

14. Wehausen J.V., Laitone E.V. Surface waves // Handbuch der Physik. — Berlin: Springer Verlag, 1960. — V. 9.
15. Wu G.X., Eatock Taylor R. Reciprocity relations for the hydrodynamic coefficients of bodies with forward speed // Int. Shipbuild. Progr. — 1988. — V. 35, N 402.

г. Новосибирск

Поступила 14/X 1993 г.

УДК 532.59

Е.А. Карабут

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН

Известно большое количество работ, в которых изучаются численно и аналитически уединенные волны на поверхности жидкости; все они посвящены изучению только одного решения, хотя недавно доказана теорема о неединственности [1]. Метод, позволяющий строить все решения, предложен в [2]. Суть этого метода состоит в поиске решения в виде ряда, члены которого находятся по рекуррентным формулам, но первый член остается неопределенным. Для его нахождения получено уравнение, которое может иметь несколько решений.

Численной реализации предложенного метода посвящена данная работа. Проведено численное суммирование, обнаружено ветвление решения, проведено сравнение с работами предыдущих авторов.

Уединенная волна на поверхности жидкости — предмет детального изучения, начиная с работ [3—6], от которых берет свое начало вся солитонная тематика. Существующие результаты в большинстве приближенные и относятся к изучению уединенных волн малой амплитуды. Точных результатов значительно меньше. Из последних отметим доказательства существования уединенной волны [7, 8], неединственности уединенных волн при фиксированном числе Фруда [1] и существования острого гребня с углом 120° при вершине для волны предельной амплитуды [9]. Результаты, касающиеся формы профиля уединенной волны, ее массы, энергии, импульса и т.д., получены в основном численно. Применялись две группы методов. Первая связана с конечно-разностным решением интегродифференциального уравнения, к которому сводится задача [10, 11]. Вторая основана на численном суммировании решения, представленного в виде ряда [12—14].

Рассмотрим плоское безвихревое установившееся течение тяжелой жидкости над горизонтальным дном. Ось X декартовой системы координат направим вдоль дна, а ось Y — вертикально вверх. Начало координат поместим на дне таким образом, чтобы ось Y проходила через наивысшую точку свободной поверхности (рис. 1). Обозначим через h_0 глубину невозмущенной жидкости на бесконечности, u_0 — скорость набегающего потока на бесконечности, g — ускорение свободного падения, φ — потенциал, ψ — функцию тока.

Задача нахождения уединенной волны, т.е. задача построения течения со свободной границей $Y = Y_1(X)$, удовлетворяющей условию

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} Y_1(X) = h_0,$$

зависит от одного параметра, в качестве которого можно взять число Фруда

$$Fr = \frac{u_0}{\sqrt{gh_0}} > 1$$

или параметр Стокса θ , определяемый из уравнения

$$\text{Fr}^2 = \frac{1g\theta}{\theta}, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2},$$

которое возникает после линеаризации исходной задачи на равномерном потоке $Y_1(X) = h_0$, $\varphi = u_0 X$. Такая линеаризация, справедливая там, где свободная поверхность незначительно отличается от невозмущенного уровня, остается, по-видимому, локально справедливой при $|X| \rightarrow \infty$. В главном члене имеем

$$Y_1(X) \sim h_0 \exp(-\theta |X| / h_0).$$

Уединенным волнам малой амплитуды соответствует предел $\theta \rightarrow 0$. Параметр Стокса $\theta^* \approx \pi/3$ отвечает уединенной волне предельной амплитуды. Из численных результатов [11] следует, что существует параметр Стокса θ^{**} ($\theta^* < \theta^{**} < \pi/2$) такой, что при $0 \leq \theta < \theta^*$ есть одна уединенная волна, при $\theta^* \leq \theta < \theta^{**}$ — две волны, а при $\theta > \theta^{**}$ не существует уединенных волн. Возможно, что неединственность, доказанная в [1], объясняется тем, что θ — неоднозначный параметр. Если взять число Фруда, определенное через скорость на вершине волны, то неединственность исчезает [14].

Уединенную волну описывают высшие приближения теории мелкой воды. Систематический вывод таких приближений предложен в [15]. Решение может быть представлено в виде степенного ряда по θ^2 (или по амплитуде). Первое [16], второе [17] и более высокие приближения, полученные позднее, дают основания считать, что

$$(1) \quad \frac{Y_1(X)}{h_0} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \theta^{2j} \sum_{n=1}^j \frac{\alpha_{jn}}{\left(\text{ch} \frac{\theta X}{2h_0}\right)^{2n}}.$$

Гипотеза о том, что коэффициенты этого ряда — полиномы от $\left(\text{ch} \frac{\theta X}{2h_0}\right)^{-2}$, по-видимому, никем не доказана, хотя активно используется, и основные усилия направлены на поиск максимально возможного количества членов этого ряда. Без помощи ЭВМ такая задача трудноразрешима, так как рекуррентные формулы здесь очень сложны. С использованием ЭВМ в [13] найдено решение (1) вплоть до θ^{18} , в [14] — до θ^{28} , в [12] — до θ^{34} .

Если в (1) переставить суммы, то в результате

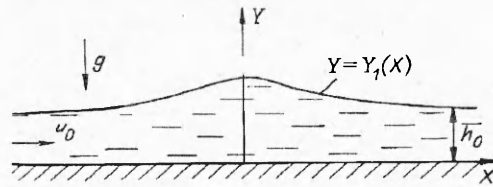
$$(2) \quad \frac{Y_1(X)}{h_0} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\left(\text{ch} \frac{\theta X}{2h_0}\right)^{2n}},$$

где

$$(3) \quad a_n = O(\theta^{2n}).$$

Подставляя этот ряд в граничные условия, получим рекуррентные формулы для последовательного нахождения коэффициента a_n . Это сделано в [12], однако решение вида (2) все же не было построено, так как первый коэффициент a_1 является неопределенным.

Задача существенно упрощается, если ее формулировать не в физической плоскости X, Y , в которой свободная граница неизвестна, а перейти в



Р и с. 1

плоскость комплексного потенциала $\Phi = \varphi + i\psi$. Обезразмеривание задачи проведем, следуя [2]:

$$(4) \quad Z = X + iY = \frac{h_0}{\theta}(z + W(z)), \quad z = x + iy = \frac{\theta}{h_0 u_0} \Phi.$$

В плоскости безразмерного комплексного потенциала z жидкость будет занимать полосу шириной θ . Для нахождения уединенной волны необходимо решить следующую задачу.

Задача 1. Найти функцию $W(z) = A(x,y) + iB(x,y)$, аналитическую в полосе

$$0 < y < \theta, \quad -\infty < x < \infty,$$

удовлетворяющую условию

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} B(x,y) = 0, \quad A(x,y) = O(1) \text{ при } |x| \rightarrow \infty$$

и краевым условиям [2]:

постоянства давления

$$(5) \quad \begin{aligned} B_y - \nu B &= f \quad (y = \theta) \\ \left(f = \frac{2\nu^2 B^2}{1 - 2\nu B} - \frac{1}{2}(B_x^2 + B_y^2), \nu = \operatorname{ctg} \theta \right); \end{aligned}$$

непротекания

$$(6) \quad B = 0 \quad (y = 0).$$

Решение этой нелинейной краевой задачи существует, но получить его трудно (по-видимому, можно только численно). Поэтому было предложено решать более простую задачу [2].

Задача 2. Найти функцию, представленную асимптотическим рядом

$$(7) \quad W(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^z \mu^n dz, \quad \mu = \frac{1}{2 \left(\operatorname{ch} \frac{z}{2} \right)}, \quad \operatorname{Im} b_n = 0,$$

удовлетворяющим граничному условию (5).

Подставляя ряд (7) в граничное условие (5), можно получить рекуррентные формулы для последовательного нахождения коэффициентов b_n . Так же как и в (2), первый коэффициент b_1 оказывается неопределенным. Для нахождения b_1 в [2] предложено определяющее уравнение, численное решение которого получено в данной работе. Найдены свидетельства в пользу того, что одно из построенных таким образом решений совпадает с (1).

В физической плоскости построение высших приближений мелкой воды по методу [15] связано с растяжением горизонтальной переменной X , в то время как вертикальная переменная Y остается неизменной. При этом аналитичность функций, описывающих течение, нарушается. Находкой Овсянникова [2] является такая формулировка задачи в плоскости комплексного потенциала, при которой аналитичность функций не нарушается. Необходимое растяжение по оси X обеспечивается несколько искусственной на первый взгляд нормировкой (4), благодаря которой полоса в плоскости z , соответствующая жидкости, при $\theta \rightarrow 0$ стягивается в линию. Построение высших приближений теории мелкой воды связано с решением следующей задачи.

Задача 3. Найти функцию, представленную формальным степенным рядом

$$(8) \quad W(z) = \sum_{j=1}^{\infty} W^{(j)}(z) \theta^{2j},$$

удовлетворяющим граничным условиям (5), (6).

Подставляя (8) в граничное условие, рассматривая предел $\theta \rightarrow 0$, собирая члены при одинаковых степенях θ , при θ^4 получим

$$W_{zzz}^{(1)} - W_z^{(1)} + \frac{9}{2}(W_z^{(1)})^2 = 0.$$

Решение этого уравнения, убывающее на бесконечности:

$$W_z^{(1)} = \frac{2}{3}\mu, \quad W^{(1)} = \frac{2}{3}\operatorname{th}\frac{z}{2}, \quad \mu = \frac{1}{2\operatorname{ch}\frac{z}{2}}.$$

Анализ последующих коэффициентов здесь существенно проще, чем в (1), и выясняется, что все $W_z^{(j)}$ — это полиномы от μ . Становится понятным выбор разложения (7). Оно находится в таком же соответствии с (8), как и разложение (2) с (1). Теперь можно забыть о происхождении ряда (7), разыскивая решение в виде (7) в надежде, что этот ряд описывает и другие решения.

Рассмотрим мнимую часть (7). Следуя [2], получим

$$(9) \quad B(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n B_n(x, y),$$

где

$$B_n(x, y) = \frac{1}{2^{n-1}} \operatorname{Im} \int_0^{\chi(z)} (1 - u^2)^{n-1} du;$$

$$\chi(z) = \frac{e^z - 1}{e^z + 1} = Q + iP; \quad P = \frac{\operatorname{siny}}{\operatorname{ch}x + \operatorname{cos}y}.$$

Функции B_n являются полиномами от P , коэффициенты которых в свою очередь — полиномы от $\omega = \operatorname{ctgy}$. Имеем

$$B_1 = P,$$

$$B_2 = \omega P^2 + \frac{2}{3}P^3,$$

$$B_3 = \left(\omega^2 - \frac{1}{3}\right)P^3 + 2\omega P^4 + \frac{4}{5}P^5,$$

.....

$$B_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} P^k \sum_{i=\left[\frac{k}{2}\right]}^{n-1} (-1)^{n-i-1} \binom{k}{2l+1-k} \binom{k-1-l}{n-1-l} 2^{k-n} \omega^{2l+1-k}.$$

Подставим (9) в (5) и, используя формулы

$$P_y = \omega P + P^2, \quad P_x^2 + P_y^2 = (\omega^2 + 1)P^2,$$

преобразуем граничное условие в виде ряда по степеням P . Приравнявая члены при каждой степени P (при первой степени имеем тождество), получим рекуррентную цепочку формул для последовательного нахождения b_n . Коэффициент b_1 остается неопределенным, а остальные являются функциями от него:

$$(10) \quad b_2 = b_1 + \left(-\frac{3}{2}\nu^2 + \frac{1}{2}\right)b_1^2;$$

$$(11) \quad b_3 = \frac{5}{4}b_1 + (-3\nu^2 + 1)b_1^2 + \left(\frac{27}{16}\nu^4 - \frac{21}{8}\nu^2 + \frac{3}{16}\right)b_1^3;$$

$$(12) \quad b_4 = \frac{7}{4}b_1 + \left(-\frac{21}{4}\nu^2 + \frac{7}{4}\right)b_1^2 + \left(\frac{81}{16}\nu^4 - \frac{63}{8}\nu^2 + \frac{9}{16}\right)b_1^3 + \\ + \frac{1}{5\nu^2 - 1} \left(-\frac{135}{16}\nu^6 + \frac{261}{8}\nu^6 - \frac{41}{2}\nu^4 + \frac{19}{8}\nu^2 - \frac{1}{16}\right)b_1^4;$$

$$(13) \quad b_n(b_1) = \sum_{k=1}^n d_n^k b_1^k.$$

Видно из (12), что когда $\nu^2 = 1/5$ или $\operatorname{tg}\theta = \sqrt{5}$, то b_4 обращается в бесконечность. Более того, значений θ , при которых это происходит, бесконечно много. Все они удовлетворяют уравнению

$$(14) \quad \operatorname{tg}m\theta = m\operatorname{tg}\theta, \quad m \geq 4.$$

Если найдется такое m , что при заданном θ это уравнение выполнено, то предлагается положить

$$b_1 = b_2 = \dots = b_{m-1} = 0$$

и решение искать в виде

$$B = \sum_{n=m}^{\infty} b_n B_n(x, y).$$

Здесь уже в качестве неопределенного коэффициента выступает b_m .

Следуя [2], рассмотрим выражение

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^{\theta} (BH_x - HB_x) dx \quad (H = \operatorname{ch}x \cdot \sin y),$$

которое, с одной стороны, в силу асимптотики $B = b_1 P + O(P^2)$ есть $b_1(\theta - \sin\theta \cdot \cos\theta)$, а с другой — в силу формулы Грина с учетом граничных условий дает

$$\int_0^a (Hf)_{y=\theta} dx = \int_0^{\theta} (BH_x - HB_x)_{x=a} dy.$$

Рассматривая предел $a \rightarrow \infty$, имеем

$$(15) \quad G(b_1) = \int_0^{\infty} f(x, \theta) \operatorname{ch}x dx - b_1 \left(\frac{\theta}{\sin\theta} - \cos\theta \right) = 0,$$

где f — функция, входящая в граничное условие (5). Это уравнение, полученное в [2], не является тождеством, и ему должно удовлетворять всякое решение задачи 1. Поэтому его можно использовать для нахождения b_1 .

Приступая к численному решению уравнения $G(b_1) = 0$, нужно учитывать, что функция f не известна точно. Ее можно представить в виде ряда, и ряд этот необходимо обрывать. В данной работе функция f представляется в виде степенного ряда по степеням P . Обрывая этот ряд на N -м члене, получим приближенное уравнение $G_N(b_1) = 0$. Численно находя корни этого уравнения и наблюдая за их поведением при $N \rightarrow \infty$, можно оценить значение b_1 .

Подставляя (9) в (15), имеем следующий ряд:

$$(16) \quad G(b_1) = \sum_{n=2}^{\infty} b_n(b_1) \int_0^{\infty} L_n \operatorname{ch}x dx.$$

Здесь функции

$$L_n = \frac{\partial}{\partial y} B_n - \omega B_n \Big|_{y=0}$$

являются полиномами от P и ν :

$$L_1 = P^2,$$

$$L_2 = -P^2 + \frac{10}{3}\nu P^3 + 2P^4,$$

.....

$$L_n = \sum_{j=n}^{2n} a_n^j P^j.$$

Непосредственным интегрированием нетрудно доказать, что

$$\int_0^{\infty} L_n \operatorname{ch} x dx \equiv 0, \quad n \geq 2.$$

Поэтому равенство (16), переписанное в более подробной форме в виде

$$(17) \quad G(b_1) = \sum_{n=2}^{\infty} b_n(b_1) \sum_{j=n}^{2n} a_n^j \int_0^{\infty} P^j \operatorname{ch} x dx \equiv 0,$$

является на самом деле тождеством, справедливым при произвольном b_1 . По-видимому, здесь двойной ряд (17) сходится неабсолютно, так как при перестановке порядка суммирования, которую надо сделать, чтобы получить $G_N(b_1)$, тождество превращается в уравнение

$$G(b_1) = \sum_{j=2}^{\infty} \int_0^{\infty} P^j \operatorname{ch} x Q_j dx \quad (Q_j = \sum_{k=1}^j b_1^k \sum_{n=\max(2k, \lceil \frac{j+1}{2} \rceil)}^j a_n^k d_n^k).$$

Здесь d_n^k определяется из (13). Приведем несколько начальных членов:

$$Q_2 = b_1^2 \left(\frac{3}{2} \nu^2 - \frac{1}{2} \right) - b_1,$$

$$Q_3 = b_1^3 \left(-\frac{9}{2} \nu^5 + 7\nu^3 - \frac{1}{2} \nu \right) + b_1^2 (3\nu^3 - \nu),$$

$$Q_4 = b_1^4 \left(\frac{135}{16} \nu^8 - \frac{261}{8} \nu^6 + \frac{41}{2} \nu^4 - \frac{19}{8} \nu^2 + \frac{1}{16} \right) +$$

$$+ b_1^3 \left(-\frac{27}{2} \nu^6 + 21\nu^4 - \frac{3}{2} \nu^2 \right) + b_1^2 \left(\frac{21}{4} \nu^4 - \nu^2 - \frac{1}{4} \right).$$

Имеем также

$$\int_0^{\infty} P^j \operatorname{ch} x dx = \sin \theta \cdot K_j,$$

где

$$K_2 = \theta(\nu^2 + 1) - \nu;$$

$$K_3 = \theta \left(-\frac{3}{2} \nu^3 - \frac{3}{2} \nu \right) + \frac{3}{2} \nu^2 + 1;$$

$$K_4 = \theta \left(\frac{5}{2} \nu^4 + 3\nu^2 + \frac{1}{2} \right) - \frac{5}{2} \nu^3 - \frac{13}{6} \nu.$$

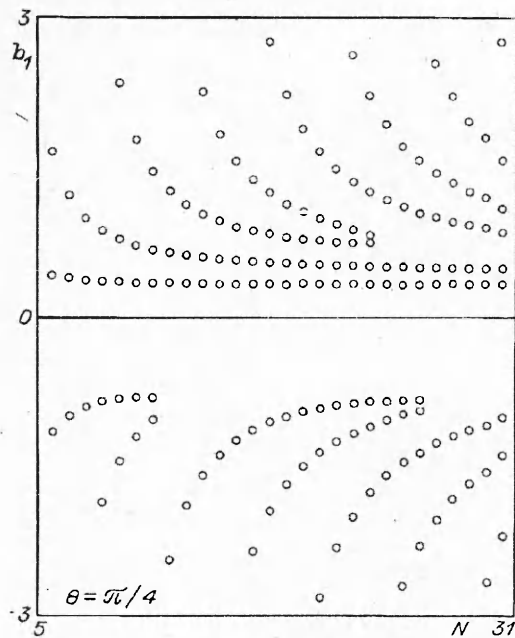


Рис. 2

Из оставшихся вещественных необходимо оставить лишь те корни $b_1^{(N)}$, для которых существует предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} b_1^{(N)} = b_1^*$$

Вычисления проводились в рациональных числах (IBM PC, система REDUCE, 20 членов ряда) и в арифметике с плавающей запятой (БЭСМ-6, длина мантиисы 24 десятичных разряда, 70 членов ряда). Предложенный алгоритм имеет слабое математическое обоснование. Поэтому необходимо было численно проверять его работоспособность. Первый вопрос, который надо было выяснить: существуют ли вообще последовательности корней $\{b_1^{(N)}\}$, имеющие предел? Ответ на этот вопрос дает рис. 2. Здесь для $\theta = \pi/4$ изображены все вещественные корни (18), лежащие в интервале $-3 \leq b_1 \leq 3$ для $N = 5 \div 31$. Видно, что существуют, по крайней мере, две последовательности корней, стремящиеся к пределу. Второго вопроса, который здесь возникает: описывает ли метод Овсянникова [2] ранее найденное решение (1)? Для выяснения этого вопроса надо сравнить значения b_1 , полученные численным решением уравнения (18), со значением, полученным в предположении, что b_1 — аналитическая функция от θ^2 (или от $t = \operatorname{tg}^2 \theta = \nu^{-2}$):

$$(19) \quad b_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k t^k.$$

По аналогии с (3) потребуем $b_n = O(t^n)$. Подставляя (19) в формулу для b_2 (10) и приравнявая там нулю члены, содержащие первую степень t , имеем $\beta_1 = 2/3$; подставляя затем в формулу для b_3 (11) и приравнявая члены, содержащие t^2 , получим β_2 (члены, содержащие t , исчезнут автоматически). Действуя далее аналогично, находим

$$(20) \quad b_1 = \frac{2}{3}t - \frac{2}{3}t^2 + \frac{262}{405}t^3 - \frac{6406}{10125}t^4 + \frac{1661985}{2679075}t^5 - \frac{612601582}{1004653125}t^6 + \dots$$

Таким образом, определяющее уравнение (15) представлено в виде ряда по полиномам от b_1 :

$$G(b_1) = \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{k=1}^j g_j^k b_1^k.$$

Коэффициенты полиномов g_j^k — функции от θ . Обрывая этот ряд, получим приближенное определяющее уравнение, используемое в данной работе:

$$(18) \quad G_N(b_1) = \sum_{j=2}^N \sum_{k=1}^j g_j^k b_1^k = 0.$$

Это уравнение имеет N корней. С ростом N все большая их часть не имеет отношения к задаче. Отбросить необходимо прежде всего комплексные корни (можно отбросить также отрицательные корни, так как они соответствуют уединенным волнам — впадинам, которые, как доказано, не существуют). Из оставшихся

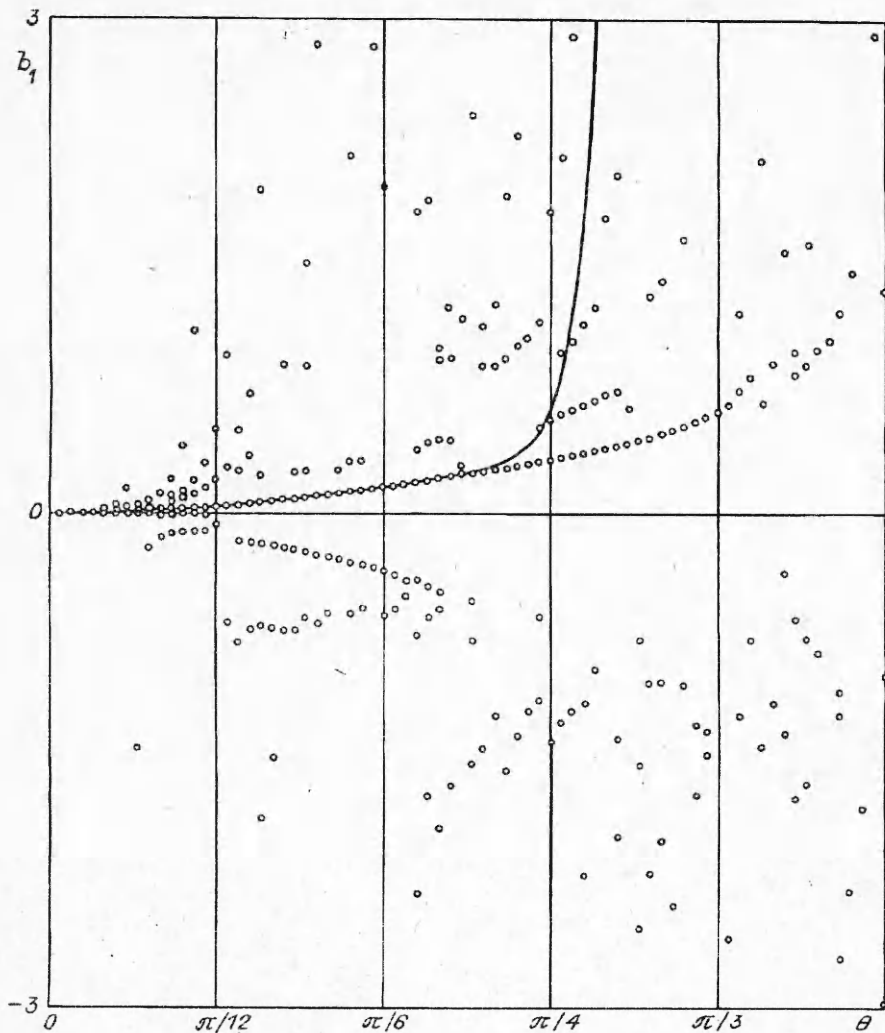


Рис. 3

Если ряд (20) подставить в (9), то получим в результате решение, соответствующее (1). Попутно заметим, что такой способ построения рядов, предложенный в [2], является более простым и экономичным, чем алгоритмы, используемые в [12—14]. За несколько часов работы IBM PC удается в рациональных числах найти 20 членов ряда (20), что превосходит аналогичный результат, достигнутый в [12].

Если (20) просуммировать для $\theta = \pi/4$ (использовалось Паде-суммирование, см. [18]), то $b_1 = 0,33$. Как видно из рис. 2, это число в точности соответствует меньшему значению b_1^* . На рис. 3 для $N = 15$ и для $\theta = 0 \div 5\pi/12$ кружками отмечены все вещественные корни $G_N(b_1)$, лежащие в интервале $(-3,3)$. Сплошной линией изображена сумма ряда (20). Существует семейство корней, которое точно ложится на эту линию. Расхождение начинается при $\theta = \pi/4$. Оно связано с тем, что радиус сходимости ряда (20) равен единице.

Представим корни уравнения $G_N(b_1) = 0$ в виде степенного ряда

$$b_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{(N)} t^k.$$

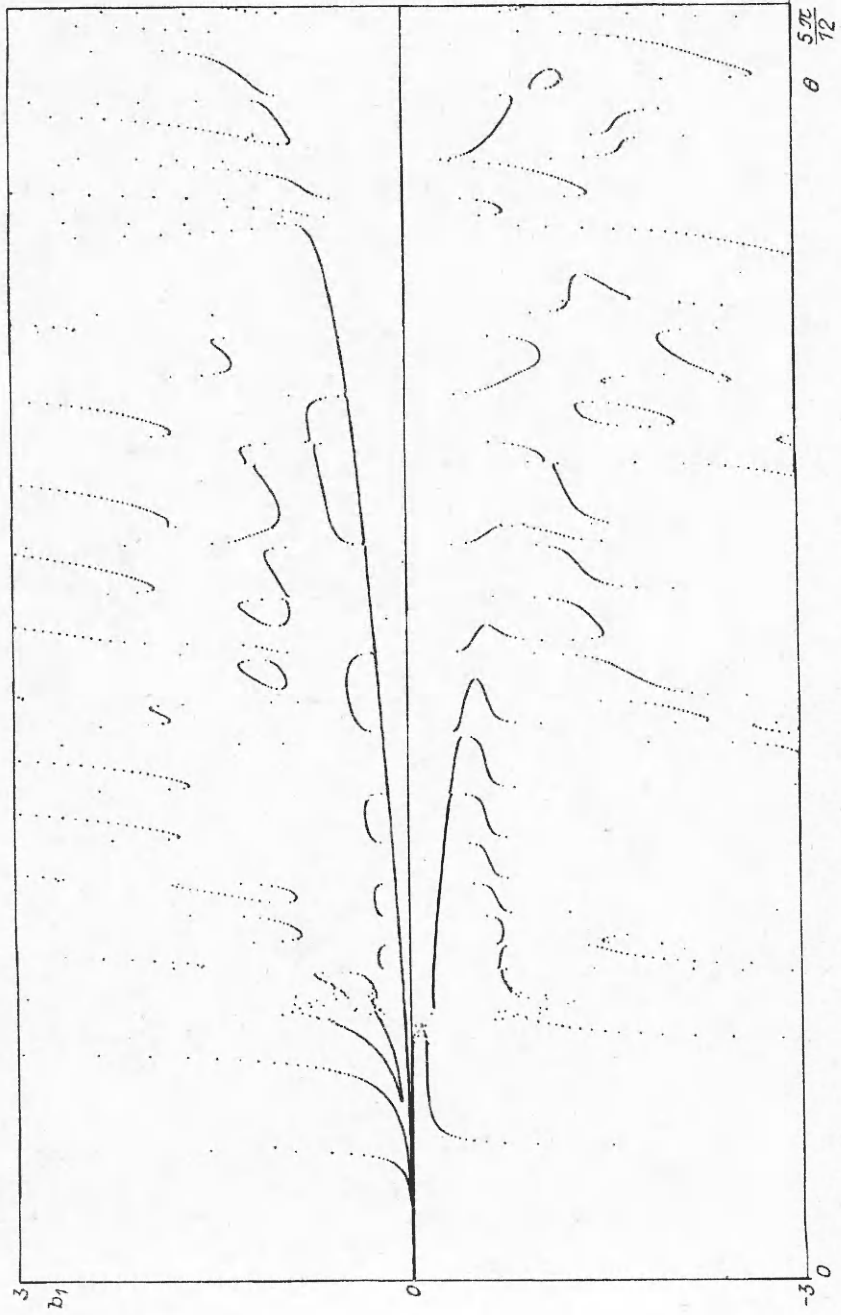


Рис. 4

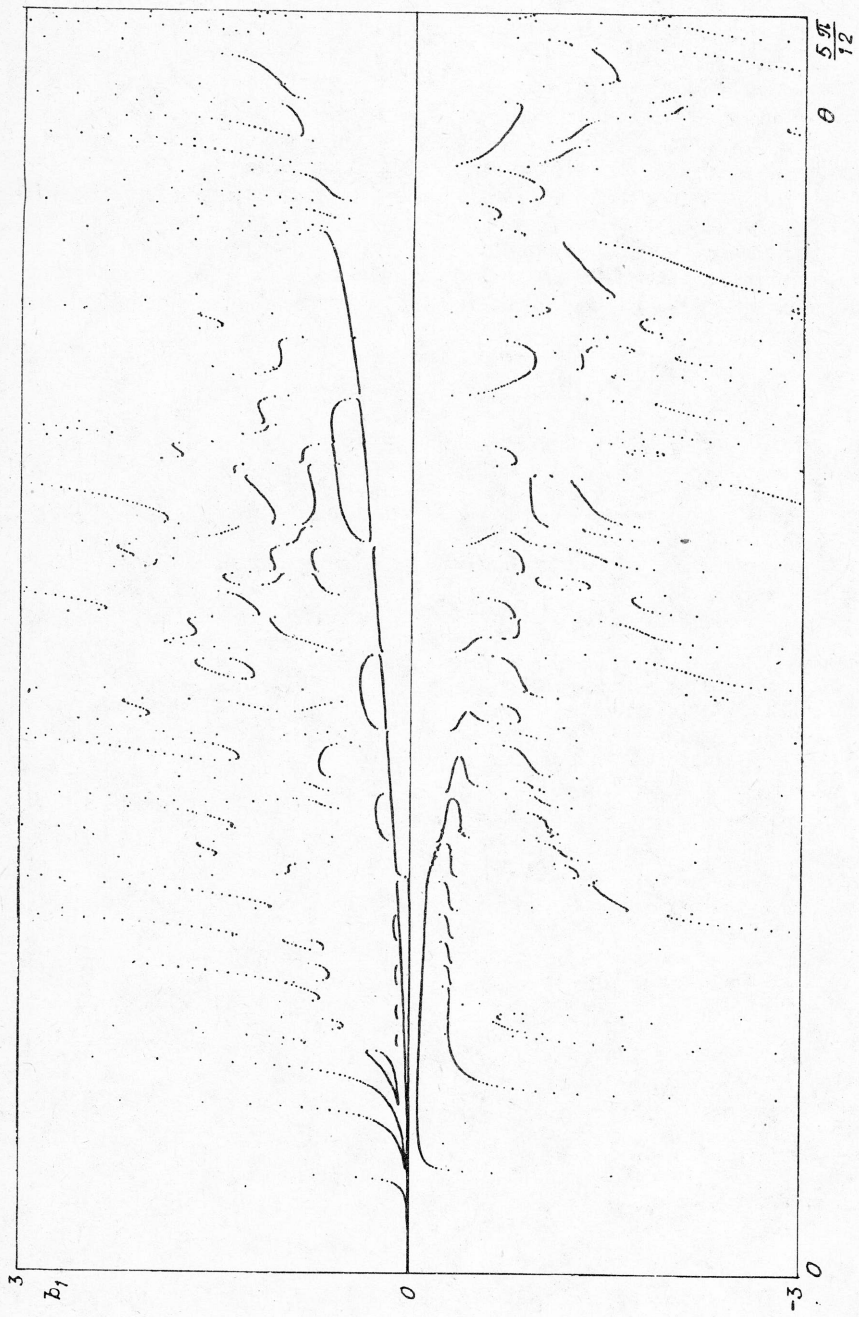


Рис. 5

Ожидалось, что коэффициенты этого ряда при достаточно большом N приближенно равны коэффициентам ряда (19):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \beta_k^{(N)} = \beta_k.$$

Вычисления в рациональных числах показали, что имеется точное равенство $\beta_k^{(N)} = \beta_k$, $k = 1, 2, \dots, N$.

Таким образом, метод Овсянникова [2] описывает решение (1). Однако он описывает еще и другие решения. На рис. 4,5, более подробных, чем рис. 3, изображены корни $G_N(b_1)$ для $N = 15$ и 20 соответственно. Большая часть корней может быть отброшена, так как они не сохраняются при изменении N , а приняты во внимание лишь те множества корней, которые устойчивы при изменении N , т.е. они должны присутствовать на рис. 4 и 5. Бросаются в глаза устойчивое семейство корней, соответствующее сумме ряда (20). Подковообразные ответвления от него также устойчивы. Повидимому, здесь наблюдается ветвление решения. Происходит оно для тех значений θ , которые удовлетворяют уравнению (14).

Автор благодарит академика Л.В. Овсянникова за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Плотников П.И. Неединственность решения задачи об уединенных волнах и бифуркации критических точек гладких функционалов // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1991. — Т. 55, № 2. — С. 339—366.
2. Овсянников Л.В. Об асимптотическом представлении уединенных волн // ДАН СССР. — 1991. — Т. 318, № 3. — С. 556—559.
3. Russell J.S. Report of the Committee on waves // Rep. Brit. Assn. Adv. Sci. — S. 1., 1838. — P. 417.
4. Stokes G.G. On the theory of oscillatory waves // Math. and Phys. Papers. — 1880. — V. 1. — P. 197—229.
5. Boussinesq J. Theorie de l'intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire // C.R. Acad. Sci. Paris. — 1871. — Т. 72. — P. 755—759.
6. Rayleigh Lord. On waves // Phil. Mag. — 1876. — V. 1, N 5. — P. 257—279.
7. Friedrichs K.O., Hyers D.H. The existence of solitary waves // Comm. Pure Appl. Math. — 1954. — V. 7. — P. 517—550.
8. Лаврентьев М.А. До теорії довгих хвиль // Зб. праць / Ін-т. мат. АН УССР. — 1947. — № 8. — С. 13—63.
9. Плотников П.И. Обоснование гипотезы Стокса в теории поверхностных волн // ДАН СССР. — 1983. — Т. 269, № 1. — С. 80—83.
10. Hunter J.K., Vanden-Broeck J.-M. Accurate computations for steep solitary waves // J. Fluid. Mech. — 1983. — V. 136. — P. 63.
11. Byatt-Smith J.G.B., Longuet-Higgins M.S. On the speed and profile of steep solitary waves // Proc. Roy. Soc. London. — 1976. — V. A350. — P. 175—189.
12. Pennel S.A., Su C.H. A seventeenth-order series expansion for the solitary wave // J. Fluid Mech. — 1984. — V. 431—443.
13. Fenton J.D. A ninth-order solution for the solitary wave // J. Fluid Mech. — 1972. — V. 53, N 2. — P. 257—271.
14. Longuet-Higgins M.S., Fenton J.D. On the mass, momentum, energy and circulation of a solitary wave. II // Proc. Roy. Soc. London. — 1974. — V. A340. — P. 471—493.
15. Friedrichs K.O. On the derivation of the shallow water theory. Appendix to the formation of breakers and bores by J.J. Stoker // Commun. Pure Appl. Math. — 1948. — V. 1. — P. 81—85.
16. Keller J.B. The solitary wave and periodic waves in shallow water // Commun. Pure Appl. Math. — 1948. — V. 1. — P. 323—339.
17. Laitone E.V. The second approximation to solitary and cnoidal waves // J. Fluid Mech. — 1960. — V. 9, N 3. — P. 430—444.
18. Бейкер Г., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. — М.: Мир, 1986.

г. Новосибирск

Поступила 26/Х 1993 г.