

УДК 532.135

## ПРИБЛИЖЕННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В СУЖАЮЩЕМСЯ КАНАЛЕ С ПОРИСТЫМИ СТЕНКАМИ

М. Бабаелахи

Университет г. Кум, Кум, Иран  
E-mail: m.babaelahi@qom.ac.ir

Решается задача о двумерном установившемся течении вязкоупругой жидкости второго порядка в сужающемся канале с пористыми стенками. Предполагается, что жидкость впрыскивается в канал через одну стенку и отсасывается через другую с одной и той же скоростью, обратно пропорциональной расстоянию от входа в канал. Система уравнений задачи сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, краевая задача для которой решается с использованием метода гомотопических возмущений. Исследовано влияние числа Рейнольдса и числа Рейнольдса поперечного потока на характеристики потока.

**Ключевые слова:** метод гомотопических возмущений, жидкость второго порядка, сужающийся канал, уравнение для скорости.

DOI: 10.15372/PMTF20180109

**Введение.** Течение ньютоновских и неньютоновских жидкостей встречается во многих технологических процессах, в частности при управлении пограничным слоем, транспирационном охлаждении, в газодиффузионных установках и др.

Существует большое количество работ, посвященных построению определяющих соотношений, исследованию течений неньютоновских жидкостей второго порядка и построению аналитических решений задач о течении таких жидкостей [1–11].

Особенности течения неньютоновских жидкостей второго порядка зависят от величины модулей нормальных напряжений и наличия кинематических тензоров. В работе [2] показано, что при отрицательных модулях нормальных напряжений жидкость становится неустойчивой. В [3] обнаружено, что в этом случае жидкости обладают аномальными реологическими свойствами. Изучению свойств неньютоновских жидкостей посвящен обзор [4]. Впервые теоретическое исследование течения неньютоновской жидкости проведено в работе [5]. Получено решение в рядах задачи о двумерном ламинарном течении вязкой несжимаемой жидкости в канале с параллельными стенками при малом числе Рейнольдса поперечного потока. Результаты более поздних исследований приведены в работе [6]. В [7] для случая больших чисел Рейнольдса получено решение уравнений ламинарного пограничного слоя при течении жидкости в сужающемся или расширяющемся канале с пористыми стенками при наличии инъекции или отсоса жидкости, скорость которой обратно пропорциональна расстоянию от входа в канал. В [8] получено аналитическое решение аналогичной задачи для медленного течения жидкости через канал в случае, когда

скорость инъекции на одной стенке канала равна скорости отсоса на другой стенке. На допущенные в работе [8] ошибки указано в [9]. Течение жидкости, описываемой степенным законом вязкости, в расширяющемся или сужающемся канале при наличии инъекции или отсоса на его стенках рассматривалось в работе [10]. Задача, поставленная в работе [8], решена в [9] для случая В-жидкости Уолтера. В [11] получено аналитическое решение той же задачи для случая медленного течения жидкости Райнера — Ривлина.

В последнее время большое внимание уделяется развитию новых методов построения аналитических решений нелинейных уравнений. Разработаны различные подходы к построению приближенных аналитических решений: преобразование Бэклунда [12], преобразование Дарбу [13], билинейное преобразование Хироты [14], тангенс-преобразование [15], преобразование синус-косинус [16], метод однородного баланса [17], разложение Адомиана [18], вариационный итерационный метод [19], метод гомотопических возмущений (МГВ) [20]. МГВ является эффективным методом решения как линейных, так и нелинейных уравнений. В этом методе гомотопия строится с помощью малого параметра погружения  $p \in [0, 1]$ . Установлено, что с помощью этого метода можно получать быстро сходящиеся точные решения. Впервые этот метод предложен в работах [21, 22], позднее он использовался при решении различных прикладных задач [23–26].

В настоящей работе МГВ применяется для решения задачи о течении вязкоупругой жидкости второго порядка в сужающемся канале с пористыми стенками. Исследуется влияние упругих свойств жидкости (параметра упругости  $N$ ) на скорость потока в канале при различных значениях числа Рейнольдса и числа Рейнольдса поперечного потока.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается установившееся ламинарное течение вязкоупругой жидкости второго порядка в сужающемся канале. Уравнения для стенок канала в полярной системе координат  $(\theta, r)$  имеют вид  $\theta = \pm\alpha$  (рис. 1). Предполагается, что на одной стенке канала происходит инъекция (впрыскивание) жидкости, на другой — отсос. Скорости инъекции и отсоса одинаковые и изменяются обратно пропорционально значению координаты  $r$  (см. рис. 1).

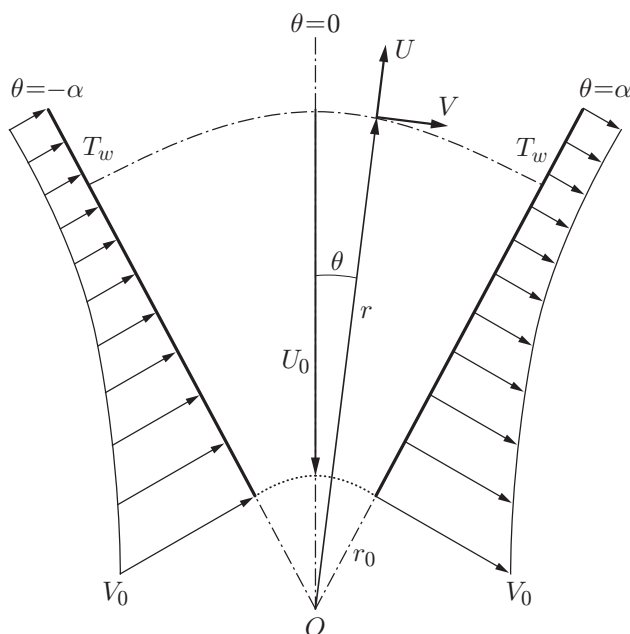


Рис. 1. Геометрия задачи

Выражение для тензора напряжений Коши  $T$  в вязкоупругой жидкости второго порядка представляется в виде [27]

$$T = -pI + S; \quad (1)$$

$$S = \mu A_1 + \alpha_1 A_2 + \alpha_2 A_1^2, \quad (2)$$

где  $-pI$  — составляющая напряжений, определяемая неоднозначно вследствие предположения о несжимаемости жидкости;  $S$  — тензор напряжений;  $\mu$  — динамическая вязкость;  $\alpha_1, \alpha_2$  — модули нормальных напряжений;  $A_1, A_2$  — кинематические тензоры:

$$A_1 = L + L^T, \quad A_2 = \frac{D}{Dt} A_1 + LA_1 + A_1 L^T, \quad L = \nabla \mathbf{v} \quad (L_{ij} = v_{ji}), \quad (3)$$

$\mathbf{v}$  — вектор скорости;  $\nabla$  — оператор градиента;  $D/Dt$  — материальная производная. При  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  модель вязкоупругой жидкости второго порядка сводится к классической линейной модели вязкоупругой жидкости.

Для того чтобы модель жидкости, описываемая уравнением (2), удовлетворяла неравенству Клаузиуса — Дюгема и выполнялся принцип минимума Гельмгольца удельной свободной энергии, должны выполняться неравенства [2]

$$\mu \geq 0, \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 0. \quad (4)$$

В данной работе предполагается, что неравенства (4) выполняются. Тогда определяющее соотношение (2) записывается в следующем виде:

$$T = -pI + \mu A_1 + \beta(A_2 - A_1^2), \quad \beta = \alpha_1 = -\alpha_2. \quad (5)$$

Принимаются также следующие предположения: 1) течение установившееся и ламинарное; 2) жидкость несжимаема; 3) массовые силы отсутствуют; 4) вязкость жидкости постоянна. При этих предположениях уравнение неразрывности и уравнение закона сохранения количества движения записываются в следующем виде:

$$\nabla \mathbf{v} = 0, \quad \rho(\mathbf{v} \nabla \mathbf{v}) = \nabla T.$$

Поле скоростей [9]

$$u(r, \theta) = \frac{U_0 r_0}{r} f(\theta), \quad v(r) = \frac{V_0 r_0}{r} \quad (6)$$

удовлетворяет уравнению неразрывности. В (6)  $u, v$  — компоненты вектора скорости в направлениях  $r$  и  $\theta$  соответственно (см. рис. 1). В случае  $r = r_0$  скорость инъекции при  $\theta = -\alpha$  и скорость отсоса при  $\theta = \alpha$  равны  $V_0$ . Скорость жидкости в направлении  $r$  при  $\theta = 0$  равна  $U_0$ .

При решении задачи используются следующие краевые условия:

$$u(r, -\alpha) = 0, \quad u(r, \alpha) = 0, \quad u(r_0, 0) = -|U_0|. \quad (7)$$

Первые два условия в (7) представляют собой условия отсутствия скольжения жидкости на стенках канала, последнее условие задает количество жидкости, входящей в канал.

Из (5), (6) и уравнений движения следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} = & \frac{\rho}{r^3} r_0^2 \left( V_0^2 + U_0^2 f^2 - U_0 V_0 f' + \frac{\nu U_0}{r_0} f'' \right) + \\ & + \frac{\beta}{r^5} r_0^2 (-8V_0^2 - 8U_0^2 f^2 + 4U_0 V_0 f' - 2U_0^2 f'^2 - 4U_0^2 f f'' + U_0 V_0 f'''), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{2\mu U_0 r_0}{r^2} f' + \frac{2\beta r_0^2 U_0^2}{r^4} f' f'',$$

где  $\nu = \mu/\rho$  — кинематическая вязкость; штрих обозначает производную по переменной  $\theta$ . Дифференцируя уравнения (8) и исключая из полученных уравнений давление, находим

$$f''' - \text{Re} f'' + 2 \text{Re}_e f f' + 4f' + N(-16 \text{Re}_e f f' + 4 \text{Re} f'' - 4 \text{Re}_e f f''' + \text{Re} f^{iv}) = 0, \quad (9)$$

где  $\text{Re} = V_0 r_0 / \nu$  — число Рейнольдса;  $\text{Re}_e = U_0 r_0 / \nu$  — число Рейнольдса поперечного потока;  $N = \beta / (\rho r_0^2)$  — параметр, характеризующий упругие свойства жидкости.

**2. Решение задачи методом гомотопических возмущений.** Ниже МГВ [21, 22] применяется для решения нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения (9). С использованием этого метода для уравнения (9) строится следующая гомотопия:

$$H(f, p) = (1 - p)(f''' - f_0''') + p(f''' - \text{Re} f'' + 2 \text{Re}_e f f' + 4f' + N(-16 \text{Re}_e f f' + 4 \text{Re} f'' - 4 \text{Re}_e f f''' + \text{Re} f^{iv})). \quad (10)$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по переменной  $\eta$ . Функция  $f$  принимается в виде

$$f = f_0 + p f_1 + p^2 f_2. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (10), преобразуя полученное уравнение и собирая коэффициенты при степенях параметра  $p$ , получаем следующую систему уравнений с краевыми условиями:

$$\begin{aligned} p^0: & \quad f_0'''(0) = 0, \quad f_0(-\alpha) = 0, \quad f_0(\alpha) = 0, \quad f_0(0) = -1; \\ p^1: & \quad -4N \text{Re}_e f_0 f_0''' + 2 \text{Re}_e f_0 f_0' + 4N \text{Re} f_0'' + N \text{Re} f_0'''' - 16N \text{Re}_e f_0 f_0' - \text{Re} f_0'' + f_1''' + 4f_1', \\ & \quad f_1(-\alpha) = 0, \quad f_1(\alpha) = 0, \quad f_1(0) = 0, \quad (12) \\ p^2: & \quad -4N \text{Re}_e f_1 f_0''' - 4N \text{Re}_e f_0 f_1''' + 2 \text{Re}_e f_1 f_0' + N \text{Re} f_1'''' + f_2''' + 4f_2' - \text{Re} f_1'' + \\ & \quad + 4N \text{Re} f_1'' + 2 \text{Re}_e f_0 f_1' - 16N \text{Re}_e f_1 f_0' - 16N \text{Re}_e f_0 f_1', \\ & \quad f_2(-\alpha) = 0, \quad f_2(\alpha) = 0, \quad f_2(0) = 0. \end{aligned}$$

Решая уравнения (12) с начальными условиями, находим

$$\begin{aligned} f_0(\theta) &= \frac{\theta^2}{\alpha^2} - 1, \\ f_1(\theta) &= \frac{4}{\alpha^4} \left( \frac{1}{120} (-\text{Re}_e + 8N \text{Re}_e) \theta^6 + \frac{1}{24} (-2\alpha^2 + \text{Re}_e \alpha^2 - 8N \text{Re}_e \alpha^2) \theta^4 \right) + \\ & \quad + \frac{1}{6} \left( -\frac{8N \text{Re}}{\alpha^2} + \frac{2 \text{Re}}{\alpha^2} \right) \theta^3 + \frac{1}{2} \left( -\frac{4}{15} \text{Re}_e + \frac{32}{15} N \text{Re}_e + \frac{2}{3} \right) \theta^2 + \left( \frac{4}{3} N \text{Re} - \frac{1}{3} \text{Re} \right) \theta, \\ f_2(\theta) &= 0,000\,052\,910 \alpha^{-6} (-1260 \text{Re}_e \alpha^4 \theta^5 + 1890 \alpha^6 \text{Re}_e \theta^3 + 6300 \text{Re} \alpha^6 \theta^2 - \\ & \quad - 135 \alpha^2 \text{Re}_e^2 \theta^7 + 270 \alpha^2 \text{Re}_e \theta^7 + 1440 \text{Re} \text{Re}_e \alpha^8 + 15120 \text{Re} N \alpha^8 - 1575 \alpha^6 \text{Re}^2 \theta - \\ & \quad - 900 \text{Re}_e \alpha^8 \theta + 163 \text{Re}_e^2 \alpha^8 \theta + \dots). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$f(\theta) = f_0(\theta) + f_1(\theta) + f_2(\theta).$$

**3. Результаты исследования и их обсуждение.** Сравнение полученного аналитического решения с численным решением, найденным с использованием метода Рунге — Кутты и пакета MAPLE 11 (рис. 2), показало, что они практически совпадают. Увеличение параметра  $N$  не влияет на точность результатов, полученных с помощью МГВ. Из рис. 2 следует, что скорость жидкости минимальна вблизи пористых стенок и максимальна в середине канала.

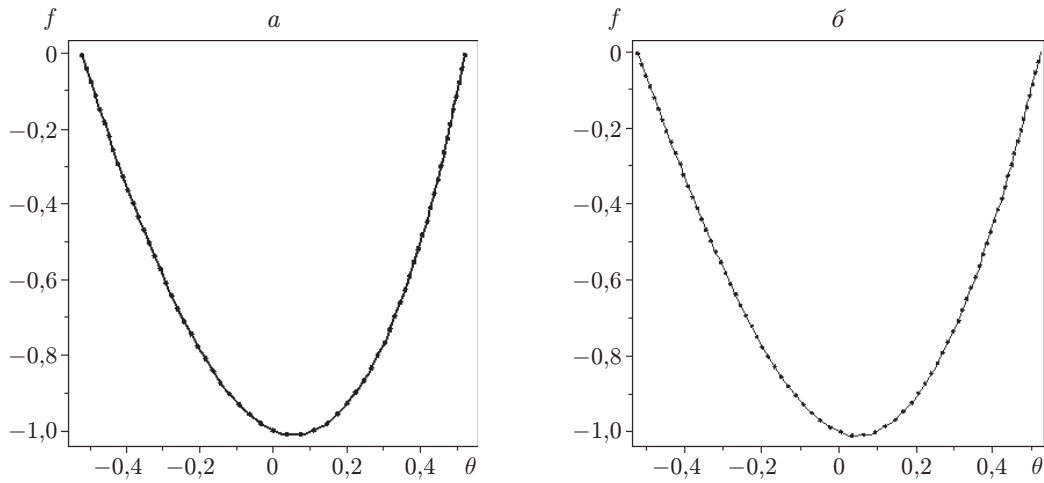


Рис. 2. Зависимость  $f(\theta)$  при  $Re_e = 5$ ,  $Re = 2$  и различных значениях параметра  $N$ :  $a$  —  $N = 0,03$ ,  $б$  —  $N = 0,045$ ; пунктирные линии — численное решение, сплошные — решение, полученное с использованием МГВ

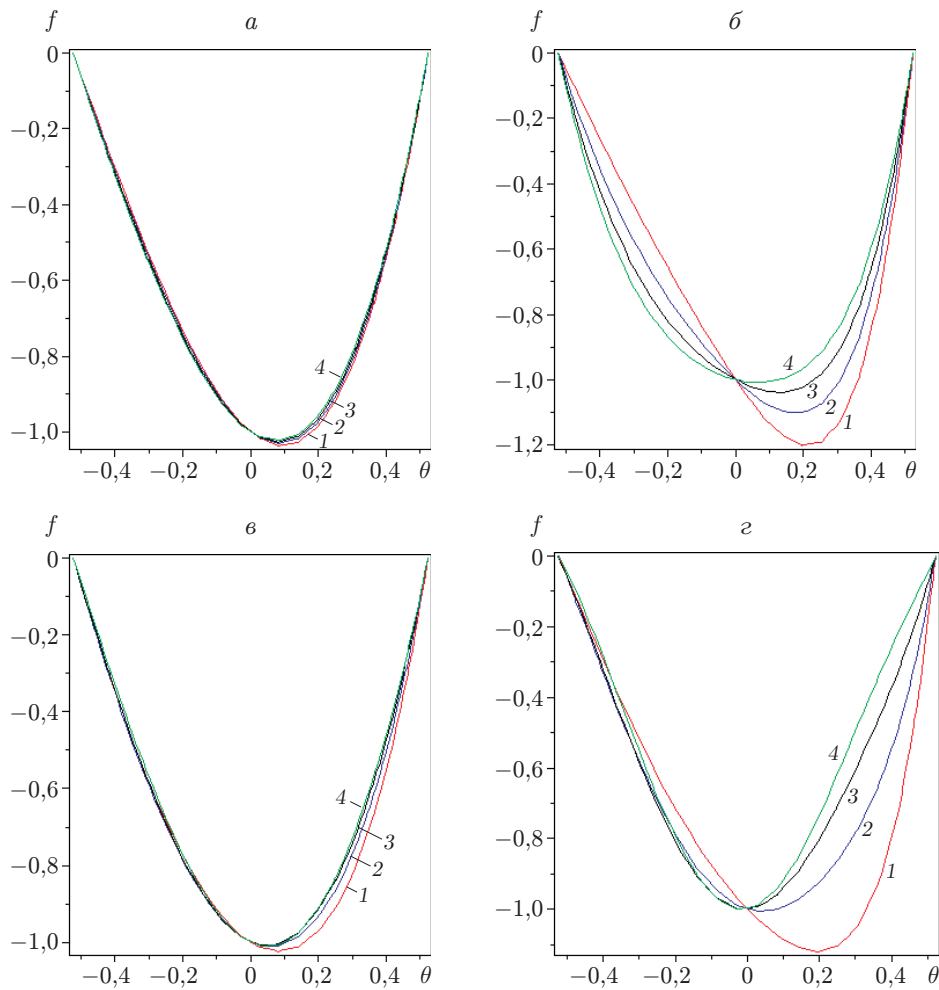


Рис. 3. Зависимость  $f(\theta)$  в случае канала с углом раствора конуса  $\varphi = 30^\circ$  при различных значениях  $Re_e$ ,  $Re$ ,  $N$ :  $a$  —  $Re_e = 0,5$ ,  $Re = 2$ ,  $б$  —  $Re_e = 0,5$ ,  $Re = 5$ ,  $в$  —  $Re_e = 5$ ,  $Re = 2$ ,  $г$  —  $Re_e = 5$ ,  $Re = 5$ ;  $1$  —  $N = 0$ ,  $2$  —  $N = 0,015$ ,  $3$  —  $N = 0,03$ ,  $4$  —  $N = 0,045$

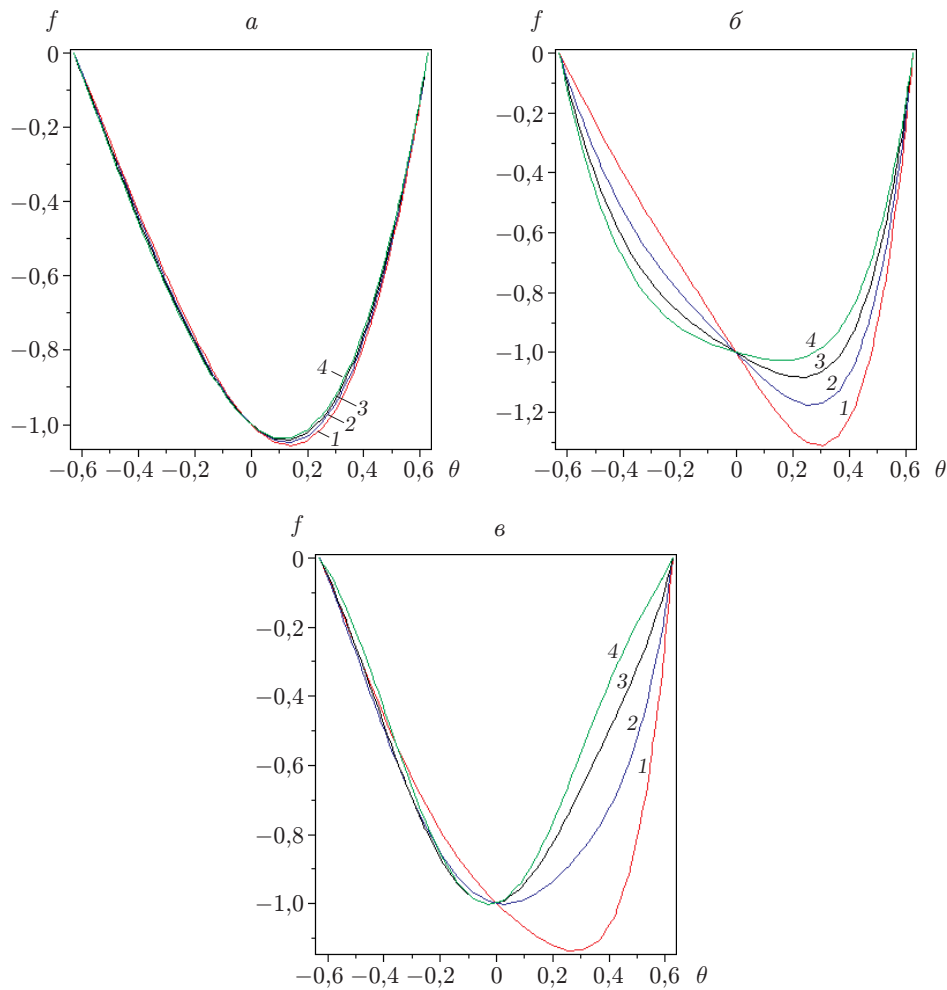


Рис. 4. Зависимость  $f(\theta)$  в случае канала с углом раствора конуса  $\varphi = 60^\circ$  при различных значениях  $Re_e$ ,  $Re$ ,  $N$ :  
 а —  $Re_e = 0,5$ ,  $Re = 2$ , б —  $Re_e = 0,5$ ,  $Re = 5$ , в —  $Re_e = 5$ ,  $Re = 5$ ; 1 —  $N = 0$ , 2 —  $N = 0,015$ , 3 —  $N = 0,03$ , 4 —  $N = 0,045$

На рис. 3 для случая канала с углом раствора конуса  $\varphi = 30^\circ$  приведена зависимость  $f(\theta)$  при различных значениях чисел Рейнольдса  $Re_e$ ,  $Re$  и параметра  $N$ .

Поскольку параметр  $N$  зависит от кинематических тензоров, в свою очередь зависящих от скорости, при малом числе Рейнольдса скорость практически не зависит от параметра  $N$  (см. рис. 3,а). Однако с увеличением числа Рейнольдса зависимость скорости от параметра  $N$  становится существенной (см. рис. 3,б). При большом числе Рейнольдса в интервале  $-\pi/6 < \theta < 0$  скорость жидкости уменьшается, а в интервале  $0 < \theta < \pi/6$  — увеличивается (см. рис. 3,б). Из результатов сравнения зависимостей, приведенных на рис. 3,а,б, следует, что при больших числах Рейнольдса параметр  $N$  оказывает наиболее существенное влияние на величину скорости вблизи оси канала.

Сравнение зависимостей, приведенных на рис. 3,в,г, и зависимостей, приведенных на рис. 3,а,б, показывает, что число Рейнольдса поперечного потока  $Re_e$  более существенно влияет на скорость, чем число Рейнольдса  $Re$ . Из результатов сравнения зависимостей, представленных на рис. 3,б,г, следует, что с увеличением числа Рейнольдса поперечного потока  $Re_e$  скорость жидкости уменьшается.

На рис. 4 показана зависимость  $f(\theta)$  при различных значениях чисел Рейнольдса  $Re_e$ ,  $Re$  и параметра  $N$  для канала с углом раствора конуса  $\varphi = 60^\circ$ . В случае  $\varphi = 60^\circ$  параметр  $N$  оказывает более существенное влияние на скорость, чем в случае  $\varphi = 30^\circ$ .

**Заключение.** В работе получены аналитическое и численное решения задачи о течении вязкоупругой жидкости второго порядка в сужающемся канале с пористыми стенками. Установлено, что при малых числе Рейнольдса и числе Рейнольдса поперечного потока скорость практически не зависит от параметра  $N$ . С увеличением параметра  $N$  в интервалах  $-\pi/6 < \theta < 0$  при  $\varphi = 30^\circ$  и  $-\pi/3 < \theta < 0$  при  $\varphi = 60^\circ$  скорость потока незначительно увеличивается, в то время как в интервалах  $0 < \theta < \pi/6$  при  $\varphi = 30^\circ$  и  $0 < \theta < \pi/3$  при  $\varphi = 60^\circ$  — существенно уменьшается. Влияние числа Рейнольдса и числа Рейнольдса поперечного потока на скорость потока в канале является более значительным в интервалах  $(0, \pi/6)$  и  $(0, \pi/3)$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Ariel P. D.** Axisymmetric flow of a second grade fluid past a stretching sheet // Intern. J. Engng Sci. 2001. V. 39. P. 529–553.
2. **Dunn J. E., Fosdick R. L.** Thermodynamics, stability and boundedness of fluids of complexity-2 and fluids of second grade // Arch. Rational Mech. Anal. 1974. V. 56. P. 191–252.
3. **Fosdick R. L., Rajagopal K. R.** Anomalous features in the model of second order fluids // Arch. Rational Mech. Anal. 1979. V. 70. P. 145–152.
4. **Dunn J. E., Rajagopal K. R.** Fluids of differential type: critical review and thermodynamic analysis // Intern. J. Engng Sci. 1995. V. 33. P. 689–729.
5. **Berman A. S.** Laminar flow in channels with porous walls // J. Appl. Phys. 1953. V. 24. P. 1232–1235.
6. **Choi J. J., Rusak Z., Tichy J. A.** Maxwell fluid suction flow in a channel // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 1999. V. 85. P. 165–187.
7. **Rosenhead L.** Laminar boundary layers. Oxford: Clarendon Press, 1963. P. 250–251.
8. **Terrill R. M.** Slow laminar flow in a converging or diverging channel with suction at one wall and blowing at the other wall // J. Appl. Math. Phys. 1965. V. 16. P. 306–308.
9. **Roy J. S., Nayak P.** Steady 2 dimensional incompressible laminar visco elastic flow in a converging or diverging channel with suction and injection // Acta Mech. 1982. V. 43. P. 129–136.
10. **Balmer R. T., Kauzlarich J. J.** Similarity solutions for converging or diverging steady flow of non-newtonian elastic power law fluids with wall suction or injection // AIChE J. 1971. V. 17. P. 1181–1188.
11. **Öztürk Y., Akyatan A., Senocak E.** Slow flow of the Reiner — Rivlin fluid in a converging or diverging channel with suction and injection // Turk. J. Engng Environ. Sci. 1998. V. 22. P. 179–183.
12. **Denes P., Finley J. D.** Bäcklund transformations for general PDE's // Physica D. Nonlinear Phenomena. 1983. V. 9. P. 236–250.
13. **Backlund** and Darboux transformations / Ed. by A. Coely. Providence: Amer. Math. Soc., 2001.
14. **Xing Biao Hu, Yong-Tang Wu.** Application of the Hirota bilinear formalism to a new integrable differential-difference equation // Phys. Lett. A. 1998. V. 246. P. 523–529.
15. **Engui Fan.** Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations // Phys. Lett. A. 2000. V. 277. P. 212–218.
16. **Wazwaz A.-M.** A sine-cosine method for handling nonlinear wave equations // Math. Comput. Modeling. 2004. V. 40. P. 499–508.

17. **Mingliang Wang, Yubin Zhou, Zhibin Li.** Application of a homogeneous balance method to exact solutions of nonlinear equations in mathematical physics // Phys. Lett. A. 1996. V. 216. P. 67–75.
18. **Adomian G.** Solution of physical problems by decomposition // Comput. Math. Appl. 1994. V. 27. P. 145–154.
19. **He J. H.** Variational iteration method for autonomous ordinary differential systems // Appl. Math. Comput. 2000. V. 114. P. 115–123.
20. **He J. H.** Application of homotopy perturbation method to nonlinear wave equations // Chaos Solitons Fractals. 2005. V. 26. P. 695–700.
21. **He J. H.** Recent development of the homotopy perturbation method // Topolog. Methods Nonlinear Anal. 2008. V. 31, N 2. P. 205–209.
22. **He J. H.** Homotopy perturbation technique // Comput. Math. Appl. Mech. Engng. 1999. V. 17, N 8. P. 257–262.
23. **Ganji D. D., Sadighi A.** Application of He's homotopy-perturbation method to nonlinear coupled systems of reaction-diffusion equations // Intern. J. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2006. V. 7, N 4. P. 413–420.
24. **Ganji D. D., Rajabi A.** Assessment of homotopy-perturbation and perturbation methods in heat radiation equations // Intern. Comm. Heat Mass Transfer. 2006. V. 33. P. 391–400.
25. **Rafei M., Ganji D. D.** Explicit solutions of Helmholtz equation and fifth-order KdV equation using homotopy perturbation method // Intern. J. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2006. V. 7. P. 321–329.
26. **Rajabi A., Ganji D. D., Taherian H.** Application of homotopy-perturbation method to nonlinear heat conduction and convection equations // Phys. Lett. A. 2007. V. 360, N 4/5. P. 570–573.
27. **Rivlin R. S., Ericksen J. L.** Stress deformation relations for isotropic materials // J. Rational Mech. Anal. 1955. V. 4. P. 323–425.

*Поступила в редакцию 22/IX 2016 г.,  
в окончательном варианте — 27/XII 2016 г.*

---