

7. Briggs L. I. Limiting negative pressure of water.—*J. of Appl. Phys.*, 1950, vol. 21, N 7.
8. Гаврилов Л. Р. Содержание свободного газа в жидкостях и методы его измерения.— В кн.: Физика и техника мощного ультразвука, физические основы ультразвуковой технологии. Ч. IV, 1970.
9. Се Дин-ю. Рост пузырька в вязкой жидкости, вызванный кратковременным импульсом.—«Теоретические основы инженерных расчетов», 1970, № 4.
10. Перссон Б. О границах пороговой величины падения давления, вызывающего рост пузырей.—«Теоретические основы инженерных расчетов», 1973, № 1.
11. Кедринский В. К. Распространение возмущений в жидкости, содержащей пузырьки газа.— ПМТФ, 1968, № 4.
12. Nantel L. W., Davis W. S. Spherical explosions in water.— In: Fifth Symposium on Detonation. Pasadena, California, August 18—21, 1970.
13. Иорданский С. В. Об уравнениях движения жидкости, содержащей пузырьки газа.— ПМТФ, 1960, № 3.
14. Когарко Б. С. Об одной модели кавитирующей жидкости.—«Докл. АН СССР», 1961, т. 137, № 6.
15. L. van Wijngaarden. On the equation of motion for mixtures of gasbubbles in liquid.—*J. of Fluid Mech.*, 1968, vol. 33, N 3. p. 465.
16. Христофоров Б. Д. Параметры ударной волны и газового пузыря при подводном взрыве зарядов из ТЭНа малого веса.— ПМТФ, 1960, № 2.

УДК 532.5.517

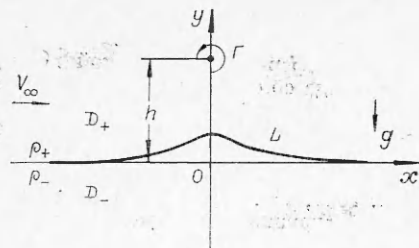
ДВИЖЕНИЕ ВИХРЯ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ДВУХ ТЯЖЕЛЫХ ЖИДКОСТЕЙ

В. В. Головченко
(Новосибирск)

Задача о движении вихря под поверхностью тяжелой жидкости рассмотрена как в линейной [1, 2], так и в нелинейной постановке [3—5]. При этом пренебрегается плотностью верхней среды, что позволяет условие непрерывности давления при переходе через линию раздела сред заменить условием постоянства давления на границе тяжелой жидкости. В данной работе задача решается в общей нелинейной постановке с учетом взаимного влияния движения сред, а вихрь может находиться как в верхней, так и в нижней среде.

Рассмотрено установившееся движение вихря заданной интенсивности вблизи линии раздела двух тяжелых жидкостей в рамках модели идеальной и несжимаемой среды. Получены приближенные выражения для линии раздела.

В плоскости комплексного переменного $z=x+iy$ рассмотрим установившееся движение среды, состоящей из двух идеальных несжимаемых жидкостей с плотностями ρ_+ и ρ_- , в поле силы тяжести с потенциалом gy .



Фиг. 1

Пусть среда в бесконечно удаленной точке движется вдоль оси x со скоростью v_∞ , а в точке $z=ih$ расположен вихрь с интенсивностью Γ (фиг. 1).

Обозначим через D_+ , D_- области течения жидкостей с плотностями ρ_+ , ρ_- соответственно, а комплексные скорости жидкости в этих областях — u_+ , u_- . Предположим, что жидкость с меньшей плотностью ($\rho_+ < \rho_-$) рас-

положена над линией раздела L , уравнение которой в параметрической форме имеет вид

$$z=f(\zeta) \quad (\zeta=e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

При сделанных предположениях задача сводится к определению функции $\bar{u}_-(z)$, аналитической всюду в области D_- , функции $\bar{u}_+(z)$, аналитической в \bar{D}_+ за исключением точки $z=ih$, где она имеет полюс первого порядка, и формы линии раздела $z=f(\zeta)$ при следующих условиях:

$$(1) \quad \operatorname{Im} [i\bar{u}_\pm(f(\zeta)) f'(\zeta) \zeta] = 0;$$

$$(2) \quad \operatorname{Im}(z) - \frac{\operatorname{Fr}}{2} = -\frac{\operatorname{Fr}}{2} [|u_-(z)|^2 + \varepsilon (|u_-(z)|^2 - |u_+(z)|^2)], \quad z=f(\zeta);$$

$$(3) \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} u_\pm(z) = 1,$$

где

$$\operatorname{Fr} = v_\infty^2/gb; \quad \varepsilon = \rho_+ / (\rho_- - \rho_+).$$

Условия (1) — (3) представляют собой условия кинематической совместности течений, непрерывности давления при переходе через линию раздела сред и затухания возмущенных скоростей в бесконечно удаленной точке соответственно.

Рассматриваемую нелинейную задачу, содержащую три неизвестные функции $\bar{u}_+(z)$, $\bar{u}_-(z)$ и $f(\zeta)$, сведем к задаче для одной искомой функции.

Пусть функция $f(w)$ конформно отображает внутренность круга $|w| < 1$ на область D_+ , так что точка $w=i$ переходит в бесконечно удаленную точку, а точка $w=0$ — в точку $z=ih$. Функция $q(\psi)$ конформно отображает внутренность круга $|\psi| < 1$ на область \bar{D}_- , причем точка $\psi=i$ переходит в бесконечно удаленную точку, а точка $\psi=0$ — в точку $z=-ih$. Введем аналитическую внутри круга $|w| < 1$ функцию $q_1(w)$ таким образом, что

$$|q_1(\zeta)|=1, \quad |\zeta|=1, \quad f(\zeta)=q(q_1(\zeta)), \quad |\zeta|=1.$$

Рассмотрим функции

$$(4) \quad G_+(w) = \bar{u}_+(f(w))f'(w); \quad G_-(w) = \bar{u}_-(q(w))f'(w).$$

В соответствии с особенностями функций $\bar{u}_+(z)$, $\bar{u}_-(z)$ и $f(w)$ функция $G_+(w)$ должна иметь полюс первого порядка в точке $w=0$ и полюс второго порядка в точке $w=i$, а функция $G_-(w)$ должна быть аналитической всюду внутри круга $|w| < 1$ и иметь полюс второго порядка в точке $w=i$. Условия (1) для этих функций будут иметь вид

$$(5) \quad \operatorname{Re}[G_\pm(\zeta) \cdot \zeta] = 0, \quad |\zeta|=1.$$

Учитывая особенности функций $G_+(w)$, $G_-(w)$ и условия (3), (5), запишем их следующим образом:

$$(6) \quad G_+(w) = \frac{a_2}{(w-i)^2} - \frac{ia_1}{w}; \quad G_-(w) = \frac{a_2}{(w-i)^2},$$

где a_1, a_2 — произвольные вещественные числа. Условие непрерывности давления (2) позволяет получить уравнение для определения отображающей функции

$$(7) \quad \left(\operatorname{Im}(f)' - \frac{\operatorname{Fr}}{2} \right) |f'|^2 = -\frac{\operatorname{Fr}}{2} [|G_-|^2 + \varepsilon (|G_-|^2 - |G_+|^2)].$$

Таким образом, исходная задача сведена к отысканию решения уравнения (7) для функции $f(w)$ и к определению постоянных a_1, a_2 .

Будем искать функцию $f(w)$ в виде

$$(8) \quad f(w) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(w) \varepsilon^k.$$

Тогда, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε , для определения функций $f_k(w)$ ($k=0, 1, \dots$) получим следующие рекуррентные соотношения:

$$(9) \quad \left(\operatorname{Im}(f_0) - \frac{\operatorname{Fr}}{2} \right) |f_0'|^2 = -\frac{\operatorname{Fr}}{2} |G_-|^2;$$

$$(10) \quad |f_0'|^2 \operatorname{Im}(f_1) + g_1 \operatorname{Im}(f_0) = -\frac{\operatorname{Fr}}{2} (|G_-|^2 - |G_+|^2);$$

$$|f_0'|^2 \operatorname{Im}(f_k) = -\sum_{p=1}^k g_p \operatorname{Im}(f_{k-p}), \quad k = 2, 3, \dots,$$

где

$$g_p = \sum_{s=0}^p f_s' \bar{f}_{p-s}, \quad p = 0, 1, \dots$$

Не останавливаясь подробно на вопросе о сходимости ряда (8), заметим, что для таких сред как воздух — вода параметр ε очень мал ($\varepsilon \sim 10^{-3}$). Поэтому ограничимся первыми двумя членами f_0, f_1 в разложении (8), предполагая, что модули функций f_k растут не слишком быстро с ростом k .

Пользуясь условием (3) и тем, что точка $w=i$ переходит в бесконечно удаленную точку, а точка $w=0$ — в точку $z=ih$, решение уравнений (9), (10) получим в виде

$$(11) \quad f(w) = -\frac{c}{w-i} - ih + 2iv \left(\frac{3}{4} a + 1 \right) - v(a+1)w - i \frac{va}{4} w^2,$$

где

$$(12) \quad v = \varepsilon \operatorname{Fr} a_1/h; \quad a = a_1/h; \quad c = -2h + 2v \left(\frac{3}{4} a + 1 \right).$$

Зная отображающую функцию $f(w)$, из формул (4), (6) найдем скорость жидкости в области D_+

$$\bar{u}_+(z) = 1 + \frac{a_1}{i(z-ih)} - \frac{a_1}{i(z+ih)} + v \left[-\frac{h \left(\frac{3}{2} a^2 + 3a + 2 \right)}{(z+ih)^2} - \frac{3ih^2a(a+2)}{(z+ih)^3} + \frac{2h^3a^2}{(z+ih)^4} \right].$$

Здесь первые три члена определяют скорость жидкости при движении вихря с интенсивностью $\Gamma=2\pi a_1$ вблизи экрана, а остальные учитывают изменение формы линии раздела.

Проведя аналогичные рассуждения, покажем, что функция $q(\psi)$ имеет вид

$$(13) \quad q(\psi) = -\frac{d}{\psi-i} + ih + 2iv \left(\frac{3}{4} a + 1 \right) - v(a+1)\psi - i \frac{va}{4} \psi^2,$$

где

$$d = 2h + 2v \left(\frac{3}{4} a + 1 \right),$$

а скорость жидкости в области D_-

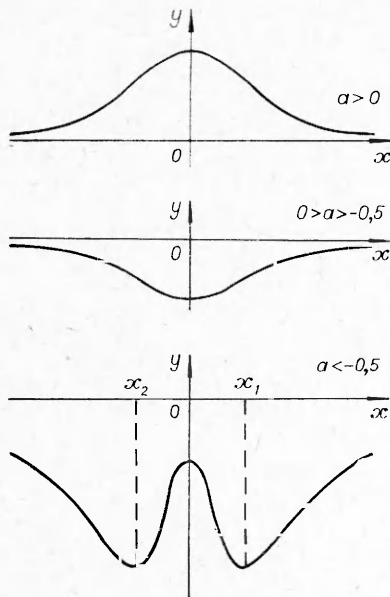
$$\bar{u}_-(z) = 1 + v \left[\frac{(2+a)h}{(z-ih)^2} - \frac{2iah^2}{(z-ih)^4} \right].$$

Пользуясь формулами (11) или (13), уравнение линии раздела жидкостей можно записать как

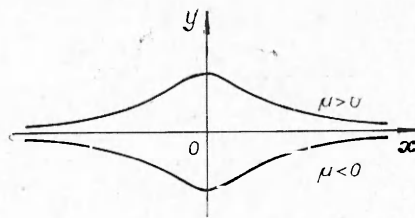
$$y = \frac{2vh^2}{x^2 + h^2} \left(1 + \frac{ah^2}{x^2 + h^2} \right),$$

где a, v определяются формулами (12), в которых $a_1 = \Gamma/(2\pi)$.

Изменение формы линии L в зависимости от параметра a , характеризующего интенсивность вихря и его близость к линии раздела, показано на фиг. 2. При $a > 0$ вихрь увеличивает скорость движения верхней жидкости вблизи границы раздела, что приводит к уменьшению давления на нижней жидкость и к ее подъему. При $-0,5 < a < 0$ вихрь затормаживает движение верхней жидкости вблизи границы раздела, вследствие чего жидкость непосредственно под вихрем опускается. Резкое изменение формы линии L при $a < -0,5$, а именно появление двух точек минимума $x_{1,2} = \pm h \sqrt{-2a-1}$, значение функции в которых не ме-



Фиг. 2



Фиг. 3

няется ($y(x_{1,2}) = -\text{Fr} \cdot \varepsilon/2$) с уменьшением параметра a , вызвано возникновением двух критических точек на линии раздела жидкостей

$$\zeta_{1,2} = i \left(1 - \frac{a_2}{2a_1} \right) \pm \sqrt{\frac{a_2}{2a_1} \left(2 - \frac{a_2}{2a_1} \right)}.$$

Пусть теперь вихрь находится в более плотной жидкости (в точке $z = -ih$). Тогда функции $G_+(w)$, $G_-(w)$ поменяются местами

$$G_+(w) = \frac{a_2}{(w-i)^2}; \quad G_-(w) = \frac{a_2}{(w-i)^2} - \frac{ia_1}{w},$$

однако уравнение (9) не будет иметь такого простого решения, как в предыдущем случае. Если же представить отображающую функцию в виде ряда по степеням a ($|a| \ll 1$)

$$f(w) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(w) a^k,$$

то для определения функций $f_0(w)$, $f_1(w)$ получим уравнения, аналогичные (9), (10), решая которые, найдем

$$f(w) = -\frac{c}{w-i} + ih + i\mu - \frac{\mu}{2} w.$$

Здесь $\mu = 2Fr(1 + \varepsilon)a_1/h$, $c = 2h + \mu$.

В этом случае скорость жидкости в области D_- имеет вид

$$\bar{u}_-(z) = 1 + \frac{a_1^2}{i(z+ih)} - \frac{a_1}{i(z-ih)} - \frac{\mu(a_1+h)}{(z-ih)^2} + \frac{2\mu i h a_1}{(z-ih)^3},$$

а отображающая функция $q(\psi)$ и скорость жидкости в области D_+ будут соответственно

$$q(\psi) = \frac{2h - \mu}{i\psi - i} - ih + i\mu - \frac{\mu}{2}\psi;$$

$$\bar{u}_+(z) = 1 - \frac{\mu h}{(z+ih)^2}.$$

Линия разрыва плотности жидкости имеет форму уединенной волны, выпуклость которой зависит от знака циркуляции (фиг. 3)

$$y = \frac{\mu h^2}{x^2 + h^2}.$$

Поступила 20 II 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М. В. Замечания о некоторых движениях тяжелой жидкости. — «Технические заметки ЦАГИ», 1935, вып. 52.
2. Кочин Н. Е. О волновом сопротивлении погруженных в жидкость тел. Соч. т. II. М., Изд-во АН СССР, 1949.
3. Некрасов А. И. О точечном вихре под поверхностью тяжелой идеальной жидкости в плоскопараллельном потоке. Соч. т. II. М., Изд-во АН СССР, 1962.
4. Тер-Крикоров А. М. Точное решение задачи о движении вихря под поверхностью жидкости. — «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1958, т. 22, вып. 2.
5. Филиппов И. Г. О движении вихря под поверхностью жидкости. — ПММ, 1961, т. 25, вып. 2.

УДК 539.374

О СХОДЯЩЕЙСЯ УДАРНОЙ ВОЛНЕ В ИДЕАЛЬНО НЕУПРУГОЙ СРЕДЕ И УСТОЙЧИВОСТИ КУМУЛЯЦИИ

И. В. Симонов

(Москва)

Явление фокусировки ударных волн привлекало внимание многих авторов (обзор этих работ содержится в [1]). Исследованию в основном подвергался автомодельный режим схождения ударной волны. Поскольку сама задача фокусировки достаточно сложна, вопрос устойчивости этого явления изучен слабо. В поле нашего зрения имеется только одна работа [2] по устойчивости сходящейся ударной волны, в которой используется приближенный подход.

В предлагаемой работе рассматривается краевая задача о сходящейся ударной волне в цилиндре и сфере, а также эволюция малых неоднородных возмущений при движении этой волны к центру в идеально неупругой среде, материал которой испытывает постоянное уплотнение на фронте ударной волны, не зависящее от амплитуды волны. Подобная схема использовалась при расчете движения расходящейся ударной волны [3]. Она моделирует поведение некото-