

К ТЕОРИИ «ГОРЯЧИХ» ТРЕЩИН

В. Д. Кулиев, Г. П. Черепанов

(Москва)

Иногда при остывании сварочного шва в нем развиваются так называемые «горячие» трещины, которые приводят к браку изделия. Аналогичное явление образования «раковин» и пустот в слитках наблюдается в металлургическом процессе.

Ниже рассматривается теоретическая модель, в рамках которой можно решить задачу об образовании и развитии горячей трещины. Решение этой задачи позволяет сравнивать различные тепловые режимы и выбирать наиболее благоприятный. Дается постановка задачи и формулируются основные допущения. Изучается кинетика роста горячей трещины. Рассматривается вопрос об асимптотическом размере горячих трещин при $t \rightarrow \infty$ и даются простые достаточные критерии, при выполнении которых горячая трещина не образуется. Исследуется развитие трещин в математически родственной проблеме хрупкого разрушения от локального нагрева.

1. Постановка задачи. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ в контакте с твердым металлом, имеющим некоторую постоянную температуру $T = 0$, находится расплав, который мгновенно затвердевает, так что его температура в начальный момент постоянна и равна $T = T_0$. Вследствие остывания горячего металла в заполненной им области возникают растягивающие напряжения, так как на границе контакта металлы предполагаются жестко сваренными. С течением времени растягивающие напряжения возрастают, вызывая рост начальной наиболее опасной трещины или какого-либо эквивалентного дефекта. При $t \rightarrow \infty$ остаточные напряжения и размер горячей трещины будут максимальными.

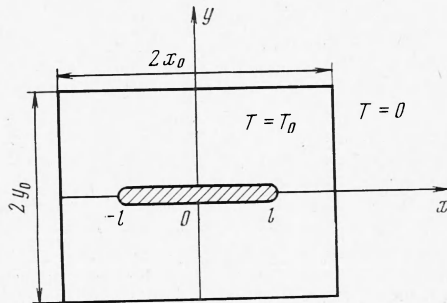
Будем считать металлы термоупругими телами, чтобы все пластические эффекты были сосредоточены лишь в малых областях вблизи контура трещин. В этом случае поставленная задача о развитии горячей трещины может быть решена в рамках механики хрупкого разрушения [1].

Введем также следующие допущения: а) все термоупругие постоянные не зависят от температуры и являются одинаковыми как для холодного, так и для горячего металла, б) металлы представляют собой однородное и изотропное тело, в) это тело находится в плосконапряженном состоянии (тонкая пластина). Эти допущения не имеют принципиального характера, однако позволяют найти простое эффективное решение многих практически интересных задач и выявить некоторые основные качественные эффекты. Полученные решения, как известно, можно использовать также для случая плоской деформации, если заменить упругие коэффициенты.

Сформулируем упрощенную задачу. Пусть в момент $t = 0$ произвольная область S в бесконечной однородной и изотропной упругой пластинке мгновенно нагревается до постоянной температуры $T = T_0$. Остальная часть тела имеет температуру $T = 0$ при $t = 0$. На границе области S нет скачка смещения; это соответствует физически замене области S нагретой шайбой точно таких же размеров. Требуется определить развитие начальной трещины во времени. Перемещения, напряжения и главный вектор сил (а также вращение) в бесконечно удаленной точке считаются равными нулю.

2. Кинетика роста горячей трещины. Пусть область S в вышеприведенной постановке задачи представляет собой прямоугольник со сторонами

$2x_0$ и $2y_0$. Начало декартовых координат x и y выберем в центре прямоугольника, ось x направим параллельно той стороне, длина которой равна $2x_0$ (фиг. 1). Пусть начальная трещина длиной $2l$ расположена вдоль оси x с центром в начале координат. Берега трещины свободны от внешних нагрузок. Коэффициент интенсивности напряжений на конце трещины в данной задаче с точностью, примерно равной 10%, годится также для того случая, когда вдоль оси y будет свободная от внешних нагрузок граница тела [1].



Фиг. 1

Порядок решения задачи будет следующим. Вначале определяется температурное поле; затем из уравнений термоупругости для тела без трещины находится напряжение σ_y при $y = 0, |x| < l$; это напряжение с обратным знаком подставляется в известное общее выражение для коэффициента интенсивности напряжений в случае изолированной трещины и изотермического процесса. Зависимость

константы K_c от температуры вне интервала хладноломкости можно интерполировать следующей линейной функцией:

$$(2.1) \quad K_c = K_{c0} + AT(l, 0, t)$$

где K_{c0} есть константа K_c при $T = 0$, A — некоторая эмпирическая постоянная. Приравняв $K_I = K_c$ согласно условию Гриффитса — Ирвина получаем в неявной форме искомую зависимость длины трещины от времени.

Решение краевой задачи

$$(2.2) \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (-\infty < x, y < +\infty)$$

$$T = \begin{cases} T_0 = \text{const} & (x, y \in S) \\ 0 & (x, y \notin S) \end{cases} \quad \text{при } t = 0$$

будет следующим [2]:

$$(2.3) \quad T(x, y, t) = \frac{T_0}{4} \left[\text{Erf} \left(\frac{x + x_0}{2\sqrt{at}} \right) + \text{Erf} \left(\frac{x_0 - x}{2\sqrt{at}} \right) \right] \left[\text{Erf} \left(\frac{y + y_0}{2\sqrt{at}} \right) + \text{Erf} \left(\frac{y_0 - y}{2\sqrt{at}} \right) \right]$$

$$\text{Erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-u^2) du$$

где a — коэффициент температуропроводности.

Компоненты тензора напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} выражаются через термоупругий потенциал перемещений Ψ в виде [2]

$$(2.4) \quad \sigma_x = -2G \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = -2G \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = 2G \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}$$

$$(2.5) \quad \Delta \Psi = (1 + \nu)\alpha T$$

где G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, α — коэффициент линейного расширения.

Дифференцируя (2.5) по t и учитывая (2.2), получим

$$(2.6) \quad \Delta[\partial\Psi/\partial t - (1+\nu)\alpha aT] = 0$$

Как видно, функция $\partial\Psi/\partial t - (1+\nu)\alpha aT$ является гармонической по всей плоскости и, следовательно, может быть либо постоянной величиной, либо некоторой функцией времени $g(t)$. Без нарушения общности функцию $g(t)$ можно считать равной нулю, так как вместо потенциала Ψ можно ввести потенциал

$$\Psi' = \Psi - \int_0^t g(\tau) d\tau$$

Таким образом, для потенциала Ψ получается уравнение

$$\partial\Psi/\partial t = (1+\nu)\alpha aT$$

Интегрирование его приводит к формуле

$$(2.7) \quad \Psi = (1+\nu)\alpha a \int_0^t T dt + \Psi_0(x, y)$$

где $\Psi_0(x, y)$ — потенциал перемещений, соответствующий начальной температуре, т. е.

$$\Delta\Psi_0 = (1+\nu)\alpha T_0 \text{ внутри } S, \Delta\Psi_0 = 0 \text{ вне } S$$

Отсюда получаем

$$(2.8) \quad \Psi_0(x, y) = -\frac{(1+\nu)\alpha T_0}{2\pi} \iint_S \ln\left(\frac{1}{R}\right) d\xi d\eta, \quad R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$$

При помощи (2.3), (2.7), (2.8) и (2.4) находим

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \sigma_y = & -\frac{GT_0(1+\nu)\alpha}{4\sqrt{\pi}} \left\{ 4\sqrt{\pi} \kappa(x, y) + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left[\arctg\left(\frac{y+y_0}{x+x_0}\right) + \arctg\left(\frac{y_0-y}{x_0-x}\right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \arctg\left(\frac{y_0-y}{x_0+x}\right) + \arctg\left(\frac{y_0+y}{x_0-x}\right) \right] - \int_0^t \frac{1}{\tau\sqrt{a\tau}} \left[(x+x_0) \exp\left(-\frac{(x+x_0)^2}{4a\tau}\right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + (x_0-x) \exp\left(-\frac{(x_0-x)^2}{4a\tau}\right) \right] \left[\operatorname{Erf}\left(\frac{y+y_0}{2\sqrt{a\tau}}\right) + \operatorname{Erf}\left(\frac{y_0-y}{2\sqrt{a\tau}}\right) \right] d\tau \right\} \\ \kappa(x, y) = & \begin{cases} 1 & (x, y \in S) \\ 0 & (x, y \notin S) \end{cases} \end{aligned}$$

Так как коэффициент интенсивности напряжений для изолированной трещины

$$K_I = -\frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^l \sigma_y(x, 0, t) \sqrt{\frac{l+x}{l-x}} dx$$

то, используя (2.9), находим

$$(2.10) \quad \begin{aligned} K_I = & \frac{GT_0(1+\nu)\alpha}{\sqrt{\pi l}} \left\{ \pi l + \frac{2}{\pi} \int_{-l}^l \left[\arctg\left(\frac{y_0}{\xi+x_0}\right) + \arctg\left(\frac{y_0}{x_0-\xi}\right) \right] \sqrt{\frac{l+\xi}{l-\xi}} d\xi - \right. \\ & - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-l}^l \int_0^t \frac{1}{x\sqrt{ax}} \left[(\xi+x_0) \exp\left(-\frac{(\xi+x_0)^2}{4ax}\right) + (x_0-\xi) \exp\left(-\frac{(x_0-\xi)^2}{4ax}\right) \right] \times \\ & \left. \times \operatorname{Erf}\left(\frac{y_0}{2\sqrt{ax}}\right) \sqrt{\frac{l+\xi}{l-\xi}} dx d\xi \right\} \end{aligned}$$

При $t \rightarrow \infty$ имеем

$$(2.11) \quad K_I = GT_0(1 + \nu)\alpha \sqrt{\pi l}$$

Длина образовавшейся горячей трещины согласно (2.11)

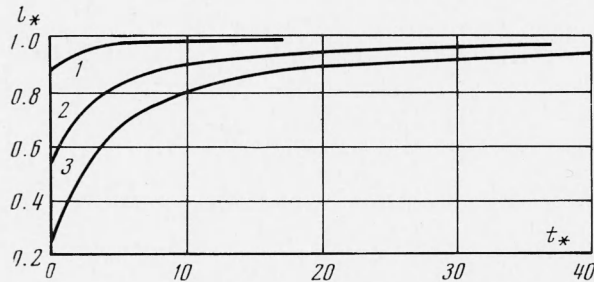
$$(2.12) \quad l_\infty = \frac{K_c^2}{\pi [GT_0(1 + \nu)\alpha]^2} \text{ при } t \rightarrow \infty$$

Предполагается, что трещина не выходит из области S .

Для любого момента времени на основании критерия локального разрушения $K_I = K_c$ и (2.1), (2.10) находим

$$(2.13) \quad K_{c0} \left\{ 1 + \frac{AT_0}{2K_{c0}} \operatorname{Erf} \left(\frac{y_0}{2\sqrt{at}} \right) \left[\operatorname{Erf} \left(\frac{l+x_0}{2\sqrt{at}} \right) + \operatorname{Erf} \left(\frac{x_0-l}{2\sqrt{at}} \right) \right] \right\} = K_I(l, t)$$

Здесь правая часть определяется формулой (2.10). На фиг. 2 в безразмерных переменных $l_* = l/l_\infty$ и $t_* = 4at/x_0^2$ приведены кривые



Фиг. 2

1, 2, 3 кинетики роста горячей трещины, построенные при помощи уравнений (2.10) и (2.13) для следующих значений параметров: $x_0 = y_0 = l_\infty$, $A = K_{c0}/T_0$, $K_{c0}/2T_0$, 0 соответственно. Отметим, что вычисления проведены на БЭСМ-4 в течение нескольких минут.

3. Асимптотический размер горячих трещин. Докажем вначале одну теорему из теории термоупругости для произвольной односвязной области S .

Теорема. Пусть при $t = 0$

$$(3.1) \quad T(x, y, 0) = T_0 \text{ внутри } S, \quad T(x, y, 0) = 0 \text{ вне } S$$

Тогда при $t \rightarrow \infty$ $\sigma_y = \sigma_x = -G(1 + \nu)\alpha T_0$, $\tau_{xy} = 0$ внутри S .

Доказательство. Решение уравнения теплопроводности (2.2), удовлетворяющее условиям (3.1), имеет вид

$$(3.2) \quad T(x, y, t) = \frac{T_0}{4\pi at} \iint_S \exp(-R^2/4at) d\xi d\eta, \quad R^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$$

Аналогично предыдущему при помощи (2.5) — (2.8) находим потенциал

$$(3.3)$$

$$\Psi(x, y, t) = \frac{(1 + \nu)\alpha T_0}{4\pi} \left\{ \int_0^t \frac{1}{\tau} \left[\iint_S \exp(-R^2/4a\tau) d\xi d\eta \right] d\tau - 2 \iint_S \ln\left(\frac{1}{R}\right) d\xi d\eta \right\}$$

Так как контур области S не зависит от времени t , получаем

$$(3.4) \quad \Psi(x, y, t) = \frac{(1+\nu)\alpha T_0}{4\pi} \iint_S \left[\int_0^t \frac{1}{\tau} \exp(-R^2/4a\tau) d\tau - 2 \ln\left(\frac{1}{R}\right) \right] d\xi d\eta$$

При помощи (2.4) находим напряжения внутри S

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \sigma_y &= -G(1+\nu)\alpha T_0 - \frac{G(1+\nu)\alpha T_0}{2\pi} \iint_S \left\{ 2 \frac{(y-\eta)^2 - (x-\xi)^2}{R^4} + \int_0^t \frac{1}{4a^2\tau^2} [(x-\xi)^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2a\tau] \exp(-R^2/4a\tau) d\tau \right\} d\xi d\eta \\ \sigma_x &= -G(1+\nu)\alpha T_0 - \frac{G(1+\nu)\alpha T_0}{2\pi} \iint_S \left\{ 2 \frac{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}{R^4} + \int_0^t \frac{1}{4a^2\tau^2} (y-\eta)^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2a\tau] \exp(-R^2/4a\tau) d\tau \right\} d\xi d\eta \\ \tau_{xy} &= -\frac{2G(1+\nu)\alpha T_0}{\pi} \iint_S \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{R^4} \left[1 - \frac{R^4}{16a^2} \int_0^t \frac{1}{\tau^3} \exp(-R^2/4a\tau) d\tau \right] d\xi d\eta \end{aligned}$$

Вычисляя внутренние интегралы в формулах (3.5), имеем

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \sigma_y &= -G(1+\nu)\alpha T_0 \left\{ 1 + \frac{1}{\pi} \iint_S \frac{1}{R^4} [(y-\eta)^2 - (x-\xi)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2(x-\xi)^2 \Gamma(2, R^2/4at) - R^2 \exp(-R^2/4at)] d\xi d\eta \right\} \\ \sigma_x &= -G(1+\nu)\alpha T_0 \left\{ 1 + \frac{1}{\pi} \iint_S \frac{1}{R^4} [(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2(y-\eta)^2 \Gamma(2, R^2/4at) - R^2 \exp(-R^2/4at)] d\xi d\eta \right\} \\ \tau_{xy} &= -\frac{G(1+\nu)\alpha T_0}{2\pi} \iint_S \frac{4(x-\xi)(y-\eta)}{R^4} [1 - \Gamma(2, R^2/4at)] d\xi d\eta \\ \Gamma(\alpha, x) &\equiv \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \end{aligned}$$

Так как $\Gamma(2, R^2/4at) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$, то, переходя к пределу при $t \rightarrow \infty$ в (3.6), получаем

$$(3.7) \quad \sigma_y = \sigma_x = -G(1+\nu)\alpha T_0, \quad \tau_{xy} = 0$$

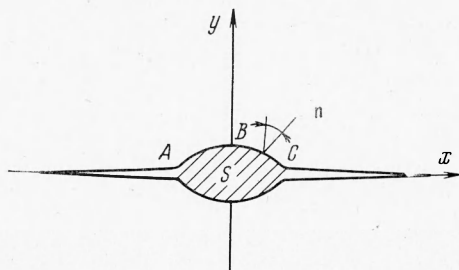
Таким образом, в области S при $t \rightarrow \infty$ остаточные напряжения создают состояние всестороннего равномерного растяжения. Заметим, что двустороннее растяжение способствует хрупкому разрушению в большей степени, чем одностороннее [1].

Доказанная теорема позволяет указать асимптотический размер l_∞ горячей трещины при $t \rightarrow \infty$ для произвольной области S ; этот размер, очевидно, по-прежнему дается формулой (2.12), если только трещина не выходит из области S . Отсюда следует, что если длина начальной трещины $2l_0$ меньше, чем $2l_\infty$, т. е. выполняется условие

$$(3.8) \quad l_0 < K_c^2 / \pi [GT_0(1+\nu)\alpha]^2$$

то начальная трещина не развивается. Формула (3.8) дает простой достаточный критерий, при выполнении которого горячая трещина не образуется. Отметим, что характеристики материала l_0 и K_c в (3.8) соответствуют остывшему металлу при $T = 0$.

4. Хрупкое разрушение от локального нагрева. Пусть при $t = 0$ на границе области S возникает скачок нормального смещения, соответствующий мгновенному нагреванию шайбы S до температуры T_0 , если шайба до нагревания была вставлена без натяга (температура остальной



Фиг. 3

части тела равна нулю при $t = 0$). В результате при $t = 0$ в теле вне области S возникнут растягивающие напряжения, которые могут привести к образованию трещины. Напряжения в шайбе будут сжимающими. При $t \rightarrow \infty$ напряжения во всем теле в этом случае будут, очевидно, стремиться к нулю. При $t = 0$ напряжения будут наибольшими, причем в шайбе реализуется состояние все-

$$(4.1) \quad \sigma_x = \sigma_y = -G(1 + \nu)\alpha T_0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{при } t = 0$$

Очевидно, что трещина в данном случае образуется мгновенно при $t = 0$ и в дальнейшем не развивается.

Описанный механизм хрупкого разрушения типичен для локального нагрева ненапряженного материала (например, образование трещины в толстостенном стакане с быстро налитой горячей водой).

В большинстве практически интересных случаев для хрупких материалов длина трещины, образующейся от локального нагрева, гораздо больше характерного линейного размера области S . В этом последнем случае можно применить простой асимптотический метод решения задачи, основанный на «принципе микроскопа» [1].

Представим себе, что к контуру области S в точках A и C выходят трещины (фиг. 3). Для простоты примем, что область S симметрична относительно осей x и y . К границе области S будут приложены нагрузки (со стороны шайбы), определяемые формулой (4.1).

Определим размеры асимптотически больших трещин. На основе принципа микроскопа [1], применим в том случае, когда линейные размеры области S малы по сравнению с длиной трещины (или же с ее радиусом в осесимметричном случае), приходим к следующим сингулярным задачам.

Плоская задача. Пусть к противоположным берегам прямолинейной сквозной трещины длиной $2l$, находящейся в бесконечной пластине, приложены равные и противоположно направленные сосредоточенные силы P ; сила P действует в середине трещины перпендикулярно к ее поверхности. На бесконечности напряжение отсутствует. При помощи (4.1) находим главный вектор нагрузок, приложенных к дуге ABC со стороны нагретой области S (см. фиг. 3)

$$(4.2) \quad P = G(1 + \nu)\alpha T_0 \int_{ABC} \cos(n, y) ds = G(1 + \nu)\alpha T_0 L$$

где L — длина проекции дуги ABC на ось x .

В рассматриваемом случае коэффициент интенсивности напряжений [1]

$$(4.3) \quad K_I = P / \pi \sqrt{2l}$$

Согласно критерию локального разрушения длина хрупкой трещины определяется условием $K_I = K_{Ic}$, т. е.

$$(4.4) \quad K_c = P / \pi \sqrt{2l}$$

Отсюда находим длину асимптотически больших трещин

$$(4.5) \quad l = \frac{1}{2} \left[\frac{G(1+\nu)\alpha T_0 L}{\pi K_c} \right]^2$$

Осесимметричная задача. Пусть некоторая область V , имеющая три плоскости симметрии, в начальный момент времени мгновенно нагрелась до температуры T_0 . В результате мгновенного хрупкого разрушения образовалась дискообразная трещина, и в том наиболее часто встречающемся случае, когда ее радиус велик по сравнению с размером области V , на основании принципа микроскопа [1] приходим к следующей задаче.

Пусть к противоположным поверхностям круговой дискообразной трещины радиуса R , находящейся в бесконечном теле, приложены равные и противоположно направленные сосредоточенные силы P ; сила P действует по оси круглой дискообразной трещины. В этом случае, очевидно, имеем

$$(4.6) \quad P = G(1+\nu)\alpha T_0 \iint (\mathbf{n}_z dS) = G(1+\nu)\alpha T_0 S_0$$

где S_0 — площадь проекции границы области V на плоскость трещины.

Коэффициент интенсивности напряжений [1]

$$(4.7) \quad K_I = P / (\pi R)^{3/2}$$

При помощи критерия локального разрушения $K_I = K_{Ic}$ находим радиус дискообразной трещины

$$(4.8) \quad R = \pi^{-1} [G(1+\nu)\alpha T_0 S_0 / K_{Ic}]^{2/3}$$

Например, в случае эллипсоидальной области V имеем

$$(4.9) \quad S_0 = 4ab, \quad R = \pi^{-1} [4G(1+\nu)\alpha ab T_0 / K_{Ic}]^{2/3}$$

Здесь a и b — главные полуоси эллипса в сечении эллипсоида дискообразной трещиной.

Поступила 5 III 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г. И. Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974.
2. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. М., Физматгиз, 1963.