УДК 532.546

ГОМОГЕНИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШИВАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Ю. Амира*, В. В. Шелухин**,***

* Университет г. Клермонт-Ферранд, 63177 Клермонт-Ферранд, Франция
** Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
*** Алтайский государственный университет, 656049 Барнаул, Россия
E-mails: youcef.amirat@uca.fr, shelukhin@list.ru

С использованием метода двухмасштабной гомогенизации системы уравнений Навье — Стокса и Кана — Хиллиарда получены уравнения фильтрации двухкомпонентной смешиваемой жидкости в пористой среде. Исследован случай сильной смешиваемости.

Ключевые слова: уравнения Навье — Стокса, уравнения Кана — Хиллиарда, фильтрация смешиваемых жидкостей, двухмасштабная гомогенизация.

DOI: 10.15372/PMTF20210419

Введение. Течение жидкостей в пористых средах является объектом интенсивных исследований в таких инженерных дисциплинах, как нефтедобыча, управление водными ресурсами, гражданская инженерия и др. Важным инструментом моделирования таких течений является теория осреднений уравнений математической физики для неоднородных пористых сред, ставшая самостоятельной математической дисциплиной в 80-х гг. XX в. Среди многочисленных приложений данной теории большое значение имеет теория фильтрации жидкостей в грунтах. Задачи фильтрации, решаемые с помощью методов теории осреднений, имеют особенности, обусловленные видом рассматриваемых уравнений, наличием в задачах разных масштабов, сильной нелинейностью уравнений и т. д.

Наиболее распространенным и эффективным подходом к осреднению уравнений для неоднородных сред является метод двухмасштабных разложений, применявшийся для решения типичных задач осреднения в работе [1]. Вывод закона фильтрации Дарси из уравнений течения Навье — Стокса выполнен в работе [2].

Для упрощенной модели типа модели Навье — Стокса — Кана — Хиллиарда осреднение проведено в работе [3]. Данная модель представляет собой модель фазового поля для двухфазной несмешивающейся несжимаемой пористой среды при наличии поверхностного натяжения. Течение в порах описывается сильно связанной системой нестационарных упрощенных уравнений Стокса — Кана — Хиллиарда; с помощью подхода двухмасштабной сходимости получены масштабированные уравнения. Однако гомогенизация не приводит к разделению масштабов. Это выражается в том, что в результате осреднения скорость зависит как от макро-, так и от микропеременной.

Работа частично выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по теме “Современные методы гидродинамики для задач природопользования, индустриальных систем и полярной механики” (тема № FZMW-2020-0008).

В настоящей работе масштабы удается разделить для случая сильной смешиваемости, когда жидкости разделены диффузной границей конечной ширины, не зависящей от параметра масштаба.

Описание модели. Для равновесных обратимых процессов двухкомпонентной жидкости термодинамическое тождество Гиббса имеет вид [4]

$$dE = \theta\, dS + \mu_0\, d\rho + \mu\, d(\rho c), \tag{1}$$

где E — внутренняя энергия единицы объема; θ — абсолютная температура; S — энтропия единицы объема; ρ — полная плотность смеси; μ_0 — химический потенциал смеси; c, μ — массовая концентрация и химический потенциал добавляемого (второго) компонента. Поскольку термодинамическое давление представляет собой производную энергии по объему, из (1) следует выражение для давления [4]

$$p = -E + \theta S + \mu_0 \rho + \mu \rho c. \tag{2}$$

Величина $\varphi = \rho c$ представляет собой парциальную плотность второго компонента: $\varphi = \bar{\rho}_2 \phi_2$; $\bar{\rho}_i$, ϕ_i — плотность и объемная концентрация i-го компонента; $i = 1, 2$. Далее φ будем называть концентрацией. Если ввести свободную энергию Гиббса f, то в силу (1), (2) химический потенциал μ удовлетворяет равенству

$$\mu = \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \qquad f = E + p - \theta S.$$

В случае неравномерных процессов в двухкомпонентных смесях согласно теории Кана — Хиллиарда химический потенциал определяется как функциональная производная внутренней энергии: $\mu = \delta f/\delta\varphi$, где

$$f = \gamma w(\varphi) + \alpha\, |\nabla\varphi|^2/2, \tag{3}$$

$w(\varphi)$ — безразмерная объемная энергия; γ, α — размерные константы, обратно и прямо пропорциональные ширине размазанного межфазного фронта. Введем вязкость смеси

$$\tilde{\eta} = [\eta_1(\bar{\rho}_2 - \varphi) + \eta_2\varphi]/\bar{\rho}_2,$$

где η_i — вязкости компонентов. Типичное представление для объемной энергии имеет вид [3]

$$\omega(\varphi) = \varphi_2^2(1 - \varphi_2)^2 = \varphi^2(\bar{\rho}_2 - \varphi)^2/\bar{\rho}_2^4.$$

Заметим, что функциональная производная в области Ω находится из равенства

$$\int\limits_\Omega \frac{\delta f}{\delta \varphi}\, h\, dxy\, dz = \frac{d}{d\lambda} \int\limits_\Omega f(\varphi + \lambda h)\, dx\, dy\, dz\Big|_{\lambda=0} =$$

$$= \int\limits_\Omega [\gamma\, \partial w(\varphi) - \alpha\, \Delta\varphi]\, h\, dx\, dy\, dz \qquad \forall h \in C^1(\Omega)$$

при условии $\partial\varphi/\partial n = 0$ на границе области, т. е. на $\partial\Omega$. Поэтому

$$\mu = \gamma w'(\varphi) - \alpha\Delta\varphi, \qquad w'(\varphi) = \frac{dw}{d\varphi}.$$

Вектор потока концентрации подчиняется закону Фика

$$\boldsymbol{j} = -\beta\, \nabla\mu,$$

где β — коэффициент мобильности [4]. Концентрация удовлетворяет уравнению переноса

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\varphi + \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0,$$

в котором скорость $\boldsymbol{v}$ находится из уравнения Навье — Стокса

$$\rho\Big(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\Big) = -\nabla\, p + \operatorname{div}\, \tau + \rho \boldsymbol{g}.$$

Здесь $\boldsymbol{g}$ — ускорение свободного падения; τ — нешаровая часть тензора напряжений:

$$\tau = 2\tilde{\eta} D^v + \alpha S, \quad S = (|\nabla\varphi|^2/3)\, I - \nabla\varphi\otimes\nabla\varphi, \qquad (\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})_{ij} = a_i b_j, \tag{4}$$

D^v — симметричная часть матрицы $\nabla\boldsymbol{v}$, т. е. $2D^v = \nabla\boldsymbol{v} + (\nabla\boldsymbol{v})^*$; I — единичная матрица. Первое слагаемое в определении тензора S выбрано таким образом, чтобы девиатор S был равен нулю. Поэтому в случае выполнения условия несжимаемости

$$\operatorname{div}\, \boldsymbol{v} = 0$$

шаровая часть тензора τ равна нулю.

Следует отметить, что в формулах (3), (4) параметр α имеет одно и то же значение [5]. Действительно, пусть $\boldsymbol{u}(x)$ — виртуальная скорость:

$$\operatorname{div}\, \boldsymbol{u} = 0, \qquad \boldsymbol{u}\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{5}$$

которой соответствует виртуальная деформация начального состояния жидкости:

$$\boldsymbol{h}_t(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{u}(x).$$

Рассмотрим случай, когда сдвиговой вязкостью можно пренебречь. В соответствии с принципом виртуальной мощности имеем

$$N(\boldsymbol{u}) = -\int\limits_\Omega \tau : D^u\, dx. \tag{6}$$

Мощность $N(\boldsymbol{u})$ также можно вычислить непосредственно, с использованием определения свободной энергии:

$$N(\boldsymbol{u}) = \frac{d}{dt}\int\limits_\Omega F\, dx\Big|_{t=0}, \qquad F = \gamma\omega(\varphi(\boldsymbol{h}_t(\boldsymbol{x}))) + \frac{\alpha}{2}\, |\nabla\varphi(\boldsymbol{h}_t(\boldsymbol{x}))|^2.$$

Нетрудно показать, что

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega F\, dx\Big|_{t=0} = \int\limits_\Omega \gamma\nabla\omega(\varphi)\cdot\boldsymbol{u} + \alpha\nabla\varphi\otimes\nabla\varphi : D^u\, dx. \tag{7}$$

Из формул (5)–(7) следует равенство

$$\tau = -\alpha\nabla\varphi\otimes\nabla\varphi.$$

При добавлении в интеграл в правой части равенства (7) слагаемого $-(\alpha/3)|\nabla\varphi|^2 \operatorname{div} \boldsymbol{u}$ данное равенство не меняется, поэтому представление (4) для тензора S обоснованно.

Введем безразмерные переменные и параметры

$$\boldsymbol{x}' = \frac{\boldsymbol{x}}{H}, \quad \boldsymbol{v}' = \frac{\boldsymbol{v}}{V}, \quad V = \frac{H}{T}, \quad p' = \frac{Hp}{V\eta_1}, \quad \mu' = \frac{\bar\rho_1 H\mu}{V\eta_1}, \quad \boldsymbol{j}' = \frac{\boldsymbol{j}}{\bar\rho_1 V}, \quad \varphi' = \frac{\varphi}{\bar\rho_2},$$

$$\mathrm{Re} = \frac{\bar\rho_1 HV}{\eta_1}, \quad \mathrm{Fr} = \frac{gH}{V^2}, \quad \Lambda = \frac{\alpha\bar\rho_2^2}{\eta_1 VH}, \quad B = \frac{\beta\eta_1}{\bar\rho_1^2 H^2}, \quad \Gamma = \frac{\gamma H\bar\rho_1}{\bar\rho_2 V\eta_1}.$$

Тогда уравнения для двухкомпонентной смешиваемой жидкости принимают вид

$$\mu' = \Gamma\,\frac{dw(\varphi')}{d\,\varphi'} - \Lambda\,\Delta'\varphi', \qquad \omega(\varphi') = \varphi'^2(1-\varphi')^2; \tag{8}$$

$$\boldsymbol{j}' = -B\,\nabla'\mu'; \tag{9}$$

$$R\Big(\frac{\partial\varphi'}{\partial t'} + (\boldsymbol{v}'\cdot\nabla')\,\varphi'\Big) + \operatorname{div}'\boldsymbol{j}' = 0, \qquad R = \frac{\bar\rho_2}{\bar\rho_1}; \tag{10}$$

$$\frac{\rho}{\bar\rho_1}\operatorname{Re}\Big(\frac{\partial\boldsymbol{v}'}{\partial t'} + (\boldsymbol{v}'\cdot\nabla')\boldsymbol{v}'\Big) = -\nabla' p' + \operatorname{div}(2\eta(\varphi')D') - \frac{\rho}{\bar\rho_1}\operatorname{Fr}\operatorname{Re}\boldsymbol{e}_z +$$

$$+ \Lambda\operatorname{div}'\Big(\frac{1}{3}\,|\nabla'\varphi'|^2\cdot I - \nabla'\varphi'\otimes\nabla'\varphi'\Big), \quad \eta(\varphi') = \varphi'\,\frac{\eta_2}{\eta_1} + 1 - \varphi'; \tag{11}$$

$$\operatorname{div}'\boldsymbol{v}' = 0, \tag{12}$$

где $\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_3$ — единичный вектор, направление которого противоположно направлению силы тяжести; φ' имеет смысл объемной доли второго компонента.

Исключая химический потенциал μ' и поток $\boldsymbol{j}'$, получаем уравнение

$$R\Big(\frac{\partial\varphi'}{\partial t'} + (\boldsymbol{v}'\cdot\nabla')\,\varphi'\Big) - \operatorname{div}'\Big[B\,\nabla'\Big(\Gamma\,\frac{dw}{d\varphi'} - \Lambda\,\Delta'\varphi'\Big)\Big] = 0. \tag{13}$$

Таким образом, математическая модель сводится к уравнениям (11)–(13) для функций $p', \varphi', \boldsymbol{v}'$.

Опуская штрихи и полагая число Рейнольдса малым, уравнения (8)–(12) можно представить в виде

$$\mu = \Gamma w'(\varphi) - \Lambda\,\Delta\varphi; \tag{14}$$

$$\boldsymbol{j} = -B\,\nabla\mu; \tag{15}$$

$$R\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\varphi\Big) + \operatorname{div}\boldsymbol{j} = 0; \tag{16}$$

$$0 = -\nabla p + 2\operatorname{div}(\eta(\varphi)D) + \Lambda\operatorname{div}((1/3)|\nabla\varphi|^2\cdot I - \nabla\varphi\otimes\nabla\varphi); \tag{17}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0. \tag{18}$$

Математически корректными граничными условиями на непроницаемых границах являются условия

$$\boldsymbol{v} = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0, \qquad \mu = 0 \quad \Big(\text{или} \quad \frac{\partial\mu}{\partial n} = 0\Big). \tag{19}$$

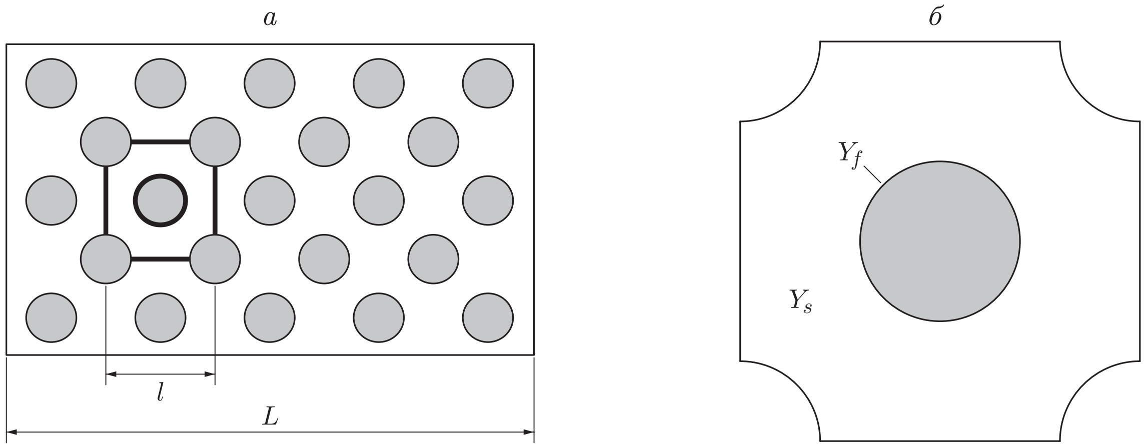
Смешиваемость. Рассмотрим течения в перфорированной области Ω_f^ε, являющейся частью перфорированного пространства с периодической структурой (см. рисунок). Опишем ее детально с помощью единичного куба $Y = (0,1)^n$ для $n = 2, 3$. Эта ячейка периодичности состоит из жидкой Y_f и твердой Y_s частей. Если Ω — область в $\mathbb{R}^n$, то ее перфорированная часть $\Omega_f^\varepsilon = \cup_{z\in\mathbb{Z}^n}\varepsilon(Y_f + z)\cap\Omega$ представляет собой область, занятую жидкостью, где $Y_f + z$ — сдвиг области Y_f на вектор z; $\varepsilon(Y_f + z)$ — "сжатие" области $Y_f + z$ в ε раз. Параметр ε представляет собой отношение размера l (см. рисунок) ячейки периодичности εY к размеру L области Ω: $\varepsilon = l/L$.

Покажем, что для задачи (14)–(19) справедливо энергетическое равенство

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_f^\varepsilon}\frac{\Gamma w(\varphi)}{\Lambda} + \frac{|\nabla\varphi|^2}{2}\,dx + \int\limits_{\Omega_f^\varepsilon}\frac{B|\nabla\mu|^2}{\Lambda R} + \frac{2\eta|\nabla\boldsymbol{v}|^2}{\Lambda}\,dx = 0. \tag{20}$$

С использованием уравнения (16) вычислим производную энергии:

$$\frac{\Gamma}{\Lambda}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_f^\varepsilon} w(\varphi)\,dx = \frac{\Gamma}{\Lambda}\int\limits_{\Omega_f^\varepsilon} w'(\varphi)\varphi_t\,dx = -\frac{\Gamma}{\Lambda}\int\limits_{\Omega_f^\varepsilon} w'(\varphi)(R^{-1}\operatorname{div}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\varphi)\,dx.$$



Схемы безразмерной области Ω, выделенной из пространства с периодической структурой (a), и подобласти Y_f в ячейке периодичности Y ($б$)

В силу уравнения (15) имеем

$$\frac{\Gamma}{\Lambda}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_f^\varepsilon} w(\varphi)\,dx = \frac{\Gamma B}{R\Lambda}\int\limits_{\Omega_f^\varepsilon} w'(\varphi)\Delta\mu\,dx - \frac{\Gamma}{\Lambda}\int\limits_{\partial\Omega_f^\varepsilon} w\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma = \frac{\Gamma B}{R\Lambda}\int\limits_{\Omega_f^\varepsilon} w'(\varphi)\,\Delta\mu\,dx. \tag{21}$$

Умножая уравнение (16) на $\Delta\varphi$ и интегрируя его по частям, получаем равенство

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_f^\varepsilon}\frac{|\nabla\varphi|^2}{2} + \int\limits_{\Omega_f^\varepsilon}\frac{B\,|\nabla\mu|^2}{R\Lambda}\,dx = -\frac{\Gamma B}{R\Lambda}\int\limits_{\Omega_f^\varepsilon} w'(\varphi)\,\Delta\mu\,dx + \int\limits_{\Omega_f^\varepsilon}(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\varphi)\,\Delta\varphi\,dx. \tag{22}$$

В силу (17) последний интеграл в правой части формулы (22) можно записать в виде

$$\int\limits_{\Omega_f^\varepsilon}(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\varphi)\,\Delta\varphi\,dx = -\int\limits_{\Omega_f^\varepsilon}\frac{2\eta|\boldsymbol{v}|^2}{\Lambda}\,dx.$$

Суммирование равенств (21), (22) приводит к формуле (20), из которой следует неравенство

$$\int\limits_{\Omega_f^\varepsilon} w(\varphi(x,t))\,dx \leqslant \int\limits_{\Omega_f^\varepsilon} w(\varphi_0)\,dx + \frac{\Lambda}{2\Gamma}\int\limits_{\Omega_f^\varepsilon}\frac{|\nabla\varphi_0|^2}{2}\,dx, \qquad \varphi_0(x) = \varphi\big|_{t=0}. \tag{23}$$

В силу (8) равенство

$$\int\limits_{\Omega_f^\varepsilon} w(\varphi(x,t))\,dx = 0$$

справедливо только в отсутствие смешиваемости, т. е. когда φ принимает значения 0 и 1. Поэтому выполнение условия для начальной концентрации

$$\int\limits_{\Omega_f^\varepsilon} w(\varphi_0(x))\,dx \leqslant \delta, \qquad \varphi_0 = \varphi\big|_{t=0} \tag{24}$$

при малом δ свидетельствует о слабой начальной смешиваемости. Задавая константу c_0, ограничимся следующим классом начальных данных:

$$\int\limits_{\Omega_f^\varepsilon} |\nabla\varphi_0|^2\,dx \leqslant c_0. \tag{25}$$

Из (23)–(25) следует

$$\int\limits_{\Omega_f^\varepsilon} w(\varphi(x,t))\,dx \leqslant 2\delta \tag{26}$$

при условии, что отношение Λ/Γ достаточно мало. Таким образом, слабая начальная смешиваемость сохраняется при малом значении Λ/Γ.

Пусть ε_0 — безразмерная ширина межфазной границы. В [6] полагается, что $\Gamma \sim 1/\varepsilon_0$, $\Lambda \sim \varepsilon_0$, поэтому $\Lambda/\Gamma \sim \varepsilon_0^2$. Введенный математический критерий слабой смешиваемости (26) согласуется с условием малой толщины межфазной границы.

Гомогенизация. В настоящей работе рассматривается случай сильной смешиваемости, когда $\Gamma(\varepsilon) \sim 1$, $\Lambda(\varepsilon) \sim 1$ при $\varepsilon = l/L \to 0$ и не рассматривается вопрос о степени смешиваемости реальных жидкостей в рамках сформулированных критериев, поскольку это требует проведения дополнительного исследования. Поскольку жидкость идеально смешивается сама с собой, с другой жидкостью она хорошо смешивается в случае, если химические составы этих жидкостей подобраны определенным образом.

В соответствии с методом двухмасштабной гомогенизации решение $\boldsymbol{v}^\varepsilon$, φ^ε, p^ε, μ^ε задачи (14)–(19) находим в виде асимптотических рядов

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{v}^\varepsilon(x) = \varepsilon^2\boldsymbol{v}^0(x,y) + \varepsilon^3\boldsymbol{v}^1(x,y) + \ldots, \qquad y = x/\varepsilon,\\
p^\varepsilon(x) = p^0(x) + \varepsilon p^1(x,y) + \ldots, \qquad y = x/\varepsilon,\\
\varphi^\varepsilon(x) = \varphi^0(x) + \varepsilon\varphi^1(x,y) + \ldots, \qquad y = x/\varepsilon,\\
\mu^\varepsilon(x) = \mu^0(x) + \varepsilon\mu^1(x,y) + \ldots, \qquad y = x/\varepsilon,\\
\boldsymbol{j}^\varepsilon(x) = \boldsymbol{j}^0(x) + \varepsilon\boldsymbol{j}^1(x,y) + \ldots, \qquad y = x/\varepsilon.
\end{gathered}$$

Коэффициенты $f^i(x,y)$ полагаются Y-периодическими по переменной y.

В соответствии с правилом дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{\partial f(x,x/\varepsilon)}{\partial x_i} = \Big(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\partial f(x,y)}{\partial y_i}\Big)\Big|_{y=x/\varepsilon}.$$

В результате вычислений получаем

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \boldsymbol{v}^\varepsilon(x)}{\partial x_j} = \varepsilon^2\sum_{i=0}\varepsilon^i\,\frac{\partial \boldsymbol{v}^i(x,y)}{\partial x_j} + \varepsilon\sum_{i=0}\varepsilon^i\,\frac{\partial \boldsymbol{v}^i(x,y)}{\partial y_j},\\
\operatorname{div}(\eta^\varepsilon D^\varepsilon) = \operatorname{div}_y(\eta^0 D_y^0) + O(\varepsilon), \qquad \eta^0 = \eta(\varphi^0), \qquad 2(D_y^0)_{ij} = \frac{\partial v_i^0}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j^0}{\partial y_i},\\
\frac{\partial \varphi^\varepsilon(x)}{\partial x_j} = \sum_{i=0}\varepsilon^i\Big(\frac{\partial \varphi^i(x,y)}{\partial x_j} + \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\partial \varphi^i(x,y)}{\partial y_j}\Big),\\
\frac{\partial^2 \varphi^\varepsilon(x)}{\partial x_k\,\partial x_j} = \sum_{i=0}\varepsilon^i\Big(\frac{\partial^2 \varphi^i(x,y)}{\partial x_k\,\partial x_j} + \frac{1}{\varepsilon^2}\,\frac{\partial^2 \varphi^i(x,y)}{\partial y_k\,\partial y_j} + \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\partial^2 \varphi^i(x,y)}{\partial x_k\,\partial y_j} + \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\partial^2 \varphi^i(x,y)}{\partial y_k\,\partial x_j}\Big),
\end{gathered} \tag{27}$$

$$\Delta\varphi^\varepsilon(x) = \sum_{i=0}\Big(\varepsilon^i\,\Delta_x\varphi^i(x,y) + \varepsilon^{i-2}\,\Delta_y\varphi^i(x,y) + 2\varepsilon^{i-1}\sum_k \frac{\partial^2\varphi^i(x,y)}{\partial y_k\,\partial x_k}\Big),$$

где $y = x/\varepsilon$. Согласно теории двухмасштабной гомогенизации при подстановке производных в уравнения переменные x, y в правых частях формул (27) считаются независимыми. Например, уравнение (14) принимает вид

$$\sum_{i=0}\varepsilon^i\mu^i(x,y) = \Gamma\omega'(\xi)\big|_{\xi=\sum\limits_{i=0}\varepsilon^i\varphi^i(x,y)} -$$

$$-\,\Lambda\sum_{i=0}\Big(\varepsilon^i\,\Delta_x\varphi^i(x,y) + \varepsilon^{i-2}\,\Delta_y\varphi^i(x,y) + 2\varepsilon^{i-1}\sum_k \frac{\partial^2\varphi^i(x,y)}{\partial y_k\,\partial x_k}\Big). \tag{28}$$

Запишем уравнение (28) следующим образом:

$$\varepsilon^{-2}(\cdots)_{-2} + \varepsilon^{-1}(\cdots)_{-1} + (\cdots)_0 + \ldots = 0, \qquad (\cdots)_{-2} = \Delta_y\varphi^0(x,y). \tag{29}$$

В соответствии с методом асимптотических разложений коэффициенты $f^i(x,y)$ в рядах определяются из уравнений $(\cdots)_k = 0$. В частности, получаем, что в области Y_f

$$\Delta_y\varphi^0(x,y) = 0. \tag{30}$$

Умножая уравнение (30) на φ^0 и интегрируя его по частям по области Y_f, получаем

$$0 = -\int\limits_{Y_f}|\nabla_y\varphi^0|^2\,dy + \int\limits_{\partial Y_f}\varphi^0\,\frac{\partial\varphi^0}{\partial n}\,ds.$$

Из условий периодичности на плоских гранях и граничного условия $\partial\varphi^0/\partial n = 0$ на границе области, занятой жидкостью, следует, что интеграл по границе равен нулю. Поэтому в области Y_f

$$\nabla_y\varphi^0 = 0, \tag{31}$$

т. е. $\varphi^0 = \varphi^0(x)$.

Равенство нулю коэффициента $(\cdots)_0$ в (28) эквивалентно соотношениям

$$\mu^0(x,y) = \Gamma w'(\varphi^0) - \Lambda\Delta_x\varphi^0, \qquad \nabla_y\mu^0 = 0. \tag{32}$$

Для квадратной матрицы A определен вектор $\operatorname{div} A$ с компонентами

$$(\operatorname{div} A)_n = \frac{\partial A_{nj}}{\partial x_j}.$$

В частности, если матрица A задана с помощью тензорного произведения двух векторов $A = \boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}$, $A_{ij} = a_ib_j$, имеем

$$(\operatorname{div}(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}))_n = \frac{\partial\,(a_nb_j)}{\partial x_j}. \tag{33}$$

С использованием формулы (33) находим

$$(\operatorname{div}(\nabla\varphi^\varepsilon\otimes\nabla\varphi^\varepsilon))_n = \frac{\partial\varphi^\varepsilon}{\partial x_n}\,\Delta\varphi^\varepsilon + \frac{\partial\varphi^\varepsilon}{\partial x_j}\,\frac{\partial^2\varphi^\varepsilon}{\partial x_j\,\partial x_n} = \sum_{i=0}\varepsilon^i\Big(\frac{\partial\varphi^i(x,y)}{\partial x_n} + \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\partial\varphi^i(x,y)}{\partial y_n}\Big)\times$$

$$\times\sum_{i=0}\Big(\varepsilon^i\Delta_x\varphi^i(x,y) + \varepsilon^{i-2}\Delta_y\varphi^i(x,y) + 2\varepsilon^{i-1}\sum_k\frac{\partial^2\varphi^i(x,y)}{\partial y_k\,\partial x_k}\Big) +$$

$$+\sum_{j=1}\sum_{i=0}\varepsilon^i\Big(\frac{\partial\varphi^i(x,y)}{\partial x_j}+\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\partial\varphi^i(x,y)}{\partial y_j}\Big)\times$$

$$\times\sum_{i=0}\varepsilon^i\Big(\frac{\partial^2\varphi^i(x,y)}{\partial x_j\,\partial x_n}+\frac{1}{\varepsilon^2}\,\frac{\partial^2\varphi^i(x,y)}{\partial y_j\,\partial y_n}+\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\partial^2\varphi^i(x,y)}{\partial x_j\,\partial y_n}+\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\partial^2\varphi^i(x,y)}{\partial y_j\,\partial x_n}\Big). \qquad (34)$$

В силу (31) имеем представление

$$(\operatorname{div}(\nabla\varphi^\varepsilon\otimes\nabla\varphi^\varepsilon))_n=\frac{\partial\varphi^0}{\partial x_n}\,\Delta_x\varphi^0+\frac{1}{2}\frac{\partial|\nabla_x\varphi^0|^2}{\partial x_n}+O(\varepsilon).$$

Аналогичным образом получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_n}\,|\nabla\varphi^\varepsilon|^2=\frac{\partial\,|\nabla_x\varphi^0|^2}{\partial x_n}+O(\varepsilon).$$

Записывая уравнение (17) в виде

$$(\cdots)_0+O(\varepsilon)=0$$

и требуя выполнения равенства $(\cdots)_0=0$, получаем уравнение

$$\begin{gathered}\frac{\partial p^0}{\partial x_n}+\frac{\partial p^1}{\partial y_n}=\eta^0\,\Delta_y v_n^0(x,y)+\Lambda(\operatorname{div}_x S^0)_n,\\ S^0=\frac{1}{3}\,|\nabla_x\varphi^0|^2\cdot I-\nabla_x\varphi^0\otimes\nabla_x\varphi^0,\end{gathered} \qquad (35)$$

которое справедливо в области Y_f при каждом x. Введем обозначение $\eta^0(x)=\eta(\varphi^0(x))$, тогда уравнение (35) можно записать в виде

$$0=-\nabla_y p^1+\eta^0(x)\,\Delta_y\boldsymbol{v}^0(x,y)+\operatorname{div}_x C^0,\qquad C^0=-p^0\cdot I+\Lambda S^0. \qquad (36)$$

Для осреднения по переменной y используем следующее обозначение:

$$\tilde{\boldsymbol{v}}(x)=\frac{1}{|Y|}\int\limits_{Y_f}\boldsymbol{v}^0(x,y)\,dy,$$

для Y-периодических вектор-функций введем пространство Соболева

$$V_Y=\{\boldsymbol{v}\colon\boldsymbol{v}\in H^1(Y_f),\quad \operatorname{div}\boldsymbol{v}=0,\quad \boldsymbol{v}\big|_{\partial Y_f}=0\}.$$

Скалярное произведение определяется следующим образом:

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})_{V_Y}=\int\limits_{Y_f}\frac{\partial u_i}{\partial y_k}\,\frac{\partial w_i}{\partial y_k}\,dy.$$

Из (18) следует

$$0=\operatorname{div}\boldsymbol{v}^\varepsilon=\varepsilon^{-1}\operatorname{div}_y\boldsymbol{v}^0+\operatorname{div}_x\boldsymbol{v}^0+\operatorname{div}_y\boldsymbol{v}^1+O(\varepsilon),$$

тогда

$$\operatorname{div}_y\boldsymbol{v}^0=0,\qquad \operatorname{div}_x\boldsymbol{v}^0+\operatorname{div}_y\boldsymbol{v}^1=0. \qquad (37)$$

Для произвольной функции $\boldsymbol{\psi}\in V_Y$ справедливо равенство

$$\int\limits_{Y_f}\nabla_y p^1\cdot\boldsymbol{\psi}\,dy=\int\limits_{\partial Y_f}p^1\boldsymbol{\psi}\cdot\boldsymbol{n}\,ds-\int\limits_{Y_f}p^1\operatorname{div}_y\boldsymbol{\psi}\,dy=0.$$

Тогда, умножая уравнение (36) на $\boldsymbol{\psi}(y)$ и интегрируя его по Y_f, получаем соотношение

$$\eta^0(\boldsymbol{v}^0, \boldsymbol{\psi})_{V_Y} = \operatorname{div}_x C^0(x) \int\limits_{Y_f} \boldsymbol{\psi}\, dy \equiv \int\limits_{Y_f} \psi_i(y) \frac{\partial C^0_{ij}(x)}{\partial x_j}\, dy, \qquad \boldsymbol{\psi} = \psi_i \boldsymbol{e}^i,$$

где $\boldsymbol{e}^i$ — единичный вектор оси x_i.

В случае если $\boldsymbol{v}^0(x,y)$ искать в виде

$$\boldsymbol{v}^0(x,y) = \boldsymbol{w}^j(x,y) \frac{\partial C^0_{jk}(x)}{\partial x_k}, \tag{38}$$

то оказывается, что при каждом $x \in \Omega$ функция $\boldsymbol{w}(x,y)$ принадлежит пространству V_Y и является Y-периодическим решением задачи

$$\eta^0(x)(\boldsymbol{w}^j, \boldsymbol{\psi})_{V_Y} = \int\limits_{Y_f} \psi_j(y)\, dy \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in V_Y, \quad \int\limits_{Y_f} \boldsymbol{w}^j\, dy = 0.$$

Это означает, что $\boldsymbol{w}(x,y)$ представляет собой слабое решение задачи

$$\Delta_y \boldsymbol{w}^j - \nabla_y q^j = -\boldsymbol{e}^j/\eta^0, \quad \operatorname{div}_y \boldsymbol{w}^j = 0, \quad \boldsymbol{w}^j|_{y \in \partial Y_f} = 0.$$

Умножая уравнение (38) скалярно на вектор $\boldsymbol{e}^i$ и интегрируя его по области Y_f, получаем равенство

$$\tilde{v}_i = K_{ij}(x) \frac{\partial C^0_{jk}(x)}{\partial x_k}$$

или

$$\tilde{\boldsymbol{v}}(x) = K(x) \cdot \operatorname{div}_x C^0, \qquad K_{ij} = \int\limits_{Y_f} \boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{w}^j\, dy,$$

которое можно записать следующим образом:

$$\begin{gathered} \tilde{\boldsymbol{v}}(x) = -K(x) \cdot \nabla_x p^0 + \Lambda K(x) \operatorname{div}_x\, S^0(x), \\ S^0 = (1/3)\, |\nabla_x \varphi^0|^2 \cdot I - \nabla_x \varphi^0 \otimes \nabla_x \varphi^0 \end{gathered} \tag{39}$$

(K — тензор мобильности Дарси, т. е. проницаемость, деленная на динамическую вязкость). Уравнение (39) представим в координатном виде

$$\tilde{v}_i(x) = -K_{ij} \frac{\partial p^0}{\partial x_j} + \Lambda K_{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} \Big(\frac{1}{3} \delta_{jk} |\nabla_x \varphi^0|^2 - \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k} \Big).$$

Интегрируя уравнение (37) по Y_f, получаем условие несжимаемости

$$\operatorname{div}_x \tilde{\boldsymbol{v}} = 0.$$

Подставляя асимптотические ряды в уравнение (16) и учитывая коэффициенты при степенях ε^{-1} и ε^0, получаем

$$\operatorname{div}_y \boldsymbol{j}^0 = 0, \qquad R \frac{\partial \varphi^0}{\partial t} + \operatorname{div}_x \boldsymbol{j}^0 + \operatorname{div}_y \boldsymbol{j}^1 = 0. \tag{40}$$

После интегрирования по области Y_f уравнение (40) принимает вид

$$R \frac{\partial \varphi^0}{\partial t} + \operatorname{div}_x \tilde{\boldsymbol{j}} = 0. \tag{41}$$

Подставляя в уравнение (15) ряды и учитывая коэффициенты при степенях ε^{-1} и ε^0, получаем соотношения

$$\nabla_y \mu^0 = 0, \qquad \boldsymbol{j}^0 = -B(\nabla_x \mu^0 + \nabla_y \mu^1),$$

интегрирование которых по Y_f приводит к закону Фика

$$\tilde{\boldsymbol{j}} = -B\nabla_x \mu^0. \tag{42}$$

При выводе уравнения (42) использовались Y-периодичность функции μ^1 и граничное условие

$$\mu^1\big|_{\partial Y_f} = 0.$$

Таким образом, из (32), (41) следует система уравнений фильтрации двухкомпонентной смешиваемой жидкости

$$\begin{gathered} \tilde{\boldsymbol{v}} = -K\,\nabla_x p^0 + \Lambda K \operatorname{div}_x\big((1/3)\,|\nabla_x \varphi^0|^2 \cdot I - \nabla_x \varphi^0 \otimes \nabla_x \varphi^0\big), \quad \operatorname{div}_x \tilde{\boldsymbol{v}} = 0, \\ R\,\frac{\partial \varphi^0}{\partial t} = \operatorname{div}_x(B\nabla_x \mu^0), \qquad \mu^0(x) = \Gamma w'(\varphi^0) - \Lambda \Delta_x \varphi^0. \end{gathered} \tag{43}$$

Заметим, что уравнения (43) для неизвестных $\tilde{\boldsymbol{v}}$, p, φ^0, μ^0 выполняются не в перфорированной области Ω_f^ε, а во всей области Ω.

Заключение. С использованием уравнений Навье — Стокса и Кана — Хиллиарда исследованы течения двухкомпонентной смешиваемой жидкости в перфорированной области. Для случая сильной смешиваемости путем двухмасштабной гомогенизации получены уравнения фильтрации. Для такого случая установлено, что масштабы разделяются, т. е. поле скорости и другие параметры течения зависят лишь от макропеременных и не зависят от микропеременных.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бахвалов Н. С.** Осредненные характеристики тел с периодической структурой // Докл. АН СССР. 1974. Т. 218, № 5. С. 1046–1048.
2. **Санчес-Паленсия Э.** Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
3. **Banas L., Mahato H. S.** Homogenization of evolutionary Stokes — Cahn — Hilliard equations for two-phase porous media flow // Asymptotic Anal. 2017. V. 105, N 1/2. P. 77–95.
4. **Ландау Л. Д.** Теоретическая физика: В 10 т. Т. 6. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1986.
5. **Старовойтов В. Н.** Модель движения двухкомпонентной жидкости с учетом капиллярных сил // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 85–92.
6. **Metzger S., Knabner P.** Homogenization of two-phase flow in porous media from pore to Darcy scale: A phase-field approach // Multiscale Model. Simulat. 2021. V. 19, N 1. P. 320–343.

Поступила в редакцию 11/V 2021 г.,
после доработки — 11/V 2021 г.
Принята к публикации 31/V 2021 г.