относительная погрешность формул численного дифференцирования в области пограничного слоя может быть порядка $O(1)$. Исследуем применимость этих формул вне области пограничного слоя. Пусть Ω^h — равномерная сетка интервала $[0,1]$ с шагом h и узлами $x_k = kh$, $k = 0, 1, \ldots, N$.

Теорема 2. *Пусть*

$$\varepsilon \ge h, \quad x_k \ge -\frac{\varepsilon m}{\alpha}\ln\varepsilon$$

или

$$\varepsilon \le h, \quad x_k \ge -\frac{\varepsilon}{\alpha}\Big[n\ln\frac{\varepsilon}{h} + m\ln\varepsilon\Big].$$

Тогда для некоторой постоянной C справедлива оценка погрешности:

$$|u^{(n)}(x) - L^{(n)}_{k,m}(u,x)| \le Ch^{m-n}, \quad x \in [x_k, x_{k+m-1}]. \tag{3.1}$$

Доказательство. В соответствии с (2.10), для некоторой постоянной C_{15}:

$$|\Phi^{(n)}(x) - L^{(n)}_{k,m}(\Phi,x)| \le C_{15}\sum_{j=0}^{n}\Big(\frac{h}{\varepsilon}\Big)^{m-n+j}\varepsilon^{-n}e^{-\alpha x_k/\varepsilon}, \ x \in [x_k, x_{k+m-1}]. \tag{3.2}$$

Случай $\varepsilon \ge h$. Из (3.2) получаем, что для некоторой постоянной C_{16}:

$$|\Phi^{(n)}(x) - L^{(n)}_{k,m}(\Phi,x)| \le C_{16}h^{m-n}\varepsilon^{-m}e^{-\alpha x_k/\varepsilon}, \quad x \in [x_k, x_{k+m-1}]. \tag{3.3}$$

Несложно проверить, что неравенство $\varepsilon^{-m}e^{-\alpha x_k/\varepsilon} \le 1$ при $\varepsilon \in (0,1]$ можно записать в виде

$$x_k \ge -\frac{\varepsilon m}{\alpha}\ln\varepsilon. \tag{3.4}$$

Из (3.3) получаем, что при выполнении условия (3.4) справедлива оценка погрешности

$$|\Phi^{(n)}(x) - L^{(n)}_{k,m}(\Phi, x)| \le C_{16}h^{m-n}, \quad x \in [x_k, x_{k+m-1}]. \tag{3.5}$$

Учитывая (2.11), (2.13), (3.5), получаем оценку (3.1)

Случай $\varepsilon \le h$. Из (3.2) получаем

$$|\Phi^{(n)}(x) - L^{(n)}_{k,m}(\Phi, x)| \le C_{17}\Big(\frac{h}{\varepsilon}\Big)^m \varepsilon^{-n}e^{-\alpha x_k/\varepsilon} = C_{17}h^{m-n}h^n\varepsilon^{-(n+m)}e^{-\alpha x_k/\varepsilon}. \tag{3.6}$$

Неравенство $h^n\varepsilon^{-(n+m)}e^{-\alpha x_k/\varepsilon} \le 1$ равносильно следующему:

$$x_k \ge -\frac{\varepsilon}{\alpha}\Big[n\ln\frac{\varepsilon}{h} + m\ln\varepsilon\Big]. \tag{3.7}$$

Учитывая (3.6), (3.7), получаем (3.1). □

В соответствии с теоремой 2, определена область интервала $[0,1]$, в которой в случае равномерной сетки справедлива оценка погрешности (3.1) формулы численного дифференцирования $L^{(n)}_{k,m}(u, x)$, равномерная по параметру ε.

4. Численные эксперименты

Рассмотрим функцию вида (1.1)

$$u(x) = \cos\frac{\pi x}{2} + e^{-x/\varepsilon}, \quad x \in [0,1],\ \varepsilon > 0. \tag{4.1}$$

Выпишем разностные формулы для первой производной с числом узлов от 2 до 4:

$$u'(x) \approx \Lambda^1_{2,N,\varepsilon}(x) = \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau_k}, \quad x \in [x_{k-1}, x_k], \tag{4.2}$$

$$u'(x) \approx \Lambda^1_{3,N,\varepsilon}(x) = \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau_k} + \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{2\tau_k^2}(2x - x_k - x_{k-1}),\ x \in [x_{k-1}, x_{k+1}], \tag{4.3}$$

$$u'(x) \approx \Lambda^1_{4,N,\varepsilon}(x) = \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau_k} + \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{2\tau_k^2}(2x - x_k - x_{k-1}) + \\ \frac{u_{k+2} - 3u_{k+1} + 3u_k - u_{k-1}}{6\tau_k^3}(3x^2 - \tau_k^2 - 6x_kx + 3x_k^2), \quad x \in [x_{k-1}, x_{k+2}]. \tag{4.4}$$

Выпишем разностные формулы для второй производной:

$$u''(x) \approx \Lambda^2_{3,N,\varepsilon}(x) = \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{\tau_k^2}, \quad x \in [x_{k-1}, x_{k+1}], \tag{4.5}$$

$$u''(x) \approx \Lambda^2_{4,N,\varepsilon}(x) = \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{\tau_k^2} + \frac{u_{k+2} - 3u_{k+1} + 3u_k - u_{k-1}}{\tau_k^3}(x - x_k), \tag{4.6}$$

где $x \in [x_{k-1}, x_{k+2}]$. В формулах (4.2)–(4.6) τ_k — шаг интервала, на котором вычисляется производная. Шаги сетки соответствуют (2.1), при этом $\tau_k = h$ в пограничном слое и $\tau_k = H$ вне области пограничного слоя.

Зададим погрешность вычисления n-й производной по разностной формуле с m узлами:

$$\Delta^n_{m,N,\varepsilon} = \max_j \varepsilon^n |u^{(n)}(\tilde{x}_j) - \Lambda^n_{m,N,\varepsilon}(\tilde{x}_j)|,$$

где $\tilde{x}_j$ — узлы сгущенной вдвое сетки Ω.

Зададим теоретический порядок точности в соответствии с оценкой (2.4), соответствующей наибольшему вкладу в погрешность, и вычисленный порядок точности при наименьшем в таблице значении ε:

$$CR_{\text{th}} = \log_{10} \frac{(\ln N/N)^{m-n}}{(\ln(10N)/(10N))^{m-n}}, \qquad CR_{\text{pr}} = \log_{10} \frac{\Delta^n_{m,N,\varepsilon}}{\Delta^n_{m,10N,\varepsilon}}.$$

В таблице 1 приведена погрешность $\Delta^1_{2,N,\varepsilon}$ формулы (4.2) в случае равномерной сетки и функции (4.1) в зависимости от N, ε. При $\varepsilon = 1/N$ погрешность остается той же самой при увеличении N. Из таблицы следует, что погрешность порядка $O(1)$ при малых значениях ε.

Таблица 1. Погрешность формулы (4.2) для первой производной на равномерной сетке (m=2)

ε	N			
	12	120	1200	12000
	Погрешность			
1	$6.39e-2$	$6.41e-3$	$6.41e-4$	$6.41e-5$
1/12	$3.59e-1$	$4.75e-2$	$4.90e-3$	$4.92e-4$
1/120	$8.99e-1$	$3.68e-1$	$4.83e-2$	$4.98e-3$
1/1200	$9.90e-1$	$9.00e-1$	$3.68e-1$	$4.84e-2$
1/12000	$9.99e-1$	$9.90e-1$	$9.00e-1$	$3.68e-1$

В табл. 2 приведена погрешность $\Delta^1_{2,N,\varepsilon}$ формулы (4.2) в случае сетки Шишкина. В предпоследней и последней строках приведены теоретический и вычисленный порядки точности. С увеличением N вычисленный порядок точности приближается к теоретическому.

Таблица 2. Погрешность формулы (4.2) и вычисленные порядки точности для первой производной на сетке Шишкина ($m = 2$)

ε	N			
	12	120	1200	12000
	Погрешность			
1	$6.39e-2$	$6.41e-3$	$6.41e-4$	$6.41e-5$
1/12	$3.13e-1$	$4.75e-2$	$4.90e-3$	$4.92e-4$
1/120	$3.20e-1$	$7.57e-2$	$1.17e-2$	$1.56e-3$
1/1200	$3.20e-1$	$7.57e-2$	$1.17e-2$	$1.56e-3$
1/12000	$3.20e-1$	$7.57e-2$	$1.17e-2$	$1.56e-3$
Вычисленные порядки точности				
CR_{th}	0.72	0.83	0.88	
CR_{pr}	0.63	0.81	0.88	

Отметим, что и для остальных формул для производных (4.3)–(4.6) в случае равномерной сетки в экспериментах погрешность была порядка $O(1)$ при малых значениях ε. При $\varepsilon = 1/N$ погрешность оставалась постоянной независимо от увеличения N.

По аналогии с табл. 2 в таблицах 3–6 приведены погрешности, теоретический и вычисленный порядки точности формул (4.3) и (4.4) для первой производной и формул (4.5), (4.6) для второй производной на сетке Шишкина.

Результаты вычислений согласуются с оценкой погрешности (2.4) теоремы 1. Эта оценка соответствует погрешности вычисления производных в пограничном слое и вносит наибольший вклад в вычисляемую погрешность $\Delta^n_{m,N,\varepsilon}$ при $n = 1, 2$, $m = 2, 3, 4$.

Таблица 3. Погрешность формулы (4.3) и вычисленные порядки точности для первой производной на сетке Шишкина ($m = 3$)

ε	N			
	12	120	1200	12000
	Погрешность			
1	$7.90e-3$	$8.11e-5$	$8.12e-7$	$8.12e-9$
1/12	$1.68e-1$	$3.10e-3$	$3.31e-5$	$3.37e-7$
1/120	$2.24e-1$	$1.60e-2$	$4.08e-4$	$7.32e-6$
1/1200	$2.24e-1$	$1.60e-2$	$4.08e-4$	$7.32e-6$
1/12000	$2.24e-1$	$1.60e-2$	$4.08e-4$	$7.32e-6$
Вычисленные порядки точности				
CR_{th}	1.43	1.66	1.76	
CR_{pr}	1.15	1.60	1.75	

Таблица 4. Погрешность формулы (4.4) и вычисленные порядки точности для первой производной на сетке Шишкина ($m = 4$)

ε	N			
	12	120	1200	12000
	Погрешность			
1	$9.99e-4$	$1.02e-6$	$1.02e-9$	$1.46e-11$
1/12	$8.40e-2$	$2.22e-4$	$2.47e-7$	$2.50e-10$
1/120	$2.07e-1$	$5.60e-3$	$2.50e-5$	$6.09e-8$
1/1200	$2.07e-1$	$5.60e-3$	$2.50e-5$	$6.09e-8$
1/12000	$2.07e-1$	$5.60e-3$	$2.50e-5$	$6.09e-8$
Вычисленные порядки точности				
CR_{th}	2.14	2.49	2.63	
CR_{pr}	1.57	2.36	2.62	

Таблица 5. Погрешность формулы (4.5) и вычисленные порядки точности для второй производной на сетке Шишкина ($m = 3$)

ε	N			
	12	120	1200	12000
	Погрешность			
1	$2.82e-1$	$2.92e-2$	$2.92e-3$	$2.92e-4$
1/12	$6.00e-1$	$9.44e-2$	$9.94e-3$	$9.99e-4$
1/120	$6.72e-1$	$2.09e-1$	$3.47e-2$	$4.68e-3$
1/1200	$6.72e-1$	$2.09e-1$	$3.47e-2$	$4.68e-3$
1/12000	$6.72e-1$	$2.09e-1$	$3.47e-2$	$4.68e-3$
Вычисленные порядки точности				
CR_{th}	0.72	0.83	0.88	
CR_{pr}	0.51	0.78	0.87	

Таблица 6. Погрешность формулы (4.6) и вычисленные порядки точности для второй производной на сетке Шишкина ($m = 4$)

ε	N			
	12	120	1200	12000
	Погрешность			
1	$4.40e-2$	$4.50e-4$	$4.51e-6$	$3.73e-7$
1/12	$3.48e-1$	$8.24e-3$	$9.08e-5$	$9.17e-7$
1/120	$5.68e-1$	$6.67e-2$	$1.94e-3$	$3.57e-5$
1/1200	$5.68e-1$	$6.67e-2$	$1.94e-3$	$3.57e-5$
1/12000	$5.68e-1$	$6.67e-2$	$1.94e-3$	$3.57e-5$
Вычисленные порядки точности				
CR_{th}	1.43	1.66	1.76	
CR_{pr}	0.93	1.54	1.74	

5. Заключение

Исследована возможность применения классических формул численного дифференцирования, основанных на интерполяции Лагранжа, в случае, когда функция имеет большие градиенты в области экспоненциального пограничного слоя. На равномерной сетке в случае такой функции погрешность может быть порядка $O(1)$. Доказано, что в случае сетки Шишкина оценки относительной погрешности классических формул для производных равномерны по малому параметру. В случае равномерной сетки выделена погранслойная область, вне которой оценка погрешности равномерна по малому параметру. Приведены результаты численных экспериментов, согласующиеся с полученными оценками.

Благодарности. Автор благодарит Задорина Н.А. за проведение вычислительных экспериментов.

Литература

1. **Бахвалов Н.С.** Численные методы. — Москва: Наука, 1975.
2. **Задорин А.И.** Метод интерполяции для задачи с пограничным слоем // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2007. — Т. 10, № 3. — С. 267–275.
3. **Задорин А.И., Задорин Н.А.** Сплайн-интерполяция на равномерной сетке функции с погранслойной составляющей // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2010. — Т. 50, № 2. — С. 221–233; Перевод: Zadorin A.I., Zadorin N.A. Spline interpolation on a uniform grid for functions with a boundary-layer component // Comput. Math. Math. Phys. — 2010. — Vol. 50, № 2. — P. 211–223.
4. **Zadorin A.I., Zadorin N.A.** Interpolation formula for functions with a boundary layer component and its application to derivatives calculation // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2012. — Vol. 9. — P. 445–455.
5. **Задорин А.И.** Интерполяция Лагранжа и формулы Ньютона–Котеса для функций с погранслойной составляющей на кусочно-равномерных сетках // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2015. — Т. 18, № 3. — С. 289–303; Перевод: Zadorin A.I. Lagrange interpolation and Newton-Cotes formulas for functions with boundary layer components on piecewise-uniform grids // Numerical Analysis and Applications. — 2015. — Vol. 8, № 3. — P. 235–247.

6. **Шишкин Г.И.** Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. — Екатеринбург: УрО РАН, 1992.
7. **Miller J.J.H., O'Riordan E., and Shishkin G.I.** Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems: Error Estimates in the Maximum Norm for Linear Problems in One and Two Dimensions (Revised Edition). — Singapore: World Scientific, 2012.
8. **Linss T.** The necessity of Shishkin decompositions // Appl. Math. Lett. — 2001. — Vol. 14. — P. 891–896.
9. **Багаев Б.М., Шайдуров В.В.** Сеточные методы решения задач с пограничным слоем. — Новосибирск: Наука, 1998.
10. **Дулан Э., Миллер Д., Шилдерс У.** Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. — М.: Мир, 1983; Перевод: Doolan E.P., Miller J.J.H., Schilders W.H.A. Uniform Numerical Methods for Problems with Initial and Boundary Layers. — Dublin: Boole Press, 1980.

Поступила в редакцию 5 октября 2017 г.,
в окончательном варианте 10 января 2018 г.

Литература в транслитерации

1. **Bahvalov N.S.** Chislennye metody. — Moskva: Nauka, 1975.
2. **Zadorin A.I.** Metod interpolyacii dlya zadachi s pogranichnym sloem // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2007. — T. 10, № 3. — S. 267–275.
3. **Zadorin A.I., Zadorin N.A.** Splayn-interpolyaciya na ravnomernoy setke funkcii s pogransloynoy sostavlyayushchey // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2010. — T. 50, № 2. — S. 221–233; Perevod: Zadorin A.I., Zadorin N.A. Spline interpolation on a uniform grid for functions with a boundary-layer component // Comput. Math. Math. Phys. — 2010. — Vol. 50, № 2. — P. 211–223.
4. **Zadorin A.I., Zadorin N.A.** Interpolation formula for functions with a boundary layer component and its application to derivatives calculation // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2012. — Vol. 9. — P. 445–455.
5. **Zadorin A.I.** Interpolyaciya Lagranzha i formuly N'yutona–Kotesa dlya funkciy s pogransloynoy sostavlyayushchey na kusochno-ravnomernyh setkah // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2015. — T. 18, № 3. — S. 289–303; Perevod: Zadorin A.I. Lagrange interpolation and Newton-Cotes formulas for functions with boundary layer components on piecewise-uniform grids // Numerical Analysis and Applications. — 2015. — Vol. 8, № 3. — P. 235–247.
6. **Shishkin G.I.** Setochnye approksimacii singulyarno vozmushchennyh ellipticheskih i parabolicheskih uravneniy. — Ekaterinburg: UrO RAN, 1992.
7. **Miller J.J.H., O'Riordan E., and Shishkin G.I.** Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems: Error Estimates in the Maximum Norm for Linear Problems in One and Two Dimensions (Revised Edition). — Singapore: World Scientific, 2012.
8. **Linss T.** The necessity of Shishkin decompositions // Appl. Math. Lett. — 2001. — Vol. 14. — P. 891–896.
9. **Bagaev B.M., Shaydurov V.V.** Setochnye metody resheniya zadach s pogranichnym sloem. — Novosibirsk: Nauka, 1998.
10. **Dulan E., Miller D., Shilders U.** Ravnomernye chislennye metody resheniya zadach s pogranichnym sloem. — M.: Mir, 1983; Perevod: Doolan E.P., Miller J.J.H., Schilders W.H.A. Uniform Numerical Methods for Problems with Initial and Boundary Layers. — Dublin: Boole Press, 1980.