

УДК 539.4+539.37

## ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПЛАСТИНЫ С ЖЕСТКОЙ ВСТАВКОЙ

Ю. В. Немировский, Т. П. Романова

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск  
E-mail: nemirov@itam.nsc.ru

Получено общее решение динамического изгиба идеальных жесткопластических пластин с шарнирно опертым или защемленным криволинейным контуром, имеющих абсолютно жесткую вставку произвольной формы. На пластину действует равномерно распределенная по поверхности кратковременная динамическая нагрузка высокой интенсивности взрывного типа. Показано, что существует несколько механизмов деформирования пластин. Для каждого из них получены уравнения динамического деформирования и проанализированы условия реализации. Приведены примеры численных решений.

**Ключевые слова:** жесткопластическая пластина, произвольный контур, жесткая вставка, динамическая нагрузка, предельная нагрузка, остаточный прогиб.

**Введение.** Вопросы расчета конструкций при воздействии на них кратковременных интенсивных нагрузок являются важнейшими в современной механике деформируемого твердого тела. Для решения таких задач широкое распространение получила модель жесткопластического тела [1]. В основе модели лежит предположение, что тело начинает деформироваться при достижении напряжением в нем предельного значения и появлении возможности пластического деформирования. Упругими деформациями при этом пренебрегают. Относительно тонколистовых элементов конструкций такое упрощение позволило решить многие важные практические задачи. В работах [2–9] авторы применили модель жесткопластического тела для исследования поведения однородных пластин со сложным внешним контуром под действием произвольных динамических нагрузок высокой интенсивности.

Конструктивно неоднородные пластины являются составляющими элементами многих конструкций, применяемых в разных областях техники. Часто плоские защитные преграды имеют усиленные закрытые технологические люки. В связи с этим возникает проблема исследования повреждаемости пластин с жесткими вставками. До настоящего времени такая задача рассматривалась лишь для круглой пластины с жестким кругом в центре в условиях осесимметричного нагружения и закрепления [10]. В настоящей работе предложена методика, которая на основе теории идеального жесткопластического тела позволяет рассчитывать пластины с произвольным криволинейным контуром при произвольном закреплении, имеющие абсолютно жесткую вставку произвольной формы и находящиеся под действием кратковременных интенсивных динамических нагрузок. Методика может быть использована для широкого класса приближенных инженерных расчетов.

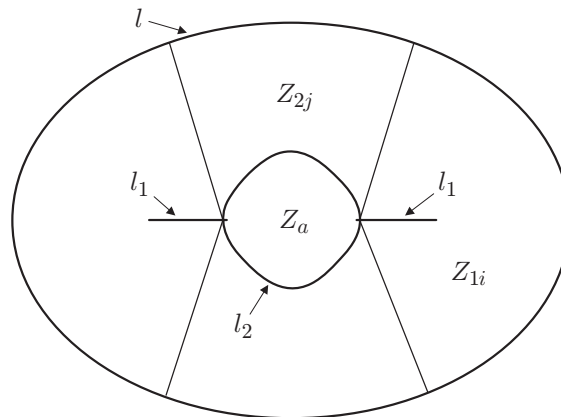


Рис. 1

1. Рассмотрим пластину из идеального жесткопластического материала с произвольным гладким выпуклым контуром  $l$ , шарнирно опертым или защемленным (рис. 1). В центральной части пластина имеет абсолютно жесткую вставку  $Z_a$  с произвольным контуром  $l_2$ . Пластина находится под действием равномерно распределенной по поверхности динамической нагрузки высокой интенсивности  $P(t)$ . Будем рассматривать взрывные нагрузки, которые характеризуются мгновенным достижением максимального значения  $P_{\max} = P(t_0)$  в начальный момент времени  $t_0$  с последующим быстрым их уменьшением. Поскольку вставка  $Z_a$  при деформировании остается жесткой, считаем, что предельный изгибающий момент во вставке больше, чем  $M_0$  — предельный изгибающий момент в остальной части пластины, и  $\rho_a/\rho \geq 1$ , где  $\rho$ ,  $\rho_a$  — поверхностные плотности материалов пластины и вставки.

В динамике пластины из жесткопластического материала в зависимости от значения  $P_{\max}$  возможно существование трех схем деформирования. При нагрузках, не превышающих предельные нагрузки (“низких” нагрузках), пластина остается в покое. При нагрузках, незначительно превышающих предельные (“средних” нагрузках), пластина деформируется в некоторую линейчатую поверхность, а абсолютно жесткая вставка и точки ее контура движутся поступательно с одинаковой скоростью  $\dot{w}_c(t)$ . При этом, как и в случае отсутствия вставки [4, 6–9], в пластине возможно образование пластической шарнирной линии  $l_1$ , которая может состоять из нескольких участков (см. рис. 1). Положение линии  $l_1$  определяется формой опорного контура пластины из условия равенства расстояний по нормали к внешнему контуру от контура  $l$  до линии  $l_1$  [7, 9]. Назовем такую схему деформирования схемой 1. Как и в случаях изгиба балок [1], круглых и кольцевых пластин [12–14], прямоугольных и полигональных пластин [1–3, 11], пластин со сложным контуром [4–9], при достаточно высоких значениях  $P_{\max}$  динамика пластины может сопровождаться возникновением области интенсивного пластического деформирования  $Z_p$ , движущейся поступательно. При этом возможны ситуации, когда часть шарнира  $l_1$  сохраняется или область  $Z_p$  охватывает не всю вставку  $Z_a$  (схема 2, представленная на рис. 2; “высокие” нагрузки), и когда шарнира  $l_1$  нет, а вставка  $Z_a$  находится внутри области  $Z_p$  (схема 3, приведенная на рис. 3; “сверхвысокие” нагрузки).

Пусть уравнение контура пластины  $l$  задано в параметрической форме  $x = x_1(\varphi)$ ,  $y = y_1(\varphi)$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Во всех схемах деформирования нормаль к кривой  $l$ , направленная внутрь области, занятой пластиной, попадает либо на шарнир  $l_1$ , либо на контур  $l_2$ , либо на кривую  $l_3$  — контур области  $Z_p$  (см. рис. 1–3). Обозначим через  $Z_{ij}$  область пластины, из любой точки которой нормаль к контуру  $l$  попадает на кривую  $l_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ;  $j = 1, \dots$ ).

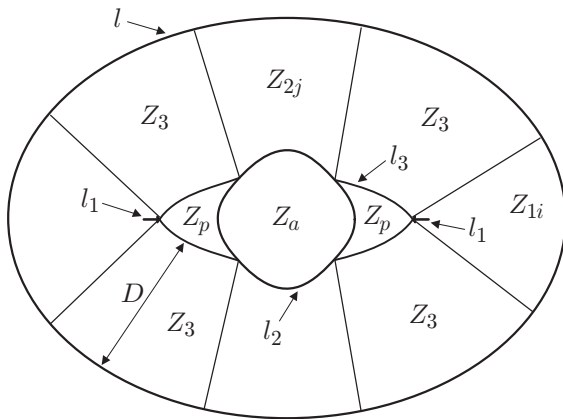


Рис. 2

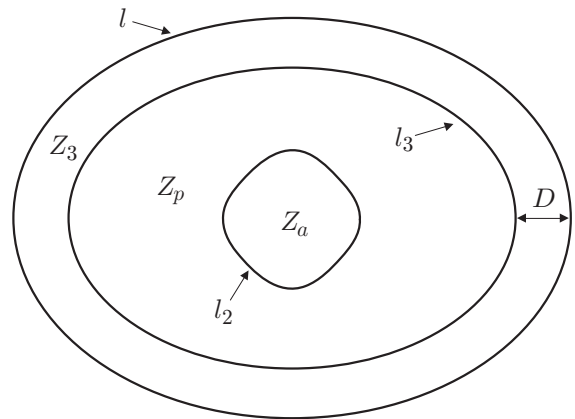


Рис. 3

Количество  $l_i$  зависит от форм пластины и вставки. Обозначим через  $l_{ij}$  часть внешнего контура  $l$ , которая является опорным контуром области  $Z_{ij}$ . Часть контура  $l_{ij}$  определена в интервале  $\psi_{ij} \leq \varphi \leq \xi_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3; j = 1, \dots$ ). Обозначим через  $D_{nj}$  расстояние по нормали к контуру  $l$ , вычисленное от контура  $l_{nj}$  до кривой  $l_n$  в области  $Z_{nj}$  ( $n = 1, 2$ ). Величины  $D_{nj}$  зависят от формы контуров пластины и вставки, а значит, только от параметра  $\varphi$ . Можно показать [4, 6], что нормаль к контуру  $l$  является также нормалью к кривой  $l_3$  и что расстояние  $D$  между  $l_{3j}$  и  $l_3$  не зависит от параметра  $\varphi$  и индекса  $j$ . Уравнение  $l_3$  ( $x = x_3(\varphi)$ ,  $y = y_3(\varphi)$ ,  $\psi_{3j} \leq \varphi \leq \xi_{3j}$ ) для контура области  $Z_p$  имеет вид [4, 6]

$$x_3 = x_1 - Dy'_1/L, \quad y_3 = y_1 + Dx'_1/L, \quad (1)$$

где  $L(\varphi) = \sqrt{x_1'^2(\varphi) + y_1'^2(\varphi)}$ ,  $(\cdot)' = \partial(\cdot)/\partial\varphi$ .

Уравнения движения пластины выведем из принципа виртуальных мощностей с использованием принципа Даламбера [11]:

$$K = A - N; \quad (2)$$

$$K = \iint_{S \setminus Z_a} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u^*}{\partial t} ds + \iint_{Z_a} \rho_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u^*}{\partial t} ds, \quad (3)$$

$$A = \iint_S P(t) \frac{\partial u^*}{\partial t} ds, \quad N = \sum_m \int_{l_m} M_m \left[ \frac{\partial \theta_m^*}{\partial t} \right] dl,$$

где  $K$ ,  $A$ ,  $N$  — соответственно мощности инерционных, внешних и внутренних сил пластины;  $S$  — площадь пластины;  $u$  — прогиб;  $t$  — текущее время;  $l_m$  — линии разрыва угловых скоростей;  $M_m$  — изгибающий момент на  $l_m$ ;  $[\partial \theta_m^* / \partial t]$  — разрыв угловой скорости на  $l_m$ . В выражении для  $N$  суммирование проводится по всем линиям разрыва угловой скорости, включая границу пластины. Индексом “\*” обозначены допустимые скорости.

Так как области  $Z_a$  и  $Z_p$  движутся поступательно, то в силу непрерывности скоростей на границах этих областей скорость прогиба в области  $Z_p$  равна  $\dot{w}_c(t)$ . Скорости угла отклонения области  $Z_{ij}$  на опорном контуре  $l_{ij}$  обозначим через  $\dot{\alpha}_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3; j = 1, \dots$ ). Условие непрерывности скоростей на границах областей  $Z_{3j}$  и  $Z_p$  дает  $\dot{w}_c = \dot{\alpha}_{3j}D$ , и, следовательно,  $\dot{\alpha}_{3j}$  не зависит от параметра  $\varphi$  и индекса  $j$ . Обозначим  $\dot{\alpha}_{3j}$  через  $\dot{\alpha}$ . Тогда скорости прогибов в разных областях пластины будут представлены следующим образом:

$$(x, y) \in Z_a: \quad \dot{u}(x, y, t) = \dot{w}_c(t), \quad (x, y) \in Z_p: \quad \dot{u}(x, y, t) = \dot{w}_c(t),$$

$$(x, y) \in Z_{3j}: \quad \dot{u}(x, y, t) = \dot{\alpha}(t)d_{3j}(x, y) \quad (j = 1, \dots), \quad (4)$$

$$(x, y) \in Z_{nm}: \quad \dot{u}(x, y, t) = \dot{\alpha}_{nm}(t, \varphi)d_{nm}(x, y) \quad (n = 1, 2; m = 1, \dots),$$

где  $d_{ij}(x, y)$  — расстояние от точки  $(x, y)$  до опорного контура области  $Z_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3; j = 1, \dots$ ), а точки над символами обозначают производные по времени.

Как и в [9], считаем, что  $\dot{\alpha}_{1j}$  не зависит от параметра  $\varphi$ , но может зависеть от индекса  $j$ . Из условия непрерывности скоростей на границах соприкасающихся областей  $Z_{1i}$  и  $Z_{2j}$ ,  $Z_{3m}$  и  $Z_{kn}$  ( $i, j, m, n, = 1, \dots; k = 1, 2$ ) получаем соотношения

$$\dot{\alpha}_{1i}(t)D_{1i}(\varphi_*) = [\dot{\alpha}_{2j}(t, \varphi_*)D_{2j}(\varphi_*)]^{\mu_{ij}}(\dot{\alpha}D)^{\lambda_{1i}}; \quad (5)$$

$$\dot{\alpha}_{2n}(t, \varphi_{**})D_{2n}(\varphi_{**}) = [\dot{\alpha}_{1m}(t)D_{1m}(\varphi_{**})]^{\mu_{mn}}(\dot{\alpha}D)^{\lambda_{2n}}, \quad (6)$$

где  $\varphi_*$ ,  $\varphi_{**}$  — параметры рассматриваемых границ областей;  $\mu_{ij} = 1$ , если области  $Z_{1i}$  и  $Z_{2j}$  соприкасаются, и  $\mu_{ij} = 0$ , если области  $Z_{1i}$  и  $Z_{2j}$  не соприкасаются;  $\lambda_{kj} = 1$ , если области  $Z_{3i}$  и  $Z_{kj}$  соприкасаются, и  $\lambda_{kj} = 0$ , если области  $Z_{3i}$  и  $Z_{kj}$  не соприкасаются. Из равенств (5), (6) следует, что

$$\dot{\alpha}_{ij}(t, \varphi) = F_{ij}(t, \varphi)\dot{\alpha}(t) \quad (i = 1, 2; j = 1, \dots). \quad (7)$$

Мощность внутренних сил в (3) будет вычисляться по формуле (см. [15])

$$N = M_0(2 - \eta) \oint_l \frac{\partial \dot{u}^*}{\partial n} dl,$$

где  $\eta = 0$  при защемлении внешнего контура и  $\eta = 1$  при его шарнирном опирании;  $\partial \dot{u}^* / \partial n$  — производная от скорости прогиба по нормали к контуру  $l$  или скорость угла отклонения поверхности пластины от горизонта на контуре  $l$ ;  $dl$  — элемент контура  $l$ .

С учетом введенных обозначений и равенства  $F_{3j} = 1$  выражения (3) примут вид

$$K = \dot{\alpha}^* \ddot{\alpha} \rho \sum_{i,j} \iint_{Z_{ij}} F_{ij}^2 d_{ij}^2 ds + \dot{w}_c^* \ddot{w}_c \left[ \rho \iint_{Z_p} ds + \rho_a \iint_{Z_a} ds \right],$$

$$A = P(t) \left[ \dot{\alpha}^* \sum_{i,j} \iint_{Z_{ij}} F_{ij} d_{ij} ds + \dot{w}_c^* \iint_{Z_a \cup Z_p} ds \right], \quad N = M_0(2 - \eta) \dot{\alpha}^* \sum_{i,j} \int_{l_{ij}} F_{ij} dl.$$

Подставляя эти равенства в (2) и учитывая независимость  $\dot{w}_c^*(t)$  и  $\dot{\alpha}^*(t)$ , получим уравнения движения для схемы деформирования 2:

$$\rho \ddot{\alpha} \sum_{i,j} \iint_{Z_{ij}} F_{ij}^2 d_{ij}^2 ds = P(t) \sum_{i,j} \iint_{Z_{ij}} F_{ij} d_{ij} ds - M_0(2 - \eta) \sum_{i,j} \int_{l_{ij}} F_{ij} dl; \quad (8)$$

$$\ddot{w}_c \left[ \rho \iint_{Z_p} ds + \rho_a \iint_{Z_a} ds \right] = P(t) \iint_{Z_a \cup Z_p} ds. \quad (9)$$

Условие непрерывности скоростей на границах областей  $S_p$  и  $Z_{3j}$  дает равенство

$$\dot{\alpha}D = \dot{w}_c. \quad (10)$$

На границах соприкасающихся областей  $Z_{ij}$  и  $Z_{mn}$  ( $i, m = 1, 2$ ) выполняется условие

$$D_{ij}(\beta_{ijmn}) = D_{mn}(\beta_{ijmn}), \quad (11)$$

где параметр  $\beta_{ijmn}$  определяет границу областей  $Z_{ij}$  и  $Z_{mn}$  ( $\beta_{ijmn} = \psi_{ij}$  или  $\beta_{ijmn} = \xi_{ij}$ ).

На границах областей  $Z_{ij}$  ( $i = 1, 2$ ) и  $Z_{3n}$  выполняется равенство

$$D = D_{ij}(\varphi_{ij}), \quad (12)$$

в котором  $\varphi_{ij} = \psi_{ij}$  или  $\varphi_{ij} = \xi_{ij}$ .

В начальный момент пластина покоится, т. е.

$$\alpha(t_0) = \dot{\alpha}(t_0) = w_c(t_0) = \dot{w}_c(t_0) = 0. \quad (13)$$

Начальные значения  $D(t_0)$ ,  $\beta_{ijmn}(t_0)$  определяются в зависимости от значения  $P_{\max}$ , как будет показано ниже для конкретных задач.

Система уравнений (7)–(12) описывает движение в случае деформирования по схеме 2. В случае схемы 3 области  $Z_{1i}$  и  $Z_{2j}$  отсутствуют, области  $Z_{3n}$  сливаются в одну область, а движение описывается уравнениями (8)–(10) при  $i = 3$ .

В случае схемы 1 областей  $Z_{3n}$  нет, вместо уравнений (7), (10) выполняются равенства

$$\dot{\alpha}_{ij}(t, \varphi) = G_{ij}\dot{w}_c(t), \quad G_{1j} = \frac{1}{D_{1j}(\varphi_*)}, \quad G_{2j}(\varphi) = \frac{1}{D_{2j}(\varphi)} \quad (i = 1, 2; j = 1, \dots), \quad (14)$$

а выражения (3) примут вид

$$K = \dot{w}_c^* \ddot{w}_c \left( \rho \sum_{i=1,2} \sum_j \iint_{Z_{ij}} G_{ij}^2 d_{ij}^2 ds + \rho_a \iint_{Z_a} ds \right),$$

$$A = \dot{w}_c^* P(t) \left( \sum_{i=1,2} \sum_j \iint_{Z_{ij}} G_{ij} d_{ij} ds + \iint_{Z_a} ds \right), \quad N = \dot{w}_c^* M_0 (2 - \eta) \sum_{i=1,2} \sum_j \int_{l_{ij}} G_{ij} dl.$$

Подставляя эти равенства в (2), получим

$$\begin{aligned} \ddot{w}_c \left( \rho \sum_{i=1,2} \sum_j \iint_{Z_{ij}} G_{ij}^2 d_{ij}^2 ds + \rho_a \iint_{Z_a} ds \right) = \\ = P(t) \left( \sum_{i=1,2} \sum_j \iint_{Z_{ij}} G_{ij} d_{ij} ds + \iint_{Z_a} ds \right) - M_0 (2 - \eta) \sum_{i=1,2} \sum_j \int_{l_{ij}} G_{ij} dl. \end{aligned} \quad (15)$$

Система уравнений (14), (15) описывает движение в случае деформирования по схеме 1. Прогибы в разных областях пластины определяются из уравнений (4).

Для вычисления двойных интегралов по областям  $Z_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3; j = 1, \dots$ ) в уравнениях движения удобно перейти к криволинейной системе координат  $(\nu_1, \nu_2)$ , связанной с декартовой системой координат соотношениями

$$x = x_1(\nu_2) - \nu_1 y_1'(\nu_2)/L(\nu_2), \quad y = y_1(\nu_2) + \nu_1 x_1'(\nu_2)/L(\nu_2). \quad (16)$$

Координатные линии  $\nu_1 = \text{const}$  удалены от контура  $l$  на расстояние  $\nu_1$ . Прямые  $\nu_2 = \text{const}$  являются нормальными к внешнему контуру пластины.

Предельную нагрузку  $P_0$  определим из уравнения (15) в момент начала движения  $t_0$  и из условия  $\ddot{w}_c(t_0) = 0$ . Тогда имеем

$$P_0 = \frac{M_0 (2 - \eta) \sum_{i=1,2} \sum_j \int_{l_{ij}} G_{ij} dl}{\sum_{i=1,2} \sum_j \iint_{Z_{ij}} G_{ij} d_{ij} ds + \iint_{Z_a} ds}. \quad (17)$$

2. Рассмотрим динамическое поведение криволинейных пластин с произвольной жесткой вставкой на примере круглой пластины с расположенной в центре правильной  $n$ -угольной жесткой вставкой. Обозначим через  $R$  и  $R_1$  радиусы круглой пластины и окружности, вписанной в полигональный контур жесткой вставки, где  $R_1 < R \cos(\pi/n)$  (рис. 4). При “средних” нагрузках пластина деформируется в линейчатую поверхность с образованием в силу симметрии  $n$  одинаковых областей  $Z_2$  — схема 1 (см. рис. 4), при этом скорость угла поворота на опорном контуре равна  $\dot{\alpha}_2(t, \varphi)$ . При “высоких” нагрузках в центральной части пластины около жесткой вставки образуется  $n$  одинаковых областей  $Z_p$  — схема 2 (рис. 5). Уравнение (1) для  $l_3$  контура  $Z_p$  в полярной системе координат имеет вид

$$x_3 = (R - D) \cos \varphi, \quad y_3 = (R - D) \sin \varphi \quad (-\xi \leq \varphi \leq \xi, \quad 0 < \xi < \pi/n).$$

При этом сохраняется  $n$  одинаковых областей  $Z_2$ :  $\xi \leq \varphi \leq (2\pi/n) - \xi$ . При “сверхвысоких” нагрузках области  $Z_2$  отсутствуют, а вставка  $Z_a$  находится внутри области  $Z_p$  и  $D \leq R - R_1/\cos(\pi/n)$  — схема 3 (рис. 6).

Уравнения движения (7)–(9), (11), (12) для схемы деформирования 2 рассматриваемой пластины имеют вид

$$\rho \ddot{\alpha} \Sigma_1 = P(t) \Sigma_2 - M_0(2 - \eta) \Sigma_3; \tag{18}$$

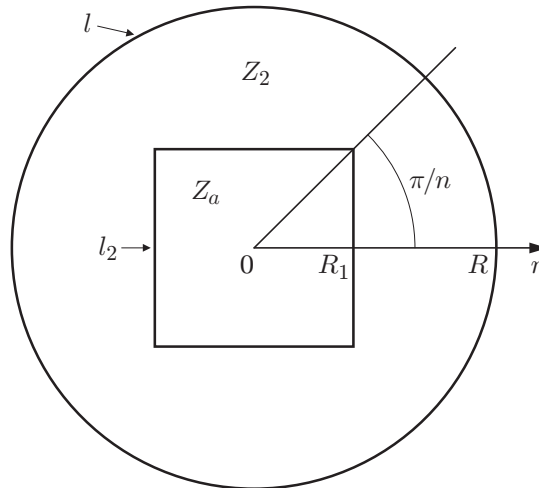


Рис. 4

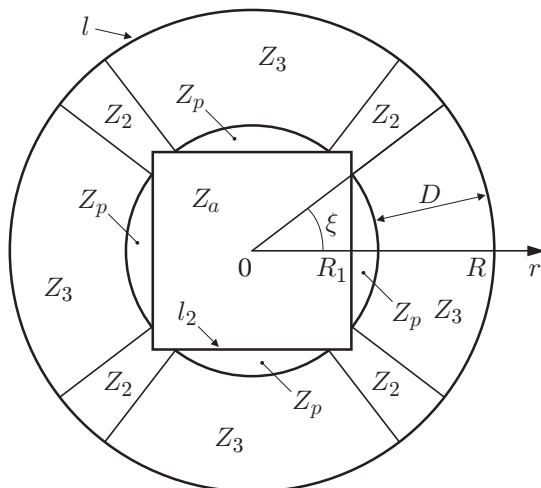


Рис. 5

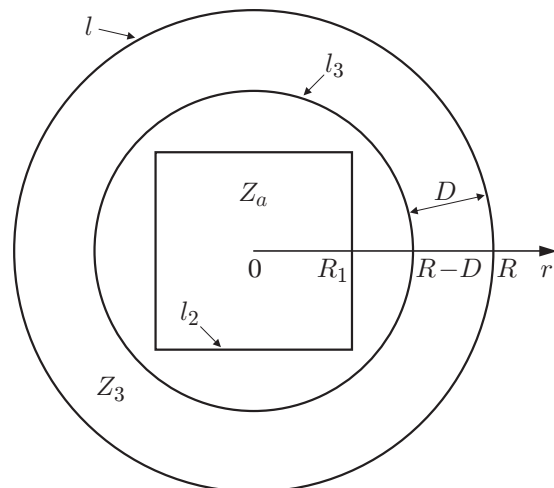


Рис. 6

$$\ddot{w}_c(\rho\Sigma_4 + \rho_a\Sigma_5) = P(t)\Sigma_6; \quad (19)$$

$$D = R - R_1/\cos\xi; \quad (20)$$

$$\dot{\alpha}_2(t, \varphi) = F_2(t, \varphi)\dot{\alpha}(t); \quad F_2(t, \varphi) = [R - R_1/\cos\xi(t)]/(R - R_1/\cos\varphi), \quad (21)$$

где

$$\Sigma_1(\xi) = \frac{n(R\cos\xi - R_1)^2}{6\cos^2\xi} \left\{ \xi \frac{(R\cos\xi - R_1)(R\cos\xi + 3R_1)}{\cos^2\xi} + R^2\left(\frac{\pi}{n} - \xi\right) - \right. \\ \left. - 3R_1^2\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} - \operatorname{tg}\xi\right) + 2RR_1\left[\ln\frac{\cos(\pi/n)}{1 - \sin(\pi/n)} - \ln\frac{\cos\xi}{1 - \sin\xi}\right] \right\};$$

$$\Sigma_2(\xi) = \frac{n(R\cos\xi - R_1)}{3\cos\xi} \left\{ \xi \frac{(R\cos\xi - R_1)(R\cos\xi + 2R_1)}{\cos^2\xi} + R^2\left(\frac{\pi}{n} - \xi\right) + \right. \\ \left. + RR_1\left[\ln\frac{\cos(\pi/n)}{1 - \sin(\pi/n)} - \ln\frac{\cos\xi}{1 - \sin\xi}\right] - 2R_1^2\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} - \operatorname{tg}\xi\right) \right\};$$

$$\Sigma_3(\xi) = 2nR\left[\xi + \frac{R\cos\xi - R_1}{R\cos\xi}\left(\frac{\pi}{n} - \xi + \frac{R_1}{A_*}\Sigma_*\right)\right]; \quad \Sigma_4(\xi) = nR_1^2\left(\frac{\xi}{\cos^2\xi} - \operatorname{tg}\xi\right);$$

$$\Sigma_5 = nR_1^2\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}; \quad \Sigma_6(\xi) = \Sigma_4(\xi) + \Sigma_5 = nR_1^2\left(\frac{\xi}{\cos^2\xi} - \operatorname{tg}\xi + \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right);$$

$$\Sigma_* = \ln\frac{[B_*\operatorname{tg}(\pi/2n) + A_*][-B_*\operatorname{tg}(\xi/2) + A_*]}{[-B_*\operatorname{tg}(\pi/2n) + A_*][B_*\operatorname{tg}(\xi/2) + A_*]}, \quad B_* = R + R_1; \quad A_* = \sqrt{R^2 - R_1^2}.$$

Тогда движение пластины по схеме 2 описывается уравнениями (10), (18)–(21).

Уравнения движения (14), (15) для схемы 1 имеют вид

$$\dot{\alpha}_2(t, \varphi) = G_2(\varphi)\dot{w}_c(t); \quad G_2(\varphi) = \cos\varphi/(R\cos\varphi - R_1); \quad (22)$$

$$\ddot{w}_c(\rho\Sigma_7 + \rho_a\Sigma_5) = P(t)\Sigma_8 - M_0(2 - \eta)\Sigma_9, \quad (23)$$

где

$$\Sigma_7 = \Sigma_1(0)/(R - R_1)^2; \quad \Sigma_8 = \Sigma_2(0)/(R - R_1) + \Sigma_5; \quad \Sigma_9 = \Sigma_3(0)/(R - R_1).$$

Уравнения движения (8), (9) для схемы 3 имеют вид

$$\rho\ddot{\alpha}\Sigma_{10} = P(t)\Sigma_{11} - M_0(2 - \eta)\Sigma_{12}; \quad (24)$$

$$\ddot{w}_c(\rho\Sigma_{13} + \rho_a\Sigma_5) = P(t)\Sigma_{14}, \quad (25)$$

где

$$\Sigma_{10}(D) = D^3(4R - 3D)/6; \quad \Sigma_{11}(D) = D^2(3R - 2D)/3; \quad \Sigma_{12} = \Sigma_3(\pi/n)/\pi = 2R;$$

$$\Sigma_{13}(D) = \pi(R - D)^2 - nR_1^2\operatorname{tg}(\pi/n); \quad \Sigma_{14}(D) = \Sigma_{13}(D) + \Sigma_5 = \pi(R - D)^2.$$

Тогда движение пластины по схеме 3 описывается уравнениями (10), (24), (25).

Предельная нагрузка  $P_0$  (17) определяется как

$$P_0 = \frac{M_0(2 - \eta)\Sigma_9}{\Sigma_8} = \frac{M_0(2 - \eta)\Sigma_3(0)}{\Sigma_2(0) + (R - R_1)\Sigma_5}. \quad (26)$$

При  $R_1 = 0$  рассматриваемая пластина становится круглой без жесткой вставки. Для нее формула (26) дает  $P_0 = 6M_0(2 - \eta)/R^2$ . В случае шарнирного опирания это значение равно предельной нагрузке  $\bar{P}_0$ , полученной в [16] на основе точного решения. В случае защемления контура предельная нагрузка по формуле (26) равна  $2\bar{P}_0$ . В работе [13] она

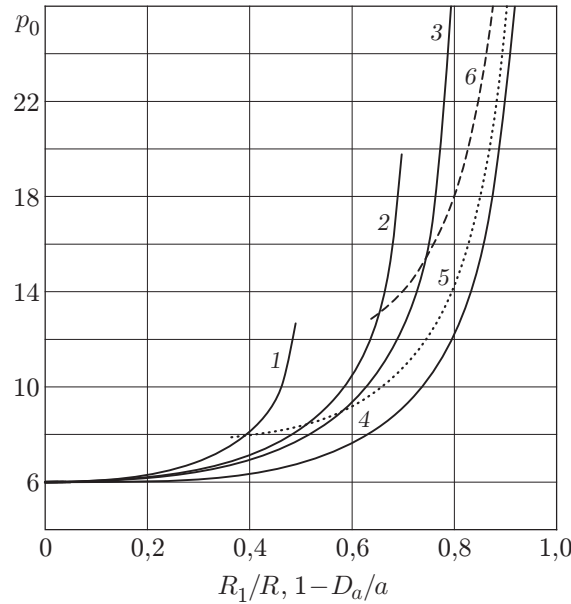


Рис. 7

получена в результате приближенного решения на основе условия пластичности Треска и равна  $1,875\bar{P}_0$ . При  $n \rightarrow \infty$  имеем круглую жесткую вставку. Для такой пластины предельная нагрузка определяется как

$$P_0 = 6M_0(2 - \eta)R/(R^3 - R_1^3) \tag{27}$$

и совпадает в случае шарнирного опирания с предельной нагрузкой, полученной на основе точного решения [10]. На рис. 7 представлена зависимость нагрузки  $p_0 = P_0R^2/[(2 - \eta)M_0]$  от отношения  $R_1/R$  для разных значений  $n$ : кривая 1 соответствует  $n = 3$ , кривая 2 — случаю  $n = 4$ , кривая 3 — значению  $n = 5$ , кривая 4 — значению  $n = \infty$ .

Оптимизируем форму правильной  $n$ -угольной жесткой вставки с целью нахождения экстремума предельной нагрузки рассматриваемой пластины при условии постоянства площади жесткой вставки  $S_a$ , толщины, способа крепления, радиуса круглой пластины. Так как площадь жесткой вставки  $S_a = nR_1^2 \operatorname{tg}(\pi/n)$ , то выражение (26) примет вид

$$P_0 = 6M_0(2 - \eta)A_1/R^2,$$

$$A_1 = \frac{\frac{\pi}{n} + \frac{\delta}{1 - \delta^2} \ln \frac{(1 + \delta) \operatorname{tg}(\pi/2n) + \sqrt{1 - \delta^2}}{-(1 + \delta) \operatorname{tg}(\pi/2n) + \sqrt{1 - \delta^2}}}{\pi/n + \delta^2 \operatorname{tg}(\pi/n) + \delta \ln \{ \cos(\pi/n)/[1 - \sin(\pi/n)] \}}, \quad \delta = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{S_a}{n \operatorname{tg}(\pi/n)}}.$$

Поскольку  $A_1$  убывает при увеличении  $n$  и должно выполняться неравенство  $R_1 = \sqrt{S_a/[n \operatorname{tg}(\pi/n)]} < R \cos(\pi/n)$ , круглая пластина с круглой жесткой вставкой имеет минимальную предельную нагрузку  $P_0 = 6M_0(2 - \eta)R/[R^3 - (\sqrt{S_a/\pi})^3]$ , а с  $n_0$ -угольной жесткой вставкой — максимальную, где  $n_0$  — минимальное из  $n$ , для которых выполняется неравенство  $\sin(2\pi/n)n/2 > S_a/R^2$ .

Проанализируем движение рассматриваемой пластины при разных уровнях “взрывной” нагрузки. Если  $0 < P_{\max} \leq P_0$  (“низкие” нагрузки), то пластина остается в покое.

Если  $P_0 < P_{\max} \leq P_1$  (“средние” нагрузки), где  $P_1$  — нагрузка, соответствующая появлению области  $Z_p$ , то движение пластины происходит по схеме 1. Нагрузку  $P_1$  опре-



делим следующим образом. Дифференцируя (10) по времени и исключая величины  $\ddot{\alpha}$ ,  $\ddot{w}_c$  из полученного равенства с помощью (18), (19), получим равенство

$$\frac{-\rho\dot{\alpha}D}{D}\Sigma_1 = P(t)\left[\Sigma_2 - \frac{\rho\Sigma_1\Sigma_6}{D(\rho\Sigma_4 + \rho_a\Sigma_5)}\right] - M_0(2 - \eta)\Sigma_3. \quad (28)$$

Учитывая, что  $\dot{\alpha}(t_0) = 0$  и что при возникновении области  $Z_p$  выполняются равенства  $P_1 = P(t_0)$ ,  $D(t_0) = \max D = R - R_1$ ,  $\xi(t_0) = 0$ , а области  $Z_p$  и  $Z_3$  отсутствуют, получим

$$P_1 = \frac{M_0(2 - \eta)\Sigma_3(0)}{\Sigma_2(0) - \rho\Sigma_1(0)\Sigma_6(0)/\{(R - R_1)[\rho\Sigma_4(0) + \rho_a\Sigma_5]\}}. \quad (29)$$

Из (26), (29) видно, что  $P_0 < P_1$ . Уравнение (23) для схемы 1 запишем в виде

$$\ddot{w}_c(t) = Q[P(t) - P_0], \quad (30)$$

где  $Q = \Sigma_8/(\rho\Sigma_7 + \rho_a\Sigma_5)$ . Начальные условия имеют вид (13). В момент времени  $t = T$  нагрузка снимается, и пластина некоторое время движется по инерции.

При  $t_0 \leq t \leq T$ , интегрируя уравнение движения (30), будем иметь

$$\dot{w}_c(t) = Q\left[\int_{t_0}^t P(\tau) d\tau - P_0(t - t_0)\right], \quad w_c(t) = Q\left[\int_{t_0}^t \int_{t_0}^m P(\tau) d\tau dm - P_0 \frac{(t - t_0)^2}{2}\right].$$

При  $T < t \leq t_f$  движение пластины происходит по инерции до остановки в момент  $t_f$  и описывается уравнением

$$\ddot{w}_c(t) = -QP_0$$

с начальными условиями  $\dot{w}_c(T)$ ,  $w_c(T)$ . Момент  $t_f$  определяется из условия

$$\dot{w}_c(t_f) = 0. \quad (31)$$

Интегрируя уравнение движения, получим равенства

$$\dot{w}_c(t) = \dot{w}_c(T) - QP_0(t - T); \quad (32)$$

$$w_c(t) = w_c(T) + \dot{w}_c(T)(t - T) - QP_0(t - T)^2/2.$$

Из (31), (32) следует, что

$$t_f = t_0 + \frac{1}{P_0} \int_{t_0}^T P(t) dt. \quad (33)$$

Прогибы вычисляются из уравнений (4), (22), максимальный остаточный прогиб — по формуле

$$w_c(t_f) = Q\left[\frac{1}{2P_0}\left(\int_{t_0}^T P(t) dt\right)^2 - \int_{t_0}^T (t - t_0)P(t) dt\right].$$

Если  $P_1 < P_{\max} \leq P_2$  (“высокие” нагрузки), где  $P_2$  — нагрузка, при которой исчезает область  $Z_2$ , то движение пластины начнется с развитой областью  $Z_p$  и  $R - R_1/\cos(\pi/n) < D(t_0) \leq R - R_1$ . Начальные значения  $\xi_0 = \xi(t_0)$ ,  $D_0 = D(t_0)$  определяются из уравнения (28) с учетом равенства  $\dot{\alpha}(t_0) = 0$  и соотношения (20):

$$P_{\max}\left\{\Sigma_2(\xi_0) - \frac{\rho\Sigma_1(\xi_0)\Sigma_6(\xi_0)}{D_0[\rho\Sigma_4(\xi_0) + \rho_a\Sigma_5]}\right\} = M_0(2 - \eta)\Sigma_3(\xi_0). \quad (34)$$

Нагрузка  $P_2$  определяется из равенства (34) при  $\xi_0 = \pi/n$  и  $D_0 = R - R_1/\cos(\pi/n)$ :

$$P_2 = \frac{M_0(2 - \eta)\Sigma_3(\pi/n)}{\Sigma_2(\pi/n) - \rho\Sigma_1(\pi/n)\Sigma_6(\pi/n)/\{[R - R_1/\cos(\pi/n)][\rho\Sigma_4(\pi/n) + \rho_a\Sigma_5]\}}.$$

В первой фазе ( $t_0 < t \leq t_1$ ) деформирования движение пластины происходит по схеме 2 и описывается уравнениями (10), (18)–(21) с начальными условиями (13) и (34). В этой фазе происходит сжатие ( $\dot{D} > 0$ ) области  $Z_p$  по закону (28). Время  $t_1$ , соответствующее исчезновению области  $Z_p$ , определяется из равенства  $\xi(t_1) = 0$ . В этот момент определяются значения  $\dot{w}_c(t_1)$ ,  $w_c(t_1)$ .

Вторая фаза ( $t_1 < t \leq t_f$ ) движения пластины происходит по схеме 1 до остановки в момент времени  $t_f$ . Деформирование описывается уравнениями (22), (23) с начальными условиями, определенными в конце первой фазы движения. Время остановки определяется условием (31). Все прогибы в пластине вычисляются из уравнений (4), (20)–(22) с учетом всех фаз движения.

Если  $P_{\max} > P_2$  (“сверхвысокие” нагрузки), то движение пластины начнется по схеме 3 с развитой областью  $Z_p$ , которая охватит полностью жесткую вставку  $Z_a$ , и тогда  $0 < D < R - R_1/\cos(\pi/n)$ . Значение  $D_0 = D(t_0)$  определим следующим образом. Дифференцируя (10) по времени и исключая из полученного равенства величины  $\ddot{\alpha}$ ,  $\ddot{w}_c$  с помощью (24), (25), получим

$$\frac{-\rho\dot{\alpha}\dot{D}}{D}\Sigma_{10} = P(t)\left[\Sigma_{11} - \frac{\rho\Sigma_{14}\Sigma_{10}}{D(\rho\Sigma_{13} + \rho_a\Sigma_5)}\right] - M_0(2 - \eta)\Sigma_{12}. \quad (35)$$

Учитывая, что  $\dot{\alpha}(t_0) = 0$ , определим  $D_0$  из равенства

$$P_{\max}\left\{\Sigma_{11}(D_0) - \frac{\rho\Sigma_{14}(D_0)\Sigma_{10}(D_0)}{D_0[\rho\Sigma_{13}(D_0) + \rho_a\Sigma_5]}\right\} = M_0(2 - \eta)\Sigma_{12}. \quad (36)$$

В первой фазе ( $t_0 < t \leq t_1$ ) деформирования движение пластины происходит по схеме 3 и описывается уравнениями (10), (24), (25) с начальными условиями (13) и (36). В этой фазе происходит сжатие области  $Z_p$  по закону (35). Время  $t_1$ , соответствующее появлению области  $Z_2$ , определяется из равенства  $D(t_1) = R - R_1/\cos(\pi/n)$ . В этот момент находятся значения  $\dot{\alpha}(t_1)$ ,  $\alpha(t_1)$ .

Вторая ( $t_1 < t \leq t_2$ ) и третья ( $t_2 < t \leq t_f$ ) фазы движения происходят так же, как и первая и вторая фазы деформирования при “высоких” нагрузках при соответствующих начальных значениях.

Все прогибы вычисляются из равенств (4) с учетом всех фаз движения. На рис. 8 сплошные линии соответствуют прогибам  $w = uR^2\rho/(M_0T^2)$  при  $\varphi = 0$  шарнирно опертой круглой пластины с квадратной жесткой вставкой ( $n = 4$ ) и  $R_1/R = 0,2$ ,  $\rho_a/\rho = 3,0$  под действием “сверхвысокой” нагрузки “прямоугольного” вида:  $P(t) = 33,82M_0/R^2$  при  $0 \leq t \leq T$ ,  $P(t) = 0$  при  $t > T$ . Кривые 1–4 изображают прогибы пластины в моменты времени  $t = T$ ,  $t = t_1 = 1,89T$ ,  $t = t_2 = 2,12T$ ,  $t = t_f = 5,88T$  соответственно.

**3.** В качестве другого примера рассмотрим динамическое поведение эллиптической пластины с жесткой вставкой  $Z_a$ , контур которой находится на одинаковом расстоянии  $D_a$  от внешнего контура (рис. 9). Уравнение контура  $l$  задано в параметрической форме:  $x_1 = a \cos \varphi$ ,  $y_1 = b \sin \varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $b \leq a$ . Считаем  $0 < D_a \leq b^2/a$ , при этом шарнир  $l_1$  образовываться не будет (см. [6]). Тогда уравнение контура жесткой вставки  $l_2$  имеет вид (1) при  $D = D_a$ . Криволинейная система координат (16) имеет вид

$$x = [a - \nu_1 b/L(\nu_2)] \cos \nu_2, \quad y = [b - \nu_1 a/L(\nu_2)] \sin \nu_2,$$

$$L(\varphi) = \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}.$$

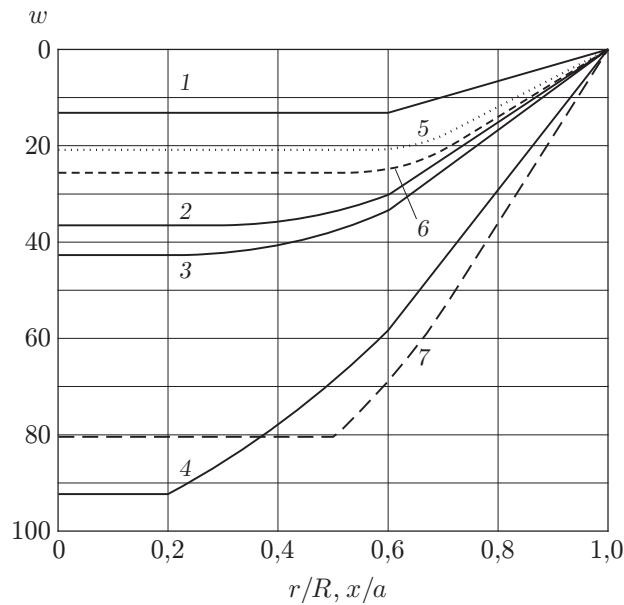


Рис. 8

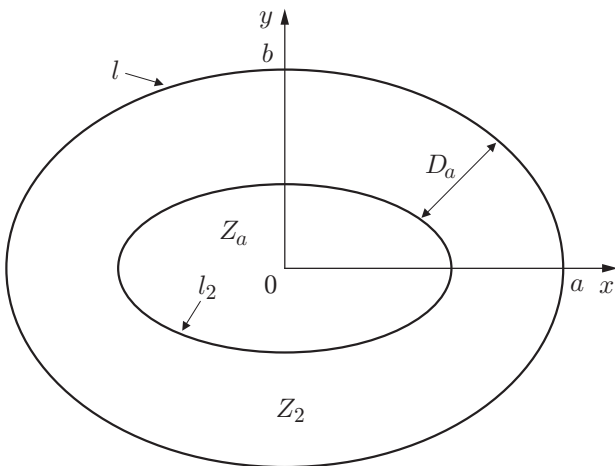


Рис. 9

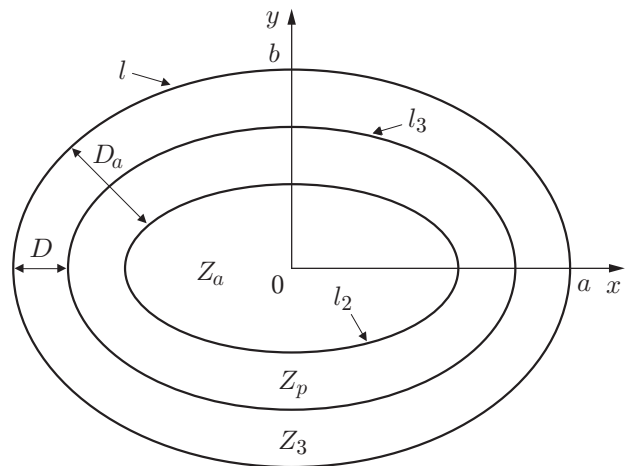


Рис. 10

Для рассматриваемой пластины возможны две схемы деформирования. При “средних” нагрузках пластина деформируется конусообразно (схема 1, рис. 9). При этом угол поворота пластины вокруг опорного контура пластины будет одинаковым для всех  $\varphi$ , равным  $\alpha(t)$ . При “высоких” нагрузках жесткая вставка  $Z_a$  расположена внутри пластической области  $Z_p$  и контур  $l_3$  находится на одинаковом расстоянии  $D_a - D$  от точек контура жесткой вставки  $l_2$  (схема 3, рис. 10).

Уравнения движения (8), (9) при “высоких” нагрузках имеют вид (18), (19), в которых  $\Sigma_i$  следует заменить на  $\Omega_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ):

$$\Omega_1(D) = \iint_{Z_3} d_3^2 ds = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^D \nu_1^2 \left[ L(\nu_2) - \frac{\nu_1 ab}{L^2(\nu_2)} \right] d\nu_1 \right\} d\nu_2 = \frac{D^3}{6} \left[ 8 \int_0^{\pi/2} L(\varphi) d\varphi - 3\pi D \right],$$

$$\begin{aligned}\Omega_2(D) &= \iint_{Z_3} d_3 ds = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^D \nu_1 \left[ L(\nu_2) - \frac{\nu_1 ab}{L^2(\nu_2)} \right] d\nu_1 \right\} d\nu_2 = \frac{2D^2}{3} \left[ 3 \int_0^{\pi/2} L(\varphi) d\varphi - \pi D \right], \\ \Omega_3 &= \int_l dl = 4 \int_0^{\pi/2} L(\varphi) d\varphi; \quad \Omega_4(D) = \iint_{Z_p} ds = 4(D_a - D) \int_0^{\pi/2} L(\varphi) d\varphi - \pi(D_a^2 - D^2), \\ \Omega_5 &= \iint_{Z_a} ds = \pi ab - D_a \left[ 4 \int_0^{\pi/2} L(\varphi) d\varphi - \pi D_a \right], \\ \Omega_6(D) &= \Omega_4(D) + \Omega_5 = \pi ab - D \left[ 4 \int_0^{\pi/2} L(\varphi) d\varphi - \pi D \right]\end{aligned}$$

( $d_3(x, y)$  — расстояние от точки  $(x, y)$  до опорного контура;  $Z_3 = S \setminus (Z_a \cup Z_p)$ ). Тогда движение пластины описывается уравнениями (10), (18), (19) с учетом сделанной замены.

Уравнения движения (14), (15) при “средних” нагрузках имеют вид

$$\dot{\alpha} D_a = \dot{w}_c; \quad \ddot{w}_c \left[ \rho \frac{\Omega_1(D_a)}{D_a^2} + \rho_a \Omega_5 \right] = P(t) \left[ \frac{\Omega_2(D_a)}{D_a} + \Omega_5 \right] - M_0(2 - \eta) \frac{\Omega_3}{D_a}.$$

Предельная нагрузка (17) с учетом  $\int_0^{\pi/2} L(\varphi) d\varphi \approx \frac{\pi}{8} [3(a+b) - 2\sqrt{ab}]$  (см. [6]) вычисляется по формуле

$$P_0 = \frac{M_0(2 - \eta)\Omega_3}{\Omega_2(D_a) + D_a\Omega_5} \approx \frac{6M_0(2 - \eta)[3(a+b) - 2\sqrt{ab}]}{D_a\{4(3ab + D_a^2) - 3D_a[3(a+b) - 2\sqrt{ab}]\}}$$

и в случае круглой пластины с круглой жесткой вставкой ( $a = b = R$ ,  $D_a = R - R_1$ ) совпадает с формулой (27).

Анализ динамического поведения рассматриваемой пластины будет схож с анализом, проведенным выше для круглой пластины с правильной полигональной жесткой вставкой. Отличие заключается в том, что  $P_1 = P_2$ , и при  $P_{\max} > P_1$  после схемы 3 реализуется схема 1. Нагрузка  $P_1$  вычисляется по формуле (см. (29))

$$P_1 = \frac{M_0(2 - \eta)\Omega_3}{\Omega_2(D_a) - \frac{\rho\Omega_1(D_a)\Omega_6(D_a)}{D_a[\rho\Omega_4(D_a) + \rho_a\Omega_5]}} \approx \frac{6M_0(2 - \eta)\rho_a[3(a+b) - 2\sqrt{ab}]}{\rho D_a^2[3(a+b) - 2\sqrt{ab} - 2D_a(4\rho_a/\rho - 3)]}.$$

Зависимость нагрузки  $p_0 = P_0 a^2 / [(2 - \eta)M_0]$  от отношения  $D_a/a$  для разных значений отношений  $b/a$  приведена на рис. 7: кривая 4 соответствует  $b = a$ , кривая 5 — значению  $b/a = 0,8$ , кривая 6 — значению  $b/a = 0,6$ . На рис. 8 штриховые и пунктирные линии соответствуют прогибам  $w = ua^2\rho/(M_0T^2)$  в сечении  $y = 0$  шарнирно опертой эллиптической пластины с  $b/a = 0,8$ , с жесткой вставкой и  $D_a/a = 0,5$ ,  $\rho_a/\rho = 1,5$  под действием “высокой” нагрузки с линейным затуханием:  $P(t) = 75,48(T - t)M_0/R^2$  при  $0 \leq t \leq T$ ,  $P(t) = 0$  при  $t > T$ . Кривые 5–7 изображают прогибы пластины в моменты времени  $t = T$ ,  $t = t_1 = 1,16T$  и  $t = t_f = 4,6T$  соответственно.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Комаров К. Л., Немировский Ю. В.** Динамика жесткопластических элементов конструкций. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1984.
2. **Немировский Ю. В., Романова Т. П.** Динамическое поведение двусвязных полигональных пластических плит // Прикл. механика. 1987. Т. 23, № 5. С. 52–59.
3. **Немировский Ю. В., Романова Т. П.** Динамический изгиб пластических полигональных плит // ПМТФ. 1988. № 4. С. 149–157.
4. **Немировский Ю. В., Романова Т. П.** Динамика пластического деформирования пластин с криволинейным контуром // Прикл. механика. 2001. Т. 37, № 12. С. 68–78.
5. **Немировский Ю. В., Романова Т. П.** Пластическое деформирование двусвязных пластин с криволинейным контуром при динамических нагрузках // Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике. Минск: Технопринт, 2001. С. 515–525.
6. **Немировский Ю. В., Романова Т. П.** Динамическая пластическая повреждаемость одно- и двусвязных эллиптических пластин // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 2. С. 142–154.
7. **Немировский Ю. В., Романова Т. П.** Моделирование и анализ процесса штамповки тонкостенных конструкций с гладкими выпуклыми контурами // Механика оболочек и пластин: Сб. докл. XX Междунар. конф. по теории оболочек и пластин: Н. Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2002. С. 231–239.
8. **Немировский Ю. В., Романова Т. П.** Повреждаемость плоских преград с невогнутыми контурами при воздействии взрывных нагрузок // Науч. вестн. Новосиб. гос. техн. ун-та. 2002. № 2. С. 77–85.
9. **Немировский Ю. В., Романова Т. П.** Динамическое поведение жесткопластических пластин в форме сектора // Прикл. механика. 2004. Т. 40, № 4. С. 93–101.
10. **Мазалов В. Н., Немировский Ю. В.** Динамика тонкостенных пластических конструкций // Проблемы динамики упруго-пластических сред. Новое в зарубежной науке. Механика. 1975. Вып. 5. С. 155–247.
11. **Ерхов М. И.** Теория идеально пластических тел и конструкций. М.: Наука, 1978.
12. **Гопкинс Г., Прагер В.** Динамика пластической круглой пластинки // Механика. 1955. № 3. С. 112–122.
13. **Флоренс А. Л.** Поведение защемленной круговой жесткопластической пластинки под действием взрывного давления // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика. Сер. Е. 1966. № 2. С. 11–17.
14. **Флоренс А. Л.** Кольцевая пластинка под действием поперечного линейного импульса // Ракетная техника и космонавтика. 1965. № 9. С. 202–211.
15. **Ржаницын А. Р.** Строительная механика. М.: Высш. шк., 1982.
16. **Гопкинс Г., Прагер В.** Несущая способность круглых пластинок // Механика. 1955. № 3. С. 100–111.

*Поступила в редакцию 23/V 2005 г.*