УДК 539.374

К ИССЛЕДОВАНИЮ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ВОЛН В СЫПУЧЕЙ СРЕДЕ

О. В. Садовская, В. М. Садовский

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск

Для описания деформирования материалов с различным сопротивлением растяжению и сжатию традиционная реологическая схема дополняется новым элементом — жестким контактом, с использованием которого строится модель идеально сыпучей среды, обладающей упругими и пластическими свойствами. Разрыхленное состояние среды описывается условием прочности Мизеса — Шлейхера, а переход в пластическое состояние — условием текучести Мизеса. На основе предложенной модели исследуется процесс распространения продольных упругих и пластических ударных волн сжатия. Показано, что в зависимости от интенсивности сжатия и степени начального разрыхления среды реализуется одно- или двухволновая конфигурация разрывов.

Ключевые слова: сыпучая среда, упругость, пластичность, ударная адиабата, вариационное неравенство.

Введение. Теория сыпучих (гранулированных) материалов — интенсивно развивающаяся область механики. Несмотря на то что одна из первых работ в этой области (работа [1]) опубликована почти сто лет назад, математические модели таких материалов далеки от завершения. В настоящее время существует два класса моделей, соответствующих двум режимам: режиму квазистатического деформирования и режиму быстрых движений. Модели первого класса описывают поведение плотноупакованных сред на основе теории пластического течения с предельным условием Кулона — Мора или Мизеса — Шлейхера. В моделях второго класса рассматриваются разрыхленные среды (ансамбли большого числа взаимодействующих частиц) с точки зрения кинетической теории газов.

Обзор работ по механике быстрых движений гранулированных материалов приведен в [2]. Для исследования квазистатического деформирования разработана теория напряжений в плоских статически определимых задачах, широко применяемая в механике грунтов [3]. Кинематические характеристики в таких задачах определяются на основе ассоциированного закона течения [4]. В [5] предложен неассоциированный закон, более точно описывающий поле скоростей при внедрении жесткого штампа в песок. Недостаток этих подходов заключается в том, что при жесткой разгрузке тензор скоростей деформации оказывается равным нулю, и, следовательно, после разрыхления материал невозможно сжать. Таким образом, кинематические законы применимы только в случае монотонного нагружения.

Уравнения одноосного динамического деформирования идеально сыпучей среды с упругими свойствами исследованы в [6]. Показано, что наряду с разрывами скоростей (ударными волнами) они описывают также разрывы перемещений (разрывы сплошности). В [7] с помощью этих уравнений проведен анализ процесса “сухого кипения” — самопроизвольного появления и схлопывания разрывов сплошности в массиве среды. Феноменологические модели пространственного напряженно-деформированного состояния связных грунтов представлены в [8, 9].

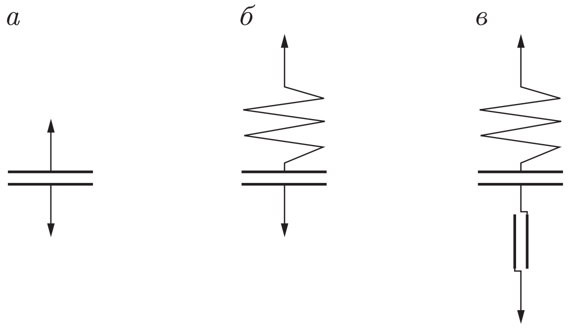

Рис. 1. Реологические схемы сыпучих сред:
а — жесткие гранулы; *б* — упругие гранулы; *в* — упругопластические гранулы

В данной работе предлагается геометрически линейная модель пространственного деформирования упругопластической сыпучей среды. В рамках этой модели исследуется процесс распространения продольных ударных волн сжатия. Рассматривается вариант задания механических параметров модели, отличный от описанного в работе [10].

1. Математическая модель. Для феноменологического описания материалов с различным сопротивлением растяжению и сжатию традиционную реологическую схему дополним новым элементом — жестким контактом (рис. 1,*а*). При сжимающих напряжениях этот элемент не деформируется. Деформация при напряжении, равном нулю, может быть произвольной положительной величиной. Растягивающие напряжения недопустимы. Схемы на рис. 1,*б*,*в* соответствуют моделям упругой и упругопластической сыпучих сред. При сжатии такие среды находятся в упругом или пластическом состоянии, а при растяжении напряжения оказываются равными нулю.

Комбинируя жесткий контакт с упругим, пластическим и вязким элементами, можно строить реологические модели более сложных сред.

Математическая модель жесткого контакта (идеально сыпучей среды с жесткими гранулами) сводится к системе соотношений

$$\sigma \leqslant 0, \qquad \varepsilon \geqslant 0, \qquad \sigma\varepsilon = 0,$$

где σ — напряжение; ε — деформация. В соответствии с этой моделью при одноосном деформировании среды возможны только два состояния: уплотнение, когда $\sigma < 0$, $\varepsilon = 0$, и разрыхление, когда $\varepsilon > 0$, $\sigma = 0$.

Модель можно также представить в виде вариационных неравенств

$$\sigma(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon) \leqslant 0, \quad \varepsilon \geqslant 0, \quad \tilde{\varepsilon} \geqslant 0, \qquad (\tilde{\sigma} - \sigma)\varepsilon \leqslant 0, \quad \sigma \leqslant 0, \quad \tilde{\sigma} \leqslant 0$$

($\tilde{\sigma}$, $\tilde{\varepsilon}$ — произвольные варьируемые величины), каждое из которых допускает потенциальное представление

$$\sigma \in \partial\varphi(\varepsilon), \qquad \varepsilon \in \partial\psi(\sigma). \tag{1.1}$$

Здесь потенциалы напряжений и деформаций φ, ψ — индикаторные функции, равные нулю на конусах $C = \{\varepsilon \geqslant 0\}$ и $K = \{\sigma \leqslant 0\}$ соответственно и равные бесконечности вне этих конусов. Эти функции в дальнейшем обозначаются $\delta_C(\varepsilon)$ и $\delta_K(\sigma)$. Символ ∂ используется для обозначения субдифференциала

$$\partial\varphi(\varepsilon) = \{\sigma \mid \varphi(\tilde{\varepsilon}) - \varphi(\varepsilon) \geqslant \sigma(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon) \quad \forall\, \tilde{\varepsilon}\},$$

представляющего собой множество угловых коэффициентов линейных функций, графики которых проходят через точку $(\varepsilon, \varphi(\varepsilon))$ и лежат ниже графика функции φ.

Использование в данной работе понятия субдифференциала, представляющего собой обобщение понятия производной, связано с тем, что введенные потенциалы не являются дифференцируемыми функциями. Такая же ситуация характерна для моделей теории пластичности, где в терминах субдифференциалов формулируется ассоциированный закон течения [11]. Однако в отличие от теории пластичности в рассматриваемом случае соотношения (1.1) представляют собой нелинейный закон Гука и описывают, таким образом, бездиссипативный механизм деформирования.

Обобщение модели жесткого контакта на случай пространственного напряженно-деформированного состояния строится на основе включений (1.1). Для этого необходимо задать выпуклый конус C в пространстве тензоров деформаций или конус K в пространстве тензоров напряжений. Если один из конусов известен, то второй находится как сопряженный:

$$K = \{\sigma \mid \sigma : \varepsilon \leqslant 0 \quad \forall \varepsilon \in C\}, \qquad C = \{\varepsilon \mid \sigma : \varepsilon \leqslant 0 \quad \forall \sigma \in K\}$$

(двоеточие означает операцию свертки тензоров). Соответствующие потенциалы — индикаторные функции конусов C и K — являются двойственными, т. е. определяются друг через друга с помощью преобразования Юнга

$$\varphi(\varepsilon) = \sup_{\sigma}\{\sigma : \varepsilon - \psi(\sigma)\}, \qquad \psi(\sigma) = \sup_{\varepsilon}\{\sigma : \varepsilon - \varphi(\varepsilon)\}.$$

Известные экспериментальные данные о деформационных свойствах плотных песков подтверждают гипотезу об упругом состоянии среды при напряжениях, близких к гидростатическому сжатию. Такие напряжения являются внутренними точками конуса K. Для упругой сыпучей среды (рис. 1,*б*) $\psi(\sigma) = \sigma : a : \sigma/2 + \delta_K(\sigma)$ (a — тензор модулей упругой податливости четвертого ранга, соответствующий модели упругого элемента). Определяющие соотношения (1.1) приводятся к неравенству Хаара и Кармана [1]

$$(\tilde{\sigma} - \sigma) : (a : \sigma - \varepsilon) \geqslant 0, \qquad \sigma, \tilde{\sigma} \in K. \tag{1.2}$$

Учитывая симметрию и положительную определенность тензора a, можно показать, что решением неравенства (1.2) является тензор напряжений $\sigma = s^{\pi}$, равный проекции на K по норме $|\sigma|_a = \sqrt{\sigma : a : \sigma}$ тензора условных напряжений s, определяемого из линейного закона Гука $a : s = \varepsilon$.

Предположим, что конус K задан в виде $f_i(\sigma) \leqslant 0$ ($i = 1, \ldots, m$), где f_i — выпуклые дифференцируемые функции. Тогда по теореме Куна — Таккера [12] задача определения проекции эквивалентна задаче нахождения седловой точки лагранжиана

$$L(\sigma, \lambda) = \frac{1}{2}\,|\sigma - s|_a^2 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(\sigma), \qquad \lambda_i \geqslant 0.$$

В этом случае выполняется система уравнений

$$a : (\sigma - s) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \,\frac{\partial f_i(\sigma)}{\partial \sigma} = 0, \qquad \lambda_i f_i(\sigma) = 0. \tag{1.3}$$

Для упругопластической сыпучей среды (рис. 1,*в*) тензор деформации разлагается на сумму упругой и пластической составляющих: $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$. Тензор упругой деформации подчиняется неравенству (1.2), учитывающему возможное разрыхление среды. Тензор скоростей пластической деформации удовлетворяет определяющим соотношениям теории течения [13]

$$\sigma \in \partial\eta(\dot{\varepsilon}^p). \tag{1.4}$$

Здесь η — диссипативный потенциал напряжений, представляющий собой положительно-однородную выпуклую функцию скоростей деформации. Однородность потенциала является следствием независимости процесса пластического деформирования от масштаба времени. В силу этого свойства двойственный потенциал $\chi(\sigma)$ — преобразование Юнга функции $\eta(\dot{\varepsilon})$ — равен индикаторной функции выпуклого множества

$$F = \{\sigma \mid \sigma : \dot{\varepsilon} \leqslant \eta(\dot{\varepsilon}) \quad \forall \dot{\varepsilon}\}.$$

Граница F в пространстве напряжений представляет собой поверхность текучести материала.

Соотношения (1.4) представимы в эквивалентной форме $\dot\varepsilon^p \in \partial\chi(\sigma)$, приводящей к неравенству Мизеса

$$(\tilde\sigma - \sigma) : \dot\varepsilon^p \leqslant 0, \qquad \sigma, \tilde\sigma \in F. \tag{1.5}$$

Если множество F является цилиндром с осью гидростатических напряжений, то объемная деформация среды происходит по линейно-упругому закону. В противном случае модель описывает необратимое объемное уплотнение среды. В общем случае множество F параметризуется в виде $g_j(\sigma) \leqslant 0$ ($j = 1, \dots, n$), где g_j — дифференцируемые выпуклые функции, и выполняется ассоциированный закон течения

$$\dot\varepsilon^p = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, \frac{\partial g_j(\sigma)}{\partial\sigma}, \qquad \lambda_j g_j(\sigma) = 0, \qquad \lambda_j \geqslant 0,$$

полученный из (1.5) с использованием теоремы Куна — Таккера.

Неравенство (1.2) для ε^e и неравенство (1.5) совместно с уравнениями движения и кинематическими уравнениями

$$\rho\dot{\boldsymbol v} = \nabla \cdot \sigma, \qquad 2\dot\varepsilon = \nabla\boldsymbol v + (\nabla\boldsymbol v)^*$$

образуют замкнутую модель, описывающую динамику сыпучей среды. Здесь ρ — плотность; $\boldsymbol v$ — вектор скорости; ∇ — вектор-градиент; звездочка означает транспонирование тензора.

Рассмотрим изотропную сыпучую среду, упругие свойства которой характеризуются модулем объемного сжатия k и модулем сдвига μ. Множество F аппроксимируем цилиндром Мизеса

$$F = \{\sigma \mid \tau(\sigma) \leqslant \tau_s\},$$

где $\tau(\sigma) = \sqrt{\sigma' : \sigma'/2}$ — интенсивность касательных напряжений; величина со штрихом — девиатор тензора; τ_s — предел текучести гранул. Для описания допустимых напряжений используем круговой конус Мизеса — Шлейхера

$$K = \{\sigma \mid \tau(\sigma) \leqslant æp(\sigma)\}.$$

Здесь $p(\sigma)$ — гидростатическое давление; $æ$ — коэффициент внутреннего трения. Уравнения (1.3) для определения тензора напряжений σ через тензор условных напряжений s в упругой среде принимают вид

$$\sigma' = s' - \lambda\mu\sigma'/(æp(\sigma)), \qquad p(\sigma) = p(s) + \lambda æ k, \qquad \lambda(\tau(\sigma) - æp(\sigma)) = 0.$$

Поэтому возможны три случая. Если $\tau(s) \leqslant æp(s)$, то $\sigma = s$. Если $\tau(s) > æp(s)$ и $\mu p(s) + æk\tau(s) \leqslant 0$, то $\sigma = 0$. В этом случае проекцией s является вершина конуса K. Если $\tau(s) > æp(s)$ и $\mu p(s) + æk\tau(s) > 0$, то проекция s принадлежит конической поверхности и определяется по формулам

$$\sigma' = \frac{æp(\sigma)}{\tau(s)}\, s', \qquad p(\sigma) = \frac{\mu p(s) + æk\tau(s)}{\mu + æ^2 k}. \tag{1.6}$$

2. Упругопластические волны. Рассмотрим плоскую продольную ударную волну, распространяющуюся в бесконечном массиве сыпучей среды в направлении оси x_1 декартовой системы координат. Будем считать, что амплитуда волны достаточно мала. Тогда на ее фронте выполняются линейные уравнения динамической и кинематической совместности [14]

$$\rho c[v_1] = -[\sigma_1], \qquad c[\varepsilon_1] = -[v_1], \tag{2.1}$$

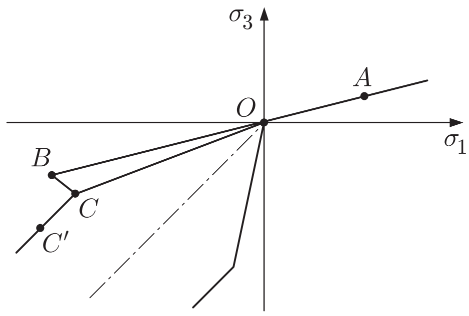

Рис. 2. Траектории напряжений s и σ

где c — скорость распространения волны; v_1 — массовая скорость частиц; σ_1, $\sigma_2 = \sigma_3$, ε_1 — отличные от нуля компоненты тензоров напряжений и деформаций; квадратные скобки означают скачок функции на разрыве. Для замыкания системы (2.1) к ней необходимо добавить уравнение, связывающее σ_1 и ε_1. В результате уравнение ударной адиабаты — кривой допустимых ударно-волновых переходов из фиксированного состояния (ε_1^0, v_1^0) перед фронтом волны в состояние (ε_1, v_1) за фронтом — принимает следующий вид:

$$\rho(v_1 - v_1^0)^2 = (\sigma_1 - \sigma_1^0)(\varepsilon_1 - \varepsilon_1^0). \qquad (2.2)$$

Решение уравнения $\sigma_1 = \sigma_1(\varepsilon_1)$ зависит от знака деформации и характера деформации (упругое или упругопластическое нагружение, разгрузка).

Считая ε_1 параметром, построим траектории напряжений $s(\varepsilon_1)$ и $\sigma(\varepsilon_1)$ на плоскости (σ_1, σ_3). Случай, когда коэффициент внутреннего трения находится в диапазоне $[2\mu/(\sqrt{3}k), \sqrt{3}/2]$, рассмотрен в [10]. В данной работе исследуем более интересный случай $æ < 2\mu/(\sqrt{3}k)$, $æ \leqslant \sqrt{3}/2$. Расположение прямой AB одноосного упругого деформирования по отношению к конусу Мизеса — Шлейхера и цилиндру Мизеса для этого случая представлено на рис. 2. Среда с такими характеристиками при одноосном сжатии всегда находится в предельном состоянии.

При разрыхлении среды $(\varepsilon_1 > 0)$ условные напряжения s_1, s_3 равны

$$s_1 = (k + 4\mu/3)\varepsilon_1, \qquad s_3 = (k - 2\mu/3)\varepsilon_1, \qquad (2.3)$$

а действительные напряжения σ_1, σ_3 — проекции условных напряжений на конус — равны нулю. При сжатии в диапазоне $\varepsilon_1^B \leqslant \varepsilon_1 \leqslant 0$, где $\varepsilon_1^B = -\tau_s/(æh)$, траектория условных напряжений по-прежнему задается уравнениями (2.3), а действительные напряжения в силу (1.6) имеют вид

$$\sigma_1 = \Big(1 + \frac{2æ}{\sqrt{3}}\Big)h\varepsilon_1, \qquad \sigma_3 = \Big(1 - \frac{æ}{\sqrt{3}}\Big)h\varepsilon_1, \qquad h = \frac{1 + 2æ/\sqrt{3}}{1 + æ^2k/\mu}\,k.$$

Переходу в пластическое состояние соответствует точка B на рис. 2. В этой точке среда перестает сопротивляться сдвигу, и для восстановления несущей способности требуется дополнительное уплотнение. Такому уплотнению соответствует отрезок BC при неизменных напряжениях со скачком деформации

$$\Delta\varepsilon_1 = \varepsilon_1^B - \varepsilon_1^C = \frac{2/\sqrt{3} - æk/\mu}{1 + 2æ/\sqrt{3}}\,\frac{\tau_s}{k},$$

где $\varepsilon_1^C = -\tau_s/(æk)$. Параметрические уравнения прямой BC имеют вид

$$s_1 = \Big(k - \frac{2\mu}{\sqrt{3}æ}\Big)\varepsilon_1 - \frac{2\tau_s}{\sqrt{3}}\Big(1 + \frac{\mu}{æ^2k}\Big), \qquad s_3 = \Big(k + \frac{\mu}{\sqrt{3}æ}\Big)\varepsilon_1 + \frac{\tau_s}{\sqrt{3}}\Big(1 + \frac{\mu}{æ^2k}\Big).$$

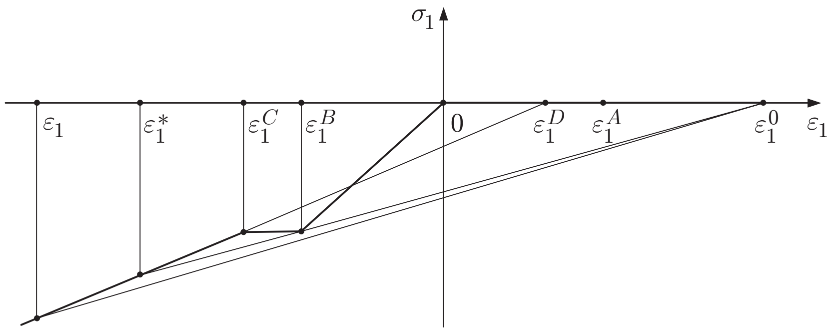

Рис. 3. Зависимость σ_1 от ε_1

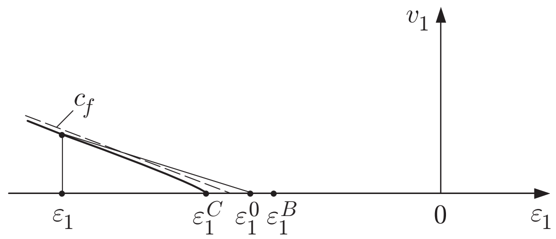

Рис. 4. Ударная адиабата при $\varepsilon_1^C < \varepsilon_1^0 < \varepsilon_1^B$

Интервалу $\varepsilon_1 < \varepsilon_1^C$ соответствует пластический процесс сжатия (луч CC'). На этом интервале напряжения $\sigma = s$ выражаются формулами

$$\sigma_1 = s_1 = k\varepsilon_1 - 2\tau_s/\sqrt{3}, \qquad \sigma_3 = s_3 = k\varepsilon_1 + \tau_s/\sqrt{3}.$$

Итак, траекторией $s(\varepsilon_1)$ является ломаная $ABCC'$, а траекторией $\sigma(\varepsilon_1)$ — ломаная OCC'. График функции $\sigma_1(\varepsilon_1)$ приведен на рис. 3.

Будем рассматривать только волны, движущиеся в положительном направлении оси x_1, для которых $c > 0$. Считая $v_1^0 = 0$, построим ударные адиабаты волн сжатия ($\varepsilon_1 < \varepsilon_1^0$).

Если перед фронтом волны среда сжата до пластического состояния ($\varepsilon_1^0 \leqslant \varepsilon_1^C$), то в ней реализуется пластическая ударная волна, характерная для обычной упругопластической среды [15]. Уравнение (2.2) принимает вид

$$v_1 = -c_f(\varepsilon_1 - \varepsilon_1^0),$$

где $c_f = \sqrt{k/\rho}$ — скорость пластических ударных волн. На плоскости (ε_1, v_1) ударная адиабата имеет вид луча, выходящего из точки ε_1^0. При $\varepsilon_1^C < \varepsilon_1^0 < \varepsilon_1^B$ ударная адиабата описывается следующим из (2.2) уравнением гиперболы

$$(v_1/c_f)^2 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_1^C)(\varepsilon_1 - \varepsilon_1^0). \tag{2.4}$$

Такая волна возникает, только если $\varepsilon_1 < \varepsilon_1^C$ (рис. 4). Это волна уплотнения среды, утратившей несущую способность в момент перехода гранул в пластическое состояние. Ее скорость вычисляется по формуле

$$c = c_f\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_1^C)/(\varepsilon_1 - \varepsilon_1^0)}. \tag{2.5}$$

Если $\varepsilon_1^B \leqslant \varepsilon_1^0 \leqslant 0$, то в зависимости от степени сжатия распространяются одна или две волны (рис. 5). При интенсивном сжатии с $\varepsilon_1 < \varepsilon_1^C$ возникает двухволновая конфигурация разрывов: упругий предвестник в разрыхленной среде, движущийся со скоростью

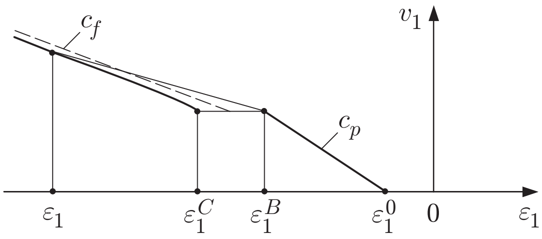

Рис. 5. Ударная адиабата при $\varepsilon_1^B \leqslant \varepsilon_1^0 \leqslant 0$

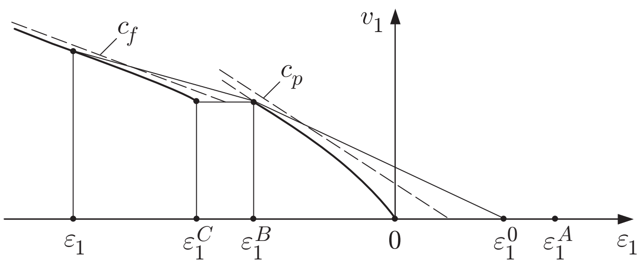

Рис. 6. Ударная адиабата при $0 < \varepsilon_1^0 \leqslant \varepsilon_1^A$

$$c_p = \sqrt{(1 + 2æ/\sqrt{3})h/\rho},$$

и волна пластического уплотнения, скорость которой определяется по формуле (2.5) после замены ε_1^0 на ε_1^B. Упругий предвестник переводит среду из состояния ε_1^0 в предельное упругое состояние ε_1^B. Его ударная адиабата линейна. Ветвь ударной адиабаты волн пластического уплотнения получается параллельным переносом гиперболы (2.4) вдоль оси v_1 на величину v_1^C. При слабом сжатии, когда $\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_1^B$, волна пластического уплотнения не возникает. В интервале $\varepsilon_1^C \leqslant \varepsilon_1 < \varepsilon_1^B$ несущая способность среды за фронтом упругого предвестника не успевает восстановиться, поэтому пластическая волна превращается в неподвижный контактный разрыв.

Если перед фронтом волны среда разрыхлена ($\varepsilon_1^0 > 0$), то возможны либо уединенный упругий сигнотон

$$(v_1/c_p)^2 = \varepsilon_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_1^0), \tag{2.6}$$

либо двухволновая конфигурация упругого сигнотона-предвестника (2.6) с волной пластического уплотнения (2.4) (рис. 6). Следуя принятой терминологии [6], сигнотоном будем называть ударную волну, прохождение которой приводит к мгновенному изменению знака деформации. Графики ударных адиабат (2.6) и (2.4) представляют собой ветви гипербол, асимптоты которых наклонены к оси абсцисс под углами $\operatorname{arctg} c_p$ и $\operatorname{arctg} c_f$ соответственно. Асимптота первой адиабаты выходит из точки $\varepsilon_1^0/2$. Точка выхода асимптоты второй адиабаты лежит посредине между ε_1^C и ε_1^B. Такая картина наблюдается только при достаточно малом разрыхлении: $\varepsilon_1^0 \leqslant \varepsilon_1^A$. Превышение критического значения $\varepsilon_1^A = \Delta\varepsilon_1 + \varepsilon_1^D$ ($\varepsilon_1^D = 2\tau_s/(\sqrt{3}k)$) приводит к опрокидыванию волн интенсивного сжатия, поскольку скорость сигнотона-предвестника становится меньше c_f. При $\varepsilon_1^0 > \varepsilon_1^A$ (рис. 7) ударная адиабата состоит из трех ветвей: адиабаты упругих сигнотонов (2.6), адиабаты волн пластического уплотнения (2.4) и адиабаты пластических сигнотонов

$$(v_1/c_f)^2 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_1^D)(\varepsilon_1 - \varepsilon_1^0).$$

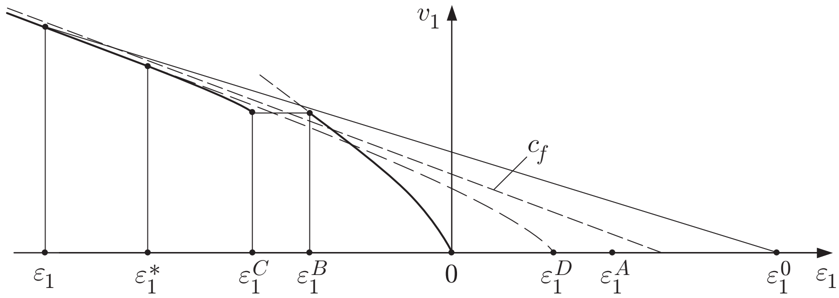

Рис. 7. Ударная адиабата при $\varepsilon_1^0 > \varepsilon_1^A$

Систему волн при заданном значении ε_1 легко определить по рис. 3, учитывая, что величина ρc^2 равна угловому коэффициенту секущей на плоскости $(\varepsilon_1, \sigma_1)$. Из рис. 3 следует, что при $\varepsilon_1^B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ реализуется уединенный упругий сигнотон. Если $\varepsilon_1^* < \varepsilon_1 < \varepsilon_1^C$, где

$$\varepsilon_1^* = \frac{\varepsilon_1^0 + (2æ/\sqrt{3})\varepsilon_1^B}{\varepsilon_1^0 - \varepsilon_1^A}\,\varepsilon_1^C \text{ —}$$

деформация в точке пересечения луча, выходящего из начального состояния в состояние B, с графиком функции $\sigma_1(\varepsilon_1)$, то вслед за упругим сигнотоном распространяется волна пластического уплотнения. При деформации $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^*$ скорости этих волн становятся равными. Если $\varepsilon_1 < \varepsilon_1^*$, то ударно-волновой переход описывается уединенным пластическим сигнотоном.

В отличие от [10] в данной работе рассмотрен более сложный вариант задания параметров среды, определяющий модель, в которой появляются волны пластического уплотнения. Еще более сложная картина возникает при $æ > \sqrt{3}/2$, когда среда может оказывать сопротивление одноосному растяжению, проявляя упругие и пластические свойства. Этот случай требует дополнительного изучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Хаар А., Карман Т.** К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах // Теория пластичности. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. С. 41–56.
2. **Голованов Ю. В., Ширко И. В.** Обзор современного состояния механики быстрых движений гранулированных материалов // Механика гранулированных сред: Теория быстрых движений. Сер. Новое в зарубежной науке. 1985. Вып. 36. С. 271–279.
3. **Соколовский В. В.** Статика сыпучей среды. М.: Физматгиз, 1960.
4. **Drucker D. C., Prager W.** Soil mechanics and plastic analysis or limit design // Quart. Appl. Math. 1952. V. 10. P. 157–165.
5. **Мруз З., Шиманский Ч.** Неассоциированный закон течения в описании пластического течения гранулированных сред // Механика гранулированных сред: Теория быстрых движений. Сер. Новое в зарубежной науке. 1985. Вып. 36. С. 9–43.
6. **Маслов В. П., Мосолов П. П.** Общая теория решений уравнения движения разномодульной упругой среды // Прикл. математика и механика. 1985. Т. 49, вып. 3. С. 419–437.
7. **Маслов В. П., Мясников В. П., Данилов В. Г.** Математическое моделирование аварийного блока Чернобыльской АЭС. М.: Наука, 1988.
8. **Григорян С. С.** Об основных представлениях динамики грунтов // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, вып. 6. С. 1057–1072.

9. **Николаевский В. Н.** Определяющие уравнения пластического деформирования сыпучей среды // Прикл. математика и механика. 1971. Т. 35, вып. 6. С. 1070–1082.
10. **Садовский В. М.** К теории распространения упругопластических волн в сыпучих средах // Докл. РАН. 2002. Т. 386, № 4. С. 487–489.
11. **Мосолов П. П., Мясников В. П.** Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981.
12. **Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.** Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
13. **Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д.** Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998.
14. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. М.: Наука, 1976. Т. 2.
15. **Садовский В. М.** Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред. М.: Наука, 1997.

Поступила в редакцию 23/XII 2002 г.,
в окончательном варианте — 3/III 2003 г.