

УДК 532.517.5; 551.511.32

## **Явная алгебраическая модель турбулентности планетарного пограничного слоя: тестовый расчет нейтрально стратифицированного атмосферного пограничного слоя\***

**А.Ф. Курбацкий<sup>1</sup>, Л.И. Курбацкая<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Институт теоретической и прикладной механики  
им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск*

<sup>2</sup>*Институт вычислительной математики  
и математической геофизики СО РАН, Новосибирск*

E-mails: kurbat@itam.nsc.ru, L.Kurbatskaya@ommgp.sccc.ru

Тестируется явная алгебраическая модель рейнольдсовых напряжений и вектора турбулентного потока тепла для планетарного пограничного слоя в нейтрально стратифицированном пограничном слое атмосферы над однородной шероховатой поверхностью. Рассматриваемый вариант алгебраической модели построен на физических принципах RANS (Reynolds-average Navier–Stokes) приближения для описания стратифицированной турбулентности, в нем используются три прогностических уравнения и показано правильное воспроизведение основных характеристик нейтрального пограничного слоя атмосферы — компонент скорости среднего ветра, угла поворота ветра, турбулентной статистики. Тестовые расчеты показывают, что предложенная модель может быть использована для целенаправленных исследований атмосферного пограничного слоя.

**Ключевые слова:** пограничный слой атмосферы, алгебраические модели рейнольдсовых напряжений и турбулентного потока тепла, устойчивая стратификация, внутренние волны, численное моделирование.

### **Введение**

Моделирование турбулентности является важным предметом атмосферных наук для описания существенно важного турбулентного транспорта тепла и импульса в пограничном слое атмосферы [1]. Базисным понятием во многих моделях турбулентности является гипотеза вихревой вязкости, первоначально сформулированная в работе [2], которая постулирует, что турбулентные потоки связаны с градиентами среднего ветра и температуры через вихревую вязкость, по аналогии с молекулярной диффузией. Дальнейшее изучение сути структуры турбулентных течений на основе модели пути смешения Прандтля [3] и привлечения энергии турбулентности [4] способствовали развитию таких моделей.

Многие модели турбулентности, используемые в моделировании климата или прогноза погоды, основываются на концепции вихревой вязкости, а эффекты плавучести

---

\* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке программы Президиума РАН 1.33П «Фундаментальные проблемы математического моделирования» и РФФИ (грант № 17-01-00137).

часто включаются в выражения для турбулентных потоков через эмпирические функции, основанные на теории подобия Мони́на–Обухова [5], справедливой, строго говоря, только для приземного слоя. Гипотеза вихревой вязкости, впервые введенная в рассмотрение А.Н. Колмогоровым [6], вообще говоря, недостаточна для описания турбулентных потоков [7]. В частности, она не дает корректного описания анизотропии напряжений Рейнольдса  $\overline{u_i u_j}$ . Более общее приближение хорошо известной иерархии моделей турбулентности для геофизических турбулентных течений, изложенное в работе [8], основано на уравнениях переноса для рейнольдсовых напряжений  $\overline{u_i u_j}$  и вектора турбулентного потока тепла  $\overline{u_i \theta}$ , а также на уравнении скорости диссипации кинетической энергии турбулентности для стратифицированного пограничного слоя атмосферы (ПСА) (см., например, [9]). Однако в силу практических ограничений в моделировании климата и прогноза погоды только простейшие модели в этой иерархии применялись в операционных моделях с минимальным числом прогностических уравнений, по большей части использовалось лишь уравнение для турбулентной кинетической энергии (ТКЭ). Включение уравнения для дисперсии температурных флуктуаций (турбулентной потенциальной энергии) наряду с уравнением для скорости диссипации ТКЭ позволило учесть нелокальный эффект турбулентного переноса тепла в ПСА [10] и корректное моделирование его динамики единым алгоритмом в суточной эволюции, не разделяя его на конвективное и устойчиво стратифицированное состояния [11]. Прогностическое уравнение для ТКЭ и скорости ее спектрального расходования (диссипации) использовались в атмосферном контексте, например, в работах [12, 13]. Существенный прогресс достигнут в последние годы в развитии более общих, чем стандартные гипотезы турбулентной вязкости, моделей для вихревых коэффициентов диффузии импульса и тепла, являющихся результатом записи дифференциальных уравнений для напряжений Рейнольдса и вектора турбулентного потока тепла в слабобалансовом приближении [11, 14–15]. В этом приближении пренебрегается адвекцией и диффузией некоторых безразмерных величин. Для турбулентных течений с плавучестью, т.е. с температурой или плотностью как активным скаляром, математический вывод модели усложняется вследствие связи между напряжениями Рейнольдса и потоком тепла, которую создают члены плавучести. В слабобалансовом приближении связанную систему алгебраических уравнений для турбулентных потоков импульса и скаляра для ПСА можно разрешить аналитически с применением математической операции символьной алгебры для получения явных (безитерационных) выражений для турбулентных потоков импульса ( $\overline{u_i u_j}$ ) и тепла ( $\overline{u_i \theta}$ ) в ПСА. Примеры моделей, развитых в этом приближении, даны, например, для однородного турбулентного течения в работах [16–19] и для неоднородного турбулентного течения в работах [20, 21].

В настоящем исследовании развитая явная модель турбулентных потоков импульса и тепла для стратифицированного ПСА [11, 21] тестируется в нейтральном атмосферном пограничном слое, при этом результаты тестирования рассматриваются в качестве входного модуля для последующего изучения динамики устойчивого ПСА над охлаждаемой поверхностью.

### 1. Модель турбулентности для пограничного слоя атмосферы

Модель турбулентности в ПСА формулируется на основе осредненных по Рейнольдсу уравнений гидродинамики в так называемом RANS-приближении (Reynolds-averaged Navier–Stokes). Отправная точка модели — уравнения для средней скорости  $\vec{U} = (U, V, W)$  и средней потенциальной температуры  $\Theta$ . В случае атмосферного пограничного слоя уравнения для среднего течения могут быть записаны в следующей упрощенной форме:

$$\frac{DU}{Dt} = -\frac{\partial \overline{uw}}{\partial z} - f(V_g - V), \quad (1)$$

$$\frac{DV}{Dt} = -\frac{\partial \overline{vw}}{\partial z} + f(U_g - U), \quad (2)$$

$$\frac{D\Theta}{Dt} = -\frac{\partial \overline{w\theta}}{\partial z}, \quad (3)$$

где  $f = 2\Omega \sin \varphi$  — параметр Кориолиса, зависящий от скорости вращения Земли и широты  $\varphi$ ,  $\vec{U}_g = (U_g, V_g)$  — скорость геострофического ветра (т. е. сила крупномасштабного градиента давления),  $D/Dt \equiv \partial/\partial t + U_k \partial/\partial x_k$  — материальная производная в направлении средней скорости; величины  $\overline{uw}$  и  $\overline{w\theta}$  являются компонентами турбулентного потока импульса (или напряжений Рейнольдса) и турбулентного потока тепла соответственно и содержат неизвестные корреляции флуктуаций скорости  $(u, v, w)$  и флуктуации температуры  $\theta$ . Система (1–3) учитывает только турбулентный перенос в вертикальном направлении и предполагает горизонтально однородные условия для турбулентной статистики. Когда данная система решается только на вертикальной сетке, имеем так называемую одномерную модель (single-column модель). Чтобы замкнуть систему (1–3), т. е. выразить турбулентные потоки через среднюю скорость и потенциальную температуру, необходимы модели для турбулентных потоков. В настоящей статье не обсуждаются различного рода концепции турбулентной вязкости для атмосферного пограничного слоя, а описывается RANS-3 (трехпараметрическая) модель турбулентности, которая в наиболее полной форме учитывает как воздействие стратификации, так и эффект внутренних гравитационных волн на турбулентный перенос.

### 1.1. Моделирование напряжений Рейнольдса

Как было отмечено выше, приближение вихревой вязкости в его стандартном представлении ( $K_m = C_\mu E^2/\varepsilon$ ,  $K_h = K_m/\text{Pr}_t$ , где  $C_\mu$  — константа,  $\text{Pr}_t$  — турбулентное число Прандтля, часто полагаемое постоянной величиной;  $E = (\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2})/2$  — турбулентная кинетическая энергия,  $\varepsilon$  — скорость диссипации ТКЭ,  $K_m$  и  $K_h$  — вихревые коэффициенты диффузии импульса и тепла соответственно) в большинстве случаев не обосновано и не надежно для сложных течений. В частности, это приближение не отражает корректно анизотропию тензора напряжений Рейнольдса  $\overline{u_i u_j}$ , обмен между компонентами кинетической энергии, воздействие стратификации на турбулентный перенос, а также эффект внутренних волн в поддержании импульса в устойчиво стратифицированном ПСА. Таким образом, улучшенный класс моделей турбулентности может быть развит на основе замкнутых уравнений для напряжений Рейнольдса и вектора турбулентного потока тепла  $\overline{u_i \theta}$ :

$$D\overline{u_i u_j}/Dt + D_{ij} = P_{ij} - \Pi_{ij} + G_{ij} - \varepsilon_{ij}, \quad (4)$$

$$D\overline{u_i \theta}/Dt + D_{\theta i} = P_{\theta i} + \Pi_{\theta i} - G_{\theta i}, \quad (5)$$

где в каждом из этих уравнений члены (слева направо) определяют адвекцию, диффузию, порождение сдвигом, перераспределение давлением, диссипацию и порождение плавучести. В (4, 5) члены порождения сдвигом и плавучестью имеют вид

$$P_{ij} = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}, \quad (6)$$

$$P_{\theta i} = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} - \overline{u_j \theta} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, \quad (7)$$

$$G_{ij} = \frac{g}{T_0} (\delta_{i3} \overline{u_j \theta} + \delta_{j3} \overline{u_i \theta}), \quad (8)$$

$$G_{\theta i} = \beta_i \overline{\theta^2} \delta_{i3}. \quad (9)$$

Эти члены порождения имеют замкнутый вид, в то время как другие члены в (4, 5), особенно члены с перераспределением давлением, содержат дополнительные неизвестные корреляции, которые требуют модельных представлений. Для члена диссипации в уравнении (4) часто выбирается изотропное выражение  $\varepsilon_{ij} = (2/3)\varepsilon\delta_{ij}$ ; в уравнении (9)  $\beta_i = \alpha g_i$ ,  $g_i = (0, 0, g)$ ,  $\alpha$  — термический коэффициент расширения среды. Члены перераспределения давлением  $\Pi_{ij}$  и  $\Pi_{\theta i}$  описывают межкомпонентный обмен, являющийся следствием флуктуаций давления. Для них развиты различные модели, хотя  $\Pi_{ij}$  обычно представляется в виде суммы медленной части (этот член стремления к изотропии, см. [22, 23]) и быстрой части, прямо зависящей от средних градиентов. Общая линейная модель для  $\Pi_{ij}$  разработана в работе [24] и распространена для учета плавучести в работах [25, 26]. Для полного замыкания уравнений (4, 5) требуются дополнительные прогностические уравнения или модели для  $\varepsilon$  и дисперсии температуры  $\overline{\theta^2}$  (так же, как и для ее скорости диссипации  $\varepsilon_{\theta i}$ ). В настоящей RANS-3 модели величина дисперсии температуры  $\overline{\theta^2}$  определяется из прогностического уравнения переноса (см. ниже).

Несмотря на высокий уровень усовершенствования уравнений (4, 5), эти модели рейнольдсовых напряжений трудны для вычислений на практике из-за большого числа прогностических уравнений. Поэтому желательно упростить эти уравнения до чисто алгебраического вида. Наиболее простой способ заключается в пренебрежении адвекцией и диффузией в левой части (4, 5) в результате чего получим так называемое слаборавновесное приближение, строго говоря, предполагающее установившееся состояние для турбулентных потоков. Настоящая модель, излагаемая ниже в разделе 1.2, формулируется в этом слаборавновесном приближении.

## 1.2. Явная алгебраическая модель напряжений Рейнольдса и потоков тепла

Свертка уравнения (4) для тензора  $\overline{u_i u_j}$  дает прогностическое уравнение для кинетической энергии турбулентности:

$$DE/Dt = P + \alpha g \overline{w\theta} - \varepsilon + D_E, \quad (10)$$

где  $P = -\overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} - \overline{vw} \frac{\partial V}{\partial z}$  — порождение средним сдвигом,  $g$  — ускорение силы тяжести,

$G = \alpha g \overline{w\theta}$  — порождение плавучестью. Диффузионный член  $D_E$  обычно [12, 13, 27] моделируется градиентной диффузией:

$$D_E = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{K_m}{\sigma_E} \cdot \frac{\partial E}{\partial z} \right),$$

где  $\sigma_E$  — число Шмидта для ТКЭ. Для замкнутого вида уравнения (10) используется прогностическое уравнение для скорости диссипации  $\varepsilon$ :

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = -\frac{1}{2}\psi_0 \frac{\varepsilon^2}{E} + \frac{1}{2}\psi_1 \frac{\varepsilon}{E}(P+G) + \psi_2 \alpha g \left( u\overline{\theta} \frac{\partial U}{\partial z} + v\overline{\theta} \frac{\partial V}{\partial z} \right) + D_\varepsilon, \quad (11)$$

диффузионный член  $D_\varepsilon$  моделируется аналогично диффузионному члену  $D_E$ :

$$D_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{K_m}{\sigma_\varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right), \quad (12)$$

где  $\sigma_\varepsilon$  — число Шмидта для диссипации,  $\psi_0 = 3,8$ ,  $\psi_1 = 2,4$ ,  $\psi_2 = 0,3$  [9]. Величины  $P$  и  $G$  — порождение соответственно сдвигом и плавучестью, как и в уравнении (10) для ТКЭ. Уравнение (11) записано с учетом особенностей динамики устойчивого ПСА [9]. Третье прогностическое уравнение в RANS-3 модели — уравнение для дисперсии температуры  $\overline{\theta^2}$  (или потенциальной турбулентной энергии  $E_p = (1/2)(g/T_0)\overline{\theta^2}/(d\Theta/dz)$ ):

$$\frac{D}{Dt} \overline{\theta^2} = -2\overline{u\theta} \frac{\partial \Theta}{\partial x} - 2\overline{w\theta} \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \frac{1}{R} \cdot \frac{\varepsilon}{E} \overline{\theta^2} + D_\theta, \quad (13)$$

где  $D_\theta = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{K_m}{\sigma_\theta} \cdot \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial z} \right)$ ,  $\sigma_\theta$  — число Шмидта для  $\overline{\theta^2}$ .

Вывод алгебраических моделей турбулентных потоков импульса и тепла основан на упрощении замкнутых прогностических уравнений в приближении слабо-равновесной турбулентности. Уравнение для тензора напряжений Рейнольдса (4) с учетом уравнения для ТКЭ, в общей форме имеющее вид

$$\frac{DE}{Dt} + \frac{1}{2} D_{ii} = -\tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \beta_i h_i - \varepsilon \quad (14)$$

записывается для бесследового тензора напряжений Рейнольдса  $b_{ij} = \tau_{ij} - 2/3 E \delta_{ij}$  следующим образом:

$$\frac{D}{Dt} b_{ij} + D_{ij} = -\frac{4}{3} E S_{ij} - (M_{ij} + N_{ij}) + B_{ij} - \Pi_{ij}. \quad (15)$$

Члены уравнения (15) определены как

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right), \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right), \quad (16)$$

$$M_{ij} = b_{ik} S_{kj} + S_{ik} b_{kj} - \frac{2}{3} \delta_{ij} b_{k\alpha} S_{\alpha k}, \quad N_{ij} = \Omega_{ik} b_{kj} - b_{ik} \Omega_{kj}, \quad (17)$$

$$B_{ij} = \beta_i h_j + \beta_j h_i - \frac{2}{3} \delta_{ij} \beta_k h_k, \quad D_{ij} \equiv \overline{\frac{\partial}{\partial t} \left( u_i u_j - \frac{1}{3} u_i u_\ell \delta_{ij} \right)} u_k, \quad (18)$$

$$\Pi_{ij} = \overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_j}} + \overline{u_j \frac{\partial p}{\partial x_i}} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{\frac{\partial p}{\partial x_k} p u_k} \simeq C_1 \frac{1}{\tau} b_{ij} - \frac{4}{3} C_2 E S_{ij} - C_2 (M_{ij} + N_{ij}) + C_3 B_{ij}, \quad (19)$$

где  $B_{ij} = \beta_i h_j + \beta_j h_i - \frac{2}{3} \delta_{ij} \beta_k h_k$ ,  $M_{ij} = b_{ik} S_{kj} + S_{ik} b_{kj} - \frac{2}{3} \delta_{ij} b_{km} S_{mk}$ ,  $N_{ij} = \Omega_{ik} b_{ij} - b_{ik} \Omega_{kj}$ ;

$$\frac{D}{Dt} h_i + D_{\theta i} = -h_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \tau_{ij} \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} + \beta_i \overline{\theta^2} - \Pi_{\theta i}, \quad (20)$$

где 
$$\Pi_{\theta i} \equiv \overline{\theta \frac{\partial p}{\partial x_i}} \simeq -\frac{C_{1\theta}}{\tau_\theta} h_i + C_{2\theta} h_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - C_{3\theta} \beta_i \overline{\theta^2}. \quad (21)$$

Для корреляций перераспределения давлением  $\Pi_{ij}$  и  $\Pi_{\theta i}$  используются модели (19) и (21), развитые ранее, как отмечено выше, в работах [24, 25]. В формулах (19) и (21) соответственно  $\tau = E/\varepsilon$  и  $\tau_\theta = \overline{\theta^2}/2\varepsilon_\theta$ , а параметр отношения масштабов времени поля скорости ( $\tau$ ) и поля температуры ( $\tau_\theta$ ) в уравнении (13)  $R = \tau/\tau_\theta = 0,6$  [16],  $\sigma_\theta = 1$ .

В приближении локально-равновесной турбулентности левые части прогностических уравнений (15) и (20) полагаются равными нулю, что упрощает их до связанной алгебраической системы девяти уравнений для тензора  $b_{ij}$  и вектора потока тепла  $h_j = \overline{\theta u_j}$ :

$$b_{ij} = -\Delta_1 E \tau S_{ij} - \Delta_2 \tau (M_{ij} + N_{ij}) + \Delta_3 \tau B_{ij}, \quad (22)$$

$$A_{ij} h_j = -\tau \left( b_{ij} + \frac{2}{3} E \delta_{ij} \right) \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} + \tau (1 - C_{2\theta}) \alpha g \delta_{i3} \overline{\theta^2}, \quad (23)$$

$$A_{ij} = C_{1\theta} \delta_{ij} + \tau (1 - C_{2\theta}) \partial U_i / \partial x_j,$$

здесь  $\Delta_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1 - C_2}{C_1}$ ,  $\Delta_2 = \frac{3}{4} \Delta_1$ ,  $\Delta_3 = \frac{1 - C_3}{C_1}$ . Алгебраические уравнения для турбулент-

ных потоков импульса и тепла (22) и (23) включают пять базовых констант, которые откалиброваны на данных экспериментов при замыкании прогностических уравнений (15) и (20):  $C_1 = 2,0$ ,  $C_2 = 0,54$ ,  $C_3 = 0,5$ , их численные значения удовлетворяют калибровочной связи  $(1 - C_2)/C_1 = 0,23$  [26]. Уравнение (23) включает две откалиброванные константы:  $C_{1\theta} = 3,28$ ,  $C_{2\theta} = 0,5$  [16, 19]. Для течений в атмосферных пограничных слоях система уравнений (22), (23) может быть разрешена относительно искомым турбулентных потоков импульса и тепла в аналитическом виде с помощью математической операции символьной алгебры. Полностью явная алгебраическая модель для турбулентных потоков импульса и тепла для атмосферного ПСА имеет вид:

$$\overline{(uw, vw)} = -K_m \left( \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{\partial V}{\partial z} \right), \quad (24)$$

$$\overline{w\theta} = -K_h \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \gamma_c, \quad (25)$$

где 
$$\gamma_c = \frac{1}{D} \left[ 1 + \frac{2}{3} \Delta_2^2 G_M + \lambda_1 \Delta_3 G_H \right] \lambda_2 (\tau \alpha g) \overline{\theta^2},$$

$$D = 1 + d_1 G_M + d_2 G_H + d_3 G_H^2 - d_4 G_M G_H,$$

$$d_1 = \frac{2}{3} \Delta_2^2, \quad d_2 = \frac{7}{3} \lambda_1 \Delta_3, \quad d_3 = \frac{4}{3} (\lambda_1 \Delta_3)^2, \quad d_4 = \frac{2}{3} \lambda_1 \lambda_2 \Delta_2 \Delta_3,$$

$$G_M = (\tau S)^2, \quad G_H = (\tau N)^2, \quad N^2 = \alpha g \frac{\partial \Theta}{\partial z}, \quad S^2 = \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2;$$

$$K_m = \frac{1}{D} \left[ \frac{2}{3} \Delta_2 E \tau \left( 1 - \frac{\Delta_3}{\Delta_2} \lambda_1 \lambda_2 G_H \right) + \lambda_2 \Delta_3 \left( \lambda_2 + \frac{4}{3} \Delta_2 \right) \tau (\tau \alpha g)^2 \overline{\theta^2} \right], \quad (26)$$

$$K_h = \frac{1}{D} \left[ \frac{2}{3} \lambda_1 E \tau (1 + \lambda_1 \Delta_3 G_H) \right], \quad (27)$$

где  $\lambda_1 = 1/C_{1\theta}, \quad \lambda_2 = (1 - C_{2\theta})/C_{1\theta}.$

Включение прогностического уравнения для  $\overline{\theta^2}$  порождает в выражении для турбулентного потока тепла (27) противогradientный член  $\gamma_c$ , который учитывает вклад крупномасштабных вихрей в полном вертикальном потоке тепла.

RANS-3 модель для стратифицированного ПСА включает уравнения (1–3), (10)–(13), (24)–(27).

### 1.3. Явная алгебраическая модель напряжений Рейнольдса в нейтральном ПСА

Нейтральный пограничный слой реализуется в условиях постоянной виртуальной потенциальной температуры при отсутствии потоков тепла и влаги на поверхности, горизонтальных градиентов температуры и облачности. В нейтральном ПСА отсутствуют эффекты плавучести, вызываемые нагреванием или охлаждением поверхности. Модель RANS-3, описанная в разделе 1.2, для напряжений Рейнольдса трансформируется в нейтральном ПСА к более простому виду:

$$\frac{DU}{Dt} = -\frac{\partial \overline{uw}}{\partial z} - f(V_g - V), \quad (28)$$

$$\frac{DV}{Dt} = -\frac{\partial \overline{vw}}{\partial z} + f(U_g - U), \quad (29)$$

$$(\overline{uw}, \overline{vw}) = -K_{m1} \left( \frac{\partial U}{\partial z}, \frac{\partial V}{\partial z} \right), \quad (30)$$

$$K_{m1} = \frac{1}{D_1} \cdot \frac{2}{3} \Delta_2 \frac{E^2}{\varepsilon} = C_{m1} (E^2/\varepsilon), \quad (31)$$

где  $D_1 = 1 + d_1 G_M = 1 + \frac{2}{3} \Delta_2^2 \left[ \frac{E}{\varepsilon} \right]^2 \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right],$

$$C_{m1} = \frac{(2/3) \Delta_2}{1 + (2/3) \Delta_2^2 (E/\varepsilon)^2 \left[ (\partial U/\partial z)^2 + (\partial V/\partial z)^2 \right]}; \quad (32)$$

$$\frac{DE}{Dt} = -\overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} - \overline{vw} \frac{\partial V}{\partial z} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{K_{m1}}{\sigma_E} \cdot \frac{\partial E}{\partial z} \right), \quad (33)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = -\frac{1}{2}\psi_0 \frac{\varepsilon^2}{E} + \frac{1}{2}\psi_1 \frac{\varepsilon}{E_k} P + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{K_{m1}}{\sigma_\varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right). \quad (34)$$

Турбулентное число Шмидта  $\sigma_\varepsilon$  для диффузионного члена  $D_\varepsilon$  в  $\varepsilon$ -уравнении (34) затруднительно аккуратно оценить традиционной процедурой [12] с привлечением из прогностического уравнения ТКЭ (33) приближения «порождение  $\approx$  диссипации» в приземном слое, где  $C_{m1} = (u_*^2/E)$ . В работе [28] были приведены оценки отношения стандартных отклонений компонент скорости к скорости трения со средним значением  $E/u_*^2 = 5,5u_*^2$ , которое может быть использовано как граничное условие на нижней границе. В настоящей модели, как следует из (32), величина  $C_{m1}$  не является константой. Поэтому численное значение турбулентного числа Шмидта  $\sigma_\varepsilon = 0,8$  найдено численной оптимизацией. Турбулентное число Шмидта  $\sigma_E$  в диффузионном члене  $D_E$  прогностического уравнения (33) для ТКЭ выбрано равным 1, как и в других моделях турбулентности [12, 27].

Модель вихревого коэффициента диффузии импульса (31) отличается от стандартных двух- и трехпараметрических моделей [12, 27], в которых коэффициент  $C_\mu$  является постоянной величиной, равной, например, 0,03 в контексте атмосферного пограничного слоя [12] или 0,09 в инженерных приложениях [27], в то время как в выражении (31)  $C_{m1}$  изменяется по толщине пограничного слоя. При этом монотонное поведение коэффициента  $C_{m1}$  претерпевает скачкообразное изменение, выраженное в увеличении последнего при обращении градиентов средней скорости в нуль в верхней части пограничного слоя (маркированная линия на рис. 1), временной масштаб  $\tau = E/\varepsilon$  в пограничном слое — величина конечная.

## 2. Результаты численного моделирования нейтрального ПСА

В представленном здесь численном тестировании начальный профиль ветра выбран равномерным по высоте, равным геострофической скорости ветра:  $U = G = 8$  м/с,  $V = 0$ . Согласно существующей теории нейтрального ПСА, его структура определяется только одним безразмерным параметром — поверхностным числом Россби  $Ro = G/(fz_0)$ , а закон подобия по числу Россби устанавливает [29], что геострофический коэффициент сопротивления  $C_g = u_*/G$  ( $u_*$  — скорость трения на поверхности) — есть функция только числа Россби. Параметр Кориолиса для настоящего теста  $f = 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ . Верхняя граница расчетной области по данным работы [30] определена как  $h = u_*/f$  (в расчетах  $h = 3200$  м для шероховатости  $z_0 = 0,1$  м и  $h = 2600$  м для шероховатости  $z_0 = 0,01$  м). Далее в настоящей работе на рис. 1, 2a, 2b, 4a, 4b, 5 и 6 будут представлены численные результаты для шероховатости поверхности  $z_0 = 0,01$  м (при числе Россби  $Ro = 8 \cdot 10^6$ ). Нормализация величин на рисунках выполнена с привлечением скорости трения  $u_*$ , определенной по фиксированному числу Россби и заданной высоте расчетной области согласно данным [30]. При задании начальных профилей ТКЭ  $E = 5,5u_*^2 z_1/z$  ( $z \geq z_1$ ) и скорости ее диссипации  $\varepsilon_1 = u_*^3/(kz)$  ( $z \geq z_1$ ) скорость трения  $u_*$  определялась значением геострофического коэффициента сопротивления  $C_g = u_*/G$  по фиксированному числу Россби из данных [30]. Постоянная Кармана принята равной  $k = 0,4$ . Скорость трения вычислялась аналитически из логарифмического закона для средней скорости ветра:



Рис. 1. Вертикальный профиль  $C_{m1}$  в явной алгебраической модели турбулентных напряжений Рейнольдса.

$$|\bar{U}|/u_* = k^{-1} \ln(z/z_0), \quad (35)$$

$$u_* = k \frac{\sqrt{U(z_2)^2 + V(z_2)^2}}{\ln(z_2/z_0)}. \quad (36)$$

На верхней границе расчетной области ( $z = h$ )

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = 0. \quad (37)$$

На нижней границе, в первом узле разностной сетки ( $z = z_1$ )

$$E = 5,5 u_*^2 \text{ [28]}, \quad \varepsilon_1 = u_*^3 / k z_1. \quad (38)$$

В предположении малого влияния сил Кориолиса в приземном слое, с учетом (35), в первых двух узлах разностной сетки выполняется условие

$$\frac{U(z_1)}{U(z_2)} = \frac{V(z_1)}{V(z_2)} = \frac{\ln(z_1/z_0)}{\ln(z_2/z_0)}, \quad (39)$$

которое используется в качестве граничного условия для компонент скорости ветра.

Результаты вычисления некоторых основных характеристик нейтрального ПСА приведены на рис. 1–6 после 12 часов интегрирования. Система уравнений (28), (29), (33) и (34) при заданных начальных и граничных условиях решена методом конечных разностей по полуявной схеме [31] на сетке со смещенными узлами. Шаг по вертикальной координате равен  $10^{-3}h$ , где  $h = u_*/f$  — заданная высота расчетной области.

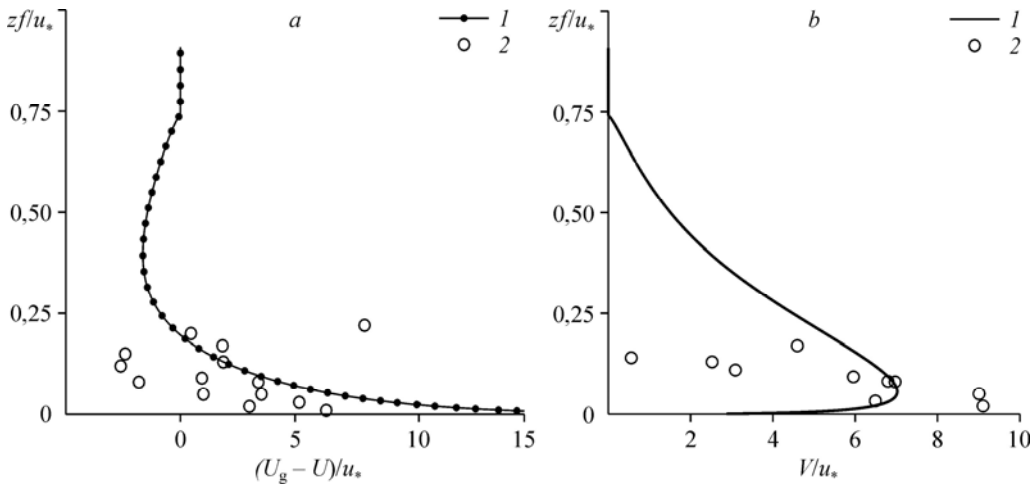


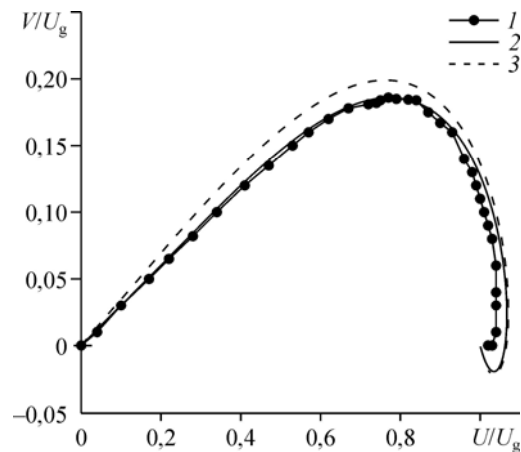
Рис. 2. Вертикальный профиль дефекта горизонтальной скорости ветра (a) и вертикальный агеострофический профиль скорости ветра (b).

1 — RANS-расчет по алгебраической модели турбулентности для  $Ro = 8 \cdot 10^6$ , 2 — данные измерений [32].

Рис. 3. Экмановская спираль средней скорости ветра.  
 1 — DNS-расчет [33], 2 — RANS-расчет по явной модели турбулентности для  $Ro = 8 \cdot 10^6$ ,  
 3 — RANS-расчет по явной модели турбулентности для  $Ro = 8 \cdot 10^5$ .

### 2.1. Профили скорости, спираль Экмана

На рис. 2а, 2б представлены профили компонент среднего ветра. Здесь сплошная линия показывает расчет по настоящей алгебраической модели реинольдсовых напряжений, символами нанесены опытные данные [32], взятые из работы [12]. Следует отметить, что приведенные на рис. 2а, 2б, 4а, 4б, 5 и 6 опытные данные получены в экмановском слое над водной поверхностью в условиях лишь приближенно нейтральных из-за наличия слабо устойчивого слоя в верхней части, что подтверждается измеренным профилем потенциальной температуры, нейтральным до некоторой высоты и с устойчивым градиентом наверху. Рисунок 3 отображает спираль Экмана для средней скорости ветра. В отличие от классической экмановской спирали с постоянным по высоте коэффициентом вязкости и углом поворота ветра  $45^\circ$ , в турбулентном экмановском пограничном слое с переменным по вертикали вихревым коэффициентом диффузии импульса спирали Экмана располагаются существенно ближе к направлению геострофического ветра. Наиболее изменчивым параметром в определении числа Россби является высота шероховатости поверхности  $z_0$ . Для большего числа Россби и, соответственно, меньшего значения  $z_0$  спираль Экмана фиксирует меньший угол поворота ветра. Для числа Россби  $Ro = 8 \cdot 10^6$  ( $z_0 = 0,01$  м) полный угол поворота ветра  $\alpha \cong 16,7^\circ$  (сплошная линия на рис. 3), а для числа Россби  $Ro = 8 \cdot 10^5$  ( $z_0 = 0,1$  м) угол поворота ветра  $\alpha \cong 18,8^\circ$  (штриховая линия на рис. 3). Эти значения находятся в согласии с данными измерений [30]. Величина угла поворота среднего ветра уменьшается с увеличением числа Россби, что согласуется с LES-расчетами [33]: спираль для  $z_0 = 0,1$  м располагается выше, чем спираль для  $z_0 = 0,01$  м. С увеличением числа Россби профиль спирали плотнее прижимается к поверхности. На рис. 3 показан также годограф скорости, полученный в турбулентном нейтральном слое Экмана методом прямого численного моделирования (см. рис. 1б в работе [33]). Следует отметить, что LES-моделирование представляет собой эффективную вычислительную технику для исследования турбулентных течений, которая применялась при исследовании устойчивого ПСА (см. ссылки в работе [33]). Однако ее применимость к моделированию сильно устойчивых стратифицированных течений остается неясной. Предшествующие исследования наводят на мысль, что LES-моделирование не может accurately предсказывать характеристики течения в подобных условиях (см. ссылки в [33]). В литературе широко показано, что статистика течений, полученная методом LES, оказывается зависящей от используемой подсеточной модели (subgrid-scale (SGS)), типа фильтра, пространственного разрешения и других численных деталей. Эти факторы ограничивают точность воспроизведения статистики течения в поверхностном слое при больших числах Рейнольдса. Когда энергосодержащие масштабы движения достаточно малы и имеют тот же порядок, что и размер вычислительной сетки, как это имеет место в случае устойчивого течения Экмана, LES-метод может и не воспроизводить корректно



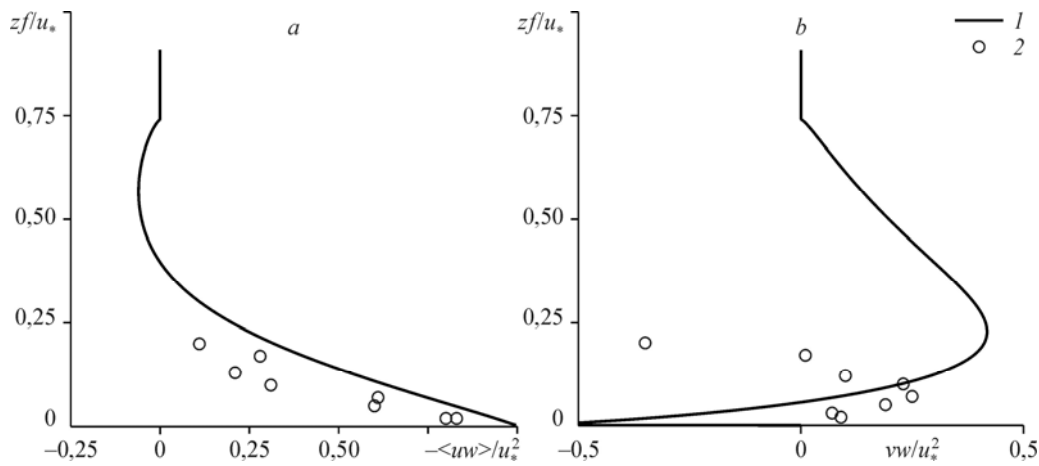


Рис. 4. Вертикальные профили горизонтального (а) и агеострофического (б) турбулентных потоков импульса.

1 — RANS-расчет при  $Ro = 8 \cdot 10^6$ , 2 — данные измерений [32].

подсеточные потоки турбулентности [35, 36]. В обходе ограничений данных наблюдений и LES-техники жизнеспособная альтернатива в перспективе может быть связана с развитием прямого численного моделирования (DNS). Однако пока это возможно лишь для чисел Рейнольдса, которые меньше характерных для пограничного слоя атмосферы [33].

## 2.2. Профили турбулентных напряжений, турбулентная кинетическая энергия, коэффициент турбулентной вязкости и скорость трения

Турбулентная статистика в численном тесте представлена касательными напряжениями Рейнольдса на рис. 4а, 4б и профилем ТКЭ на рис. 5. Профили турбулентных касательных напряжений Рейнольдса на рис. 4а, 4б, которые максимальны вблизи поверхности, монотонно уменьшаются с высотой. В случае вертикального профиля кинетической энергии турбулентности, изображенном на рис. 5, видно, что величина  $E/u_*^2$  уменьшается с высотой.

На рис. 6 приведены вертикальные профили вихревого коэффициента диффузии импульса и для сравнения нанесены данные других авторов. На рис. 7 показана скорость трения на поверхности в зависимости от времени интегрирования. Как и в LES-расчете [34], скорость трения на поверхности уменьшается с увеличением числа Россби.

Особенность настоящей явной алгебраической модели вихревого коэффициента диффузии импульса для нейтрального атмосферного пограничного

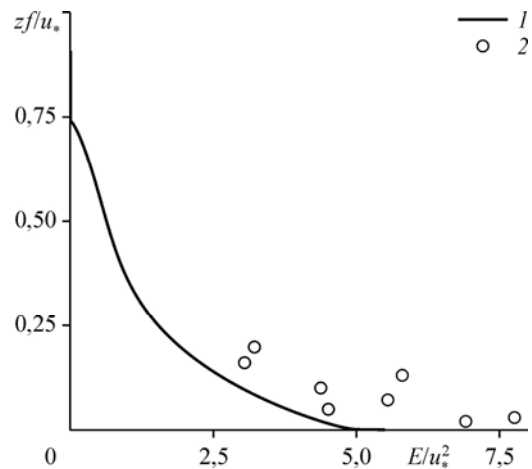


Рис. 5. Вертикальный профиль кинетической энергии турбулентности.  
1 — RANS-расчет по явной модели турбулентности для  $Ro = 8 \cdot 10^6$ , 2 — данные измерений [32].

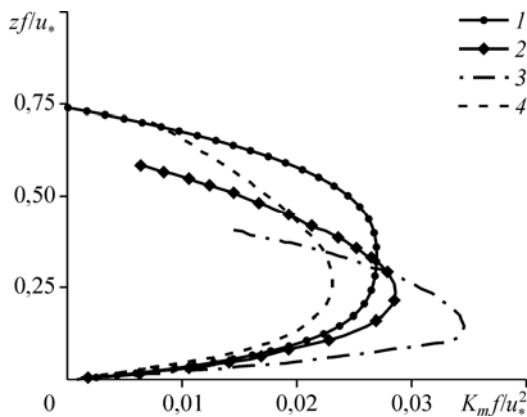


Рис. 6. Вертикальный коэффициент диффузии импульса. Вычисление по явной алгебраической модели турбулентных напряжений ( $Ro = 10^6$  (1), модифицированная  $E-\varepsilon$  модель [37] (2), результаты вычислений [38] (3) и [39] (4).

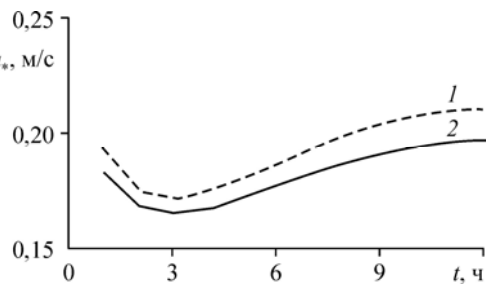


Рис. 7. Скорость трения на поверхности.  $Ro = 8 \cdot 10^5$  (1),  $8 \cdot 10^6$  (2); по оси абсцисс — время счета в часах.

Рейнольдса ( $-\overline{uw}$ ,  $\overline{vw}$ ) и турбулентная кинетическая энергия  $E$ , коэффициент  $C_{m1}$  претерпевает скачкообразное изменение, оставаясь выше этой высоты величиной постоянной. Это объясняется структурой входящего в  $C_{m1}$  выражения  $D_1$ , в котором второе слагаемое обращается в нуль из-за обращения в нуль вертикальных градиентов компонент средней скорости ветра ( $U$ ,  $V$ ) на указанной высоте. Временной масштаб турбулентности  $\tau = E/\varepsilon$  является величиной конечной в пограничном слое (профиль на рисунке не показан).

### Заключение

В настоящей работе выполнено численное моделирование нейтрально стратифицированного атмосферного пограничного слоя — классической задачи геофизической гидромеханики. Новизна работы состоит в использовании явной алгебраической модели для турбулентных потоков импульса, которая является предельным случаем полной явной модели турбулентных потоков импульса и тепла для термически стратифицированного пограничного слоя атмосферы. Модель правильно воспроизводит вертикальные профили средней скорости ветра, касательных турбулентных напряжений, вертикального распределения кинетической энергии турбулентности и поведение экмановской спирали среднего ветра в зависимости от величины числа Россби. Полученные характеристики нейтрального течения Экмана предполагается использовать в качестве входного модуля при численном исследовании эволюции структуры устойчиво стратифицированного планетарного пограничного слоя с неустановившейся температурой поверхности.

### Список литературы

1. Holtslag A.A.M., Svensson G., Baas P., Basu S., Beare B., Beljaars A.C.M., Bosveld F.C., Cuxart J., Lindvall J., Steeneveld G.J., Tjernström M., Van deWiel B.J.H. Stable atmospheric boundary layers and diurnal cycles: challenges for weather and climate models // Bull Am Meteor Soc. 2013. Vol. 94, No. 11. P. 1691–1706.
2. Boussinesq J. Essai sur la théorie des eaux courantes Paris: Imprimerie Nationale, 1877. 741 p.
3. Prandtl L. Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz // Z. Angew. Math. Mech. 1925. Vol. 5, No. 2. P. 136–139.

4. Колмогоров А.Н. Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности // Докл. АН СССР. 1941. Т. 32. С. 19–21.
5. Мошин А.С., Обухов А.М. Основные закономерности турбулентного перемешивания в приземном слое атмосферы // Тр. Геофизического института. М.: Изд-во АН СССР, 1954. № 25 (151). С. 163–187.
6. Колмогоров А.Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР, Сер. Физика. 1942. Т. 6, № 1–2. С. 56–58.
7. Tennekes H., Lumley J.L. A first course in turbulence. MIT Press, 1972. 300 p.
8. Mellor G.L., Yamada T. Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems // Rev. Geophys Space Phys. 1982. Vol. 20. P. 851–875.
9. Andren A.A. TKE-dissipation model for the atmospheric boundary layer // Boundary-Layer Meteorology. 1991. Vol. 56. P. 207–221.
10. Курбацкий А.Ф. Противогradientный перенос тепла в атмосферном пограничном слое над шероховатой поверхностью // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2008. Т. 44, № 2. С. 171–177.
11. Kurbatskii A.F., Kurbatskaya L.I.  $E - \varepsilon - \overline{\theta^2}$  turbulence closure model for an atmospheric boundary layer including the urban canopy // Meteorol. Atmos. Phys. 2009. Vol. 104, No. 1–2. P. 63–81.
12. Duynkerke P.G. Application of the  $E - \varepsilon$  turbulence closure model to the neutral and stable atmospheric boundary layer // J. Atmos. Sci. 1988. Vol. 45, No. 5. P. 865–880.
13. Илюшин Б.Б., Курбацкий А.Ф. О применимости  $E - I$  и  $E - \varepsilon$  моделей турбулентности к нейтральному горизонтально неоднородному атмосферному пограничному слою // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1994. Т. 30, № 5. С. 615–622.
14. Rodi W. A new algebraic relation for calculating the Reynolds stresses // Z. Angew. Math. Mech. 1976. Vol. 56. P. 219–221.
15. Cheng Y., Canuto V.M., Howard A.M. An improved model for the turbulent PBL // J. Atmos. Sci. 2002. Vol. 59, No. 5. P. 1550–1565.
16. Sommer T.P., So R.M.C. On the modelling of homogeneous turbulence in a stably stratified flow // Phys. Fluids. 1995. Vol. 7, No. 11. P. 2766–2777.
17. So R.M.C., Vimala P., Jin L.H., Zhao C.Y., Gatski T.B. Accounting for buoyancy effects in the explicit algebraic stress model: homogeneous turbulent shear flows // Theor. Comput. Fluid Dyn. 2002. Vol. 15. P. 283–302.
18. So R.M.C., Jin L.H., Gatski T.B. An explicit algebraic Reynolds stress and heat flux model for incompressible turbulence Part II: Buoyant flow // Theor. Comput. Fluid Dyn. 2004. Vol. 17. P. 377–406.
19. Jin L.H., So R.M.C., Gatski T.B. Equilibrium states of turbulent homogeneous buoyant flows // J. Fluid Mech. 2003. Vol. 482. P. 207–233.
20. Kurbatskii A.F. Computational modeling of the turbulent penetrative convection above the urban heat island in stably stratified environment // J. Appl. Meteor. 2001. Vol. 40, No. 10. P. 1748–1761.
21. Курбацкий А.Ф., Курбацкая Л.И. Трехпараметрическая модель турбулентности для атмосферного пограничного слоя над урбанизированной поверхностью // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2006. Т. 42, № 4. С. 476–494.
22. Rotta J.C. Statistische theorie nichthomogener turbulence // Zs. Phys. 1951. Vol. 129, No. 5. P. 547–572.
23. Rotta J.C. Statistische theorie nichthomogener turbulence // Zs. Phys. 1951. Vol. 131, No. 1. P. 51–77.
24. Launder B.E., Reece G.J., Rodi W. Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure // J. Fluid Mech. 1975. Vol. 68. P. 537–566.
25. Launder B.E. On the effects of a gravitational field on the turbulent transport of heat and momentum // J. Fluid Mech. 1975. Vol. 67. P. 569–581.
26. Launder B.E. An introduction to single-point closure methodology // Simulation and modeling of turbulent flows / eds. N. Gatski, M. Hussaini, J. Lumley. Oxford University Press. 1996. P. 243–310.
27. Lazeroms W.M.J., Svensson G., Bazile E., Brethouwer G., Wallin S., Johansson A.V. Study of transitions in the atmospheric boundary layer using explicit algebraic turbulence models // Boundary-Layer Meteor. 2016. Vol. 161. P. 19–47.
28. Panofsky H.A., Dutton J.A. Atmospheric turbulence. Wiley & Sons, 1984. 397 p.
29. Теннекек Х. Законы подобия, масштабные соотношения и спектральная динамика // Атмосферная турбулентность и моделирование распространения примесей. Л.: Гидрометеиздат, 1985. С. 51–82.
30. Зилитинкевич С. Динамика пограничного слоя атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1970. 292 с.
31. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
32. Nicholls S. Aircraft observations of the ekman layer during the joint air-sea interaction experiment // Quart. J. Meteor. Soc. 1985. Vol. 111. P. 391–426.
33. Gohari S.M., Sarkar S. Direct numerical simulation of turbulence collapse and rebirth in stably stratified ekman flow // Boundary-Layer Meteor. 2017. Vol. 162. P. 401–426.
34. Шокуров М.В., Артамонов С.Ю., Эзау И.Н. Численное моделирование нейтрально стратифицированного атмосферного пограничного слоя // Морской гидрофизический журнал. 2013. № 2. С. 37–50.

35. **Jiménez M.A., Cuxart J.** Large-eddy simulations of the stable boundary layer using the standard Kolmogorov theory: range of applicability // *Boundary-Layer Meteorol.* 2005. Vol. 115. P. 241–261.
36. **Van de Wiel B.J.H., Moene A.F., Jonker H.J.J.** The cessation of continuous turbulence as precursor of the very stable nocturnal boundary layer // *J. Atmospheric Sci.* 2012. Vol. 69. P. 3097–3115.
37. **Duynkerke P.G.** Application of the  $E$ - $\varepsilon$  turbulence closure model to the neutral and stable atmospheric boundary layer // *J. Atmospheric Sci.* 1988. Vol. 45. P. 865–880.
38. **Hinze J.Q.** *Turbulence.* McGraw-Hill, 1975. 790 p.
39. **Wyngaard J.C., Cote O.R., Rao K.S.** Modeling the atmospheric boundary layer // *Advances in Geophysics.* Academic Press, 1974. Vol. 18A. P. 193–211.

*Статья поступила в редакцию 9 января 2017 г.*