

2. Long R.R. Blocking effects in flow over obstacles // *Tellus*. — 1970. — V. 22. — P. 471—480.
3. Baines P.G. A unified description of two-layer flow over topography // *J. Fluid Mech.* — 1984. — V. 146. — P. 127—167.
4. Baines P.G. A general method for determining upstream effects in stratified flow of finite depth over long two-dimensional obstacles // *J. Fluid Mech.* — 1988. — V. 188. — P. 1—22.
5. Houghton D.D., Isaacson E. Mountain winds // *Stud. Numer. Anal.* — 1970. — V. 2. — P. 21—52.
6. Baines P.G. Upstream blocking and airflow over mountains // *Annual Rev. Fluid Mech.* — 1987. — V. 19. — P. 75—97.
7. Armi L. The hydraulics of two flowing layers with different densities // *J. Fluid Mech.* — 1986. — V. 163. — P. 27—58.
8. Овсянников Л.В. Модели двухслойной “мелкой воды” // *ПМТФ*. — 1979. — № 2. — С. 3—14.
9. Yih C.S., Guha C.R. Hydraulic jump in a fluid system of two layers // *Tellus*. — 1955. — V. 7. — P. 358—366.
10. Chu V.H., Baddour R.E. Turbulent gravity-stratified shear flows // *J. Fluid Mech.* — 1984. — V. 138. — P. 353—378.
11. Ляпидевский В.Ю. Модель двухслойной мелкой воды с нерегулярной границей раздела // *Лабораторное моделирование динамических процессов в океане*. — Новосибирск: ИТ СО РАН, 1991. — С. 87—97.
12. Ляпидевский В.Ю. Задача о распаде разрыва для уравнений двухслойной мелкой воды // *Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики*. — 1981. — Вып. 50. — С. 85—97.
13. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложение к газовой динамике. — М.: Наука, 1978.

г. Новосибирск

Поступила 17/VI 1993 г.

УДК 532.59

И.В. Стурова

ВЛИЯНИЕ АНОМАЛЬНЫХ ДИСПЕРСИОННЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ НА РАССЕЯНИЕ И ГЕНЕРАЦИЮ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

Устойчивая стратификация жидкости, соответствующая увеличению плотности по направлению силы тяжести, обуславливает существование внутренних волн. Волны малой амплитуды описываются линейной теорией внутренних волн, основы которой подробно изложены, например, в [1]. В покоящейся горизонтально-однородной жидкости существует счетное число свободных гармонических волновых мод в том случае, когда непрерывное изменение плотности имеет место только на конечном интервале глубин. Каждой волновой моде отвечает своя дисперсионная зависимость частоты волны от волнового числа, которая позволяет определить фазовую и групповую скорости данной волны. Распределениями плотности с нормальными дисперсионными характеристиками будем считать такие, для которых каждая волновая мода имеет групповую скорость, монотонно убывающую с ростом волнового числа. В противном случае, когда наряду с максимальным значением групповой скорости для длинных внутренних волн появляются локальные максимумы при ненулевых значениях волновых чисел, дисперсионные зависимости назовем аномальными.

Исследование характера распределений плотности, при которых возможны аномальные дисперсионные зависимости, представлено в [2]. Показано, в частности, что аномальные дисперсионные зависимости могут возникать для таких распределений плотности, в которых существует, по крайней мере, один участок волновода с частотой плавучести, отличной от максимальной и

© И.В. Стурова, 1994

от нуля и медленно меняющейся на длине волны соответствующих ей собственных вертикальных стоячих колебаний. Одним из примеров жидкости с аномальными дисперсионными свойствами может служить трехслойная жидкость с линейно стратифицированными верхним и средним слоями и однородным нижним слоем бесконечной глубины.

Предполагается, что невязкая несжимаемая жидкость занимает область $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < H$ (x — горизонтальная, y — вертикальная координаты). В невозмущенном состоянии распределение плотности

$$\rho(y) = \begin{cases} \rho_1 [1 - \alpha_1(y - H)] & (H_2 < y < H), \\ \rho_1(1 + \alpha_1 H_1) [1 - \alpha_2(y - H_2)] & (0 < y < H_2), \\ \rho_2 = \rho_1(1 + \alpha_1 H_1)(1 + \alpha_2 H_2) & (y < 0) \end{cases}$$

(H_1 и H_2 — толщины верхнего и среднего слоев, $H = H_1 + H_2$). Для определенности положим $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$, т.е. градиент плотности максимален в среднем слое.

В данной работе изучено рассеяние внутренней волны, набегающей на твердый горизонтальный эллиптический цилиндр, и определено волновое сопротивление при обтекании такого тела равномерным потоком. Ось цилиндра параллельна фронту набегающей волны и перпендикулярна скорости набегающего потока, так что рассматриваемые задачи являются двумерными. Для простоты считается, что цилиндр полностью погружен в нижнем слое, течение в котором рассматривается потенциальным, и верхний слой ограничен твердой крышкой. Уравнения для внутренних волн используются в приближении Буссинеска. В обеих задачах предполагается, что тело достаточно глубоко погружено под границу раздела между средним и нижним слоями. Сопоставлены характеристики волнового движения в жидкостях с нормальными и аномальными дисперсионными свойствами.

1. В дифракционной задаче уравнения волнового движения в верхнем и среднем слоях для вертикальной скорости $v(x, y, t)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \partial^2 \Delta v_1 / \partial t^2 + N_1^2 \partial^2 v_1 / \partial x^2 &= 0 & (H_2 < y < H), \\ \partial^2 \Delta v_2 / \partial t^2 + N_2^2 \partial^2 v_2 / \partial x^2 &= 0 & (0 < y < H_2), \end{aligned}$$

где индексы 1 и 2 относятся соответственно к верхнему и среднему слоям; $N_{1,2} = \sqrt{g\alpha_{1,2}}$; g — ускорение силы тяжести; t — время. В нижнем однородном слое полный потенциал скоростей $\varphi(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению

$$(1.1) \quad \Delta \varphi = 0 \quad (y < 0).$$

Граничные условия следующие:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} v_1 &= 0 & (y = H), \\ v_1 &= v_2, \quad \partial v_1 / \partial y = \partial v_2 / \partial y & (y = H_2), \\ v_2 &= \partial \varphi / \partial y, \quad \partial v_2 / \partial y = \partial^2 \varphi / \partial y^2 & (y = 0), \\ \partial \varphi / \partial y &\rightarrow 0 & (y \rightarrow -\infty). \end{aligned}$$

Из теории линейных внутренних волн [1] известно, что в такой жидкости возможно существование свободных внутренних волн только с частотой $\omega < N_2$. Падающей слева волной может быть любая внутренняя мода с вертикальной скоростью

$$v = \operatorname{Re} W(y) \exp[i(kx - \omega t)].$$

Волновое число k удовлетворяет дисперсионному соотношению

$$(1.3) \quad \operatorname{tg} \gamma_2 H_2 = \gamma_2 \cdot \begin{cases} \frac{\gamma_1 + k \operatorname{tg} \gamma_1 H_1}{\gamma_2^2 \operatorname{tg} \gamma_1 H_1 - k \gamma_1} & (\omega < N_1), \\ \frac{\beta_1 + k \operatorname{th} \beta_1 H_1}{\gamma_2^2 \operatorname{th} \beta_1 H_1 - k \beta_1} & (\omega > N_1) \end{cases}$$

($\beta_1 = k\sqrt{1 - N_1^2/\omega^2}$, $\gamma_{1,2} = k\sqrt{N_{1,2}^2/\omega^2 - 1}$). Имеется счетное число значений k ($k_1 < k_2 < \dots$), удовлетворяющих данному дисперсионному соотношению. Собственные функции $W(y, k_j)$ волновых мод представим в виде

$$W(y, k) = \frac{k}{\gamma_2} \cdot \begin{cases} (k\sin\gamma_2 H_2 + \gamma_2 \cos\gamma_2 H_2)A(k, y) & (H_2 < y < H), \\ k\sin\gamma_2 y + \gamma_2 \cos\gamma_2 y & (0 < y < H_2), \\ \gamma_2 e^{\gamma_2 y} & (y < 0), \end{cases}$$

где

$$A(k, y) = \begin{cases} \sin\gamma_1(H - y)/\sin\gamma_1 H_1 & (\omega < N_1), \\ \text{sh}\beta_1(H - y)/\text{sh}\beta_1 H_1 & (\omega > N_1). \end{cases}$$

Собственные функции являются ортогональными:

$$N_1^2 \int_{H_2}^H W(y, k_j)W(y, k_m)dy + N_2^2 \int_0^{H_2} \overline{W}(y, k_j)\overline{W}(y, k_m)d\overline{y} = \begin{cases} c_j^2 & (m = j), \\ 0 & (m \neq j). \end{cases}$$

Величину c_j можно рассматривать как энергетическую характеристику данной внутренней моды. В дальнейшем параметры рассеянных волн определяются в этой энергетической норме.

Потенциал возмущенного движения в нижнем слое представим как

$$\varphi = \text{Re}(\Phi_0 + \Psi)\exp(i\omega t).$$

Здесь потенциал падающей волны $\Phi_0(x, y)$ имеет вид

$$\Phi_0 = c_j \varphi_0, \quad \varphi_0 = \exp[k_j(y - ix)],$$

а дифракционный потенциал $\Psi(x, y)$ удовлетворяет условию непротекания на поверхности цилиндра L

$$\partial\Psi/\partial n = -\partial\Phi_0/\partial n \quad (x, y \in L)$$

($\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ — внутренняя нормаль к поверхности тела). В дальнем поле должны быть выполнены условия излучения, означающие, что при рассеянии образуются только волны, уходящие от тела.

Анализ данной задачи удобно проводить с помощью функции Грина (подробнее см. [3]). Функция Грина в нижнем слое $G(x, y, \xi, \eta)$ имеет вид

$$(1.4) \quad G = \ln(r_1) + 2 \text{pv} \int_0^\infty e^{k(y+\eta)} \cos k(x - \xi) D(k) dk - \\ - 2i\pi \sum_{j=1}^\infty P_j e^{k_j(y+\eta)} \cos k_j(x - \xi),$$

где

$$D(k) = \begin{cases} T(k, \gamma_1, \gamma_2) & (\omega < N_1), \\ T(k, i\beta_1, \gamma_2) & (\omega > N_1); \end{cases} \quad T(k, \gamma_1, \gamma_2) = \frac{T_1(\gamma_1, \gamma_2)}{T_2(k, \gamma_1, \gamma_2)};$$

$$T_1(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma_2 \text{tg}\gamma_1 H_1 + \gamma_1 \text{tg}\gamma_2 H_2;$$

$$T_2(k, \gamma_1, \gamma_2) = kT_1(\gamma_1, \gamma_2) + \gamma_2(\gamma_1 - \gamma_2 \text{tg}\gamma_1 H_1 \text{tg}\gamma_2 H_2);$$

$$P_j = (T_1/T_2)'|_{k=k_j};$$

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2; \quad r_1^2 = (x - \xi)^2 + (y + \eta)^2;$$

символы pv обозначают интеграл в смысле главного значения; штрих — дифференцирование по k .

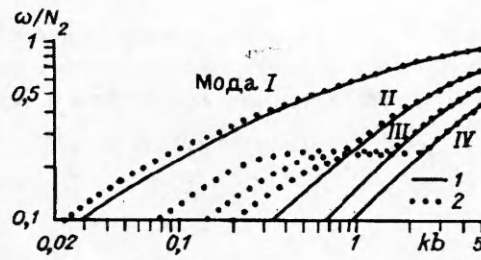


Рис. 1

Из анализа поведения G при $|x| \rightarrow \infty$ видно, что для жидкости с непрерывной стратификацией каждая набегающая мода рассеивается в бесконечное число мод. В результате решения дифракционной задачи можно определить матрицы рассеяния вперед (+) и назад (-) $\|Z_m^\pm\|$, в которых для каждого элемента номер строки j отвечает номеру падающей моды, а номер столбца m — номеру рассеянной внутренней волны:

$$Z_{jm}^\pm = a_{jm}^\pm c_m / c_j.$$

Здесь

$$a_{jm}^\pm = -iP_m V^\pm(k_m, k_j);$$

$$V^\pm(k, k_j) = \int_L e^{k(\eta \pm iz)} \left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial n} + \frac{k_s}{c_s} (n_\eta \pm in_z) \Psi \right] dl.$$

Комплексные значения Z_{jj}^+ и Z_{jj}^- являются соответственно коэффициентами прохождения и отражения j -й внутренней моды.

В приближении глубоко погруженного тела дифракционный потенциал определяется для безграничной однородной жидкости без учета стратификации. При этом удовлетворяются условия непротекания на контуре тела и затухания вдали от него. Применение этого метода для двухслойной жидкости и сопоставление приближенного решения с численным решением полной задачи представлены в [3].

Для эллиптического контура, заданного уравнением

$$x^2/a^2 + (y+h)^2/b^2 = 1$$

(a и b — большая и малая полуоси, h — глубина погружения центра эллипса), выражения V^\pm в приближенном решении имеют вид

$$V^+(k, k_j) = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{a+b}{a-b} \right)^n J_n(kc) J_n(k_s c),$$

$$V^-(k, k_s) = \frac{2\pi c k k_s}{k + k_s} [J_1(kc) J_0(k_s c) + J_0(kc) J_1(k_s c)],$$

где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$; J_n — функции Бесселя первого рода порядка n .

В частном случае кругового цилиндра радиуса b

$$V^+(k, k_j) = 4\pi b \sqrt{k k_s} I_1(2b \sqrt{k k_s}), \quad V^-(k, k_s) = 0$$

(I_1 — модифицированная функция Бесселя первого порядка). Отметим, что для кругового цилиндра, помещенного в слое жидкости бесконечной глубины, всегда отсутствуют волны, рассеянные назад.

Численные расчеты выполнены при $H_1/b = 1$, $H_2/b = 20$ для двух случаев стратификации: 1) $N_1 = 0$, 2) $\varepsilon = N_1/N_2 = 0,25$. Дисперсионные кривые для первых четырех мод представлены на рис. 1 кривыми 1, 2. В случае 1 стратифицированная жидкость обладает лишь одним волноводным слоем с постоянным значением частоты плавучести. В случае 2 имеется значительный по толщине верхний слой жидкости с частотой плавучести,

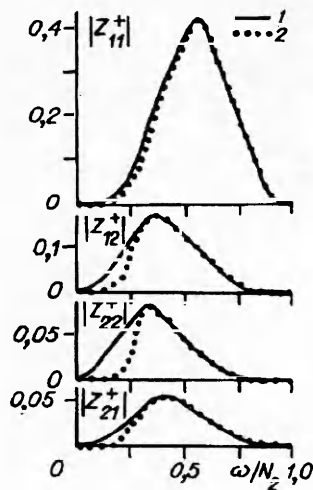


Рис. 2

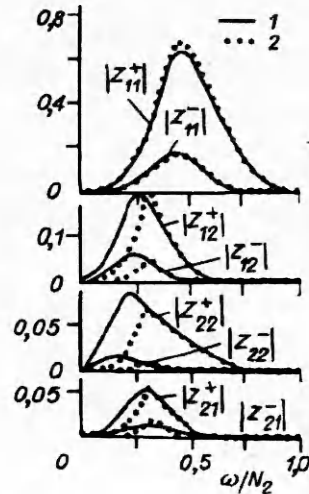


Рис. 3

отличной от максимальной и от нуля. Дисперсионные кривые для первой моды в этих случаях близки, но для более высоких мод в случае 2 наблюдаются ярко выраженные "полочки" при $\omega \approx N_1$, появление которых и обуславливает немонотонное поведение групповых скоростей.

Для кругового цилиндра при $h/b = 1,5$ коэффициенты прохождения для первых двух мод, а также коэффициенты рассеяния первой моды во вторую $|Z_{12}^+|$ и, наоборот, второй моды в первую $|Z_{21}^+|$ представлены на рис. 2. Для эллиптического цилиндра ($a/b = 2, h/b = 1,5$) аналогичные характеристики для рассеяния вперед и назад даны на рис. 3. Кривыми 1, 2 на рис. 2, 3 показаны результаты для соответствующих случаев. Видно, что коэффициенты прохождения и отражения для первой моды практически не зависят от N_1 , тогда как другие характеристики в области $0 < \omega/N_2 < 0,25$ резко отличаются для этих двух типов стратификации. Коэффициенты $|Z_{12}^+|, |Z_{22}^+|, |Z_{21}^+|$ в случае 2 существенно меньше, чем в случае 1. Это объясняется, по-видимому, тем, что в случае 2 происходит значительное рассеяние в более высокие моды. Матрицы рассеяния приведены в табл. 1—3. В табл. 1 представлены значения $10^3 \cdot |Z_{jm}^+|$ ($j = \overline{1,5}, m = \overline{1,10}$) для эллиптического контура при $\omega/N_2 = 0,2$ для случая 2. Подчеркнутые диагональные элементы отвечают коэффициентам прохождения и отражения для соответствующей моды. В табл. 2 даны аналогичные результаты для случая 1. Меньший размер этой таблицы объясняется тем, что в случае 1 рассеяние для более высоких мод ничтожно мало. Видно, что при немонотонном изменении групповых скоростей возможно более интенсивное рассеяние в высшие моды. Это наблюдается только при $\omega < N_1$. Для более высоких частот набегающей волны оба случая дают практически одинаковые результаты. В табл. 3 приведены аналогичные коэффициенты для $\omega/N_2 = 0,4$. При стремлении частоты набегающей волны к предельному значению N_2 рассеяние волн прекращается.

Аналогично дифракционной задаче может быть решена и задача о возбуждении внутренних волн установившимися колебаниями тела: горизонтальными, вертикальными и вращательными. Функции Грина этих задач совпадают.

2. При стационарном обтекании погруженного тела равномерным потоком со скоростью U в направлении отрицательной оси x уравнения волнового движения для вертикальной скорости $v(x, y)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta v_1 + \epsilon^2 v^2 v_1 &= 0 & (H_2 < y < H), \\ \Delta v_2 + v^2 v_2 &= 0 & (0 < y < H_2), \end{aligned}$$

Таблица 1

j	m									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$10^3 \cdot z_{jm}^+ $									
1	<u>35</u>	41	46	97	125	51	31	44	53	19
2	8	<u>10</u>	11	24	31	13	8	11	14	5
3	5	6	<u>6</u>	14	18	8	5	7	9	3
4	7	9	11	<u>24</u>	31	13	9	14	17	7
5	12	15	17	39	<u>52</u>	22	15	23	30	12
	$10^3 \cdot z_{jm}^- $									
1	<u>12</u>	14	15	31	40	16	10	14	16	6
2	3	<u>3</u>	3	7	9	4	2	3	3	1
3	2	2	<u>2</u>	4	5	2	1	1	2	1
4	2	3	3	<u>6</u>	7	3	2	2	2	1
5	4	4	5	9	<u>11</u>	4	2	3	3	1

Таблица 2

j	m							
	1	2	3	4	5	6	7	8
	$10^3 \cdot z_{jm}^+ $							
1	<u>67</u>	152	61	8	4	2	0	0
2	29	<u>80</u>	44	14	2	0	0	0
3	6	24	<u>21</u>	12	6	2	1	0
4	1	5	9	<u>8</u>	6	3	1	0
5	0	1	3	4	<u>4</u>	3	1	1
	$10^3 \cdot z_{jm}^- $							
1	<u>22</u>	48	18	2	1	1	—	—
2	9	<u>16</u>	4	1	1	0	—	—
3	2	2	<u>0</u>	0	0	0	—	—

Таблица 3

j	m									
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
	Случай 1					Случай 2				
	$10^3 \cdot z_{jm}^+ $									
1	<u>528</u>	94	6	0	0	<u>534</u>	100	7	0	0
2	31	<u>46</u>	14	1	0	<u>33</u>	<u>49</u>	14	1	0
3	1	8	<u>9</u>	3	1	1	8	<u>9</u>	3	1
4	—	—	—	—	—	0	1	2	<u>2</u>	0
	$10^3 \cdot z_{jm}^- $									
1	<u>159</u>	11	2	—	—	<u>164</u>	15	2	—	—
2	4	<u>1</u>	0	—	—	5	<u>1</u>	0	—	—

Таблица 4

i	U_j/\sqrt{ga}		i	U_j/\sqrt{ga}	
	Случай 1	Случай 2		Случай 1	Случай 2
1	0,5523	0,6605	6	0,0078	0,0414
2	0,0388	0,1782	7	0,0065	0,0368
3	0,0195	0,0963	8	0,0056	0,0320
4	0,0130	0,0655	9	0,0049	0,0277
5	0,0097	0,0499	10	0,0043	0,0244

где $\nu = N_2/U$. В нижнем слое потенциал скоростей волнового движения $\varphi(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1.1). Граничные условия стационарной задачи совпадают с (1.2). В дальнем поле, согласно условию излучения, волновое движение может существовать только за телом.

Одна из основных трудностей решения этой задачи — выполнение точного условия непротекания на поверхности тела

$$\partial\varphi/\partial n = Un_x \quad (x, y \in L).$$

Большинство работ по определению характеристик внутренних волн выполнено с помощью замены реального конечного тела системой точечных особенностей аналогично однородной безграничной жидкости (см. обзор [4]). Наиболее часто используется дипольное приближение. Применение численных методов позволяет решить рассматриваемую задачу в полной постановке и, в частности, определить волновую нагрузку, действующую на погруженное тело. Пример сопоставления численных результатов с приближенным решением для волнового сопротивления эллиптического цилиндра в двухслойной безграничной жидкости представлен в [5]. Показано, что дипольное приближение служит достаточно удовлетворительной оценкой сверху для волнового сопротивления.

Функция Грина данной задачи в нижнем слое имеет вид, подобный (1.4):

$$(2.1) \quad G = \ln(rr_1) + 2pv \int_0^{\infty} e^{k(y+\eta)} \cos k(x-\xi) S(k) dk + \\ + 2\pi \sum_{j=1}^M P_j e^{k_j(y+\eta)} \cos k_j(x-\xi).$$

Здесь

$$S(k) = \begin{cases} T(k, \gamma_1, \gamma_2) & (k < \varepsilon\nu), \\ T(k, i\beta_1, \gamma_2) & (\varepsilon\nu < k < \nu), \\ T(k, i\beta_1, i\beta_2) & (k > \nu); \end{cases}$$

$$\beta_2 = \sqrt{k^2 - N_2^2/U^2}.$$

Функции T и P_j совпадают с выражениями, введенными в (1.4), в которых выполнена замена $\omega = kU$. Такую же замену надо сделать и в (1.3) для определения k_j . Подынтегральное выражение в (2.1) при $k < \nu$ может иметь простые полюсы, число M которых растет с увеличением ν . Обозначим через ν_m ($\nu_1 < \nu_2 < \dots$) те значения ν , при которых происходит рождение корня k_m . Значения ν_m определяются из решения уравнения $\operatorname{tg} \nu_m H_2 \cdot \operatorname{tg} \varepsilon \nu_m \bar{H}_1 = \varepsilon$. Для данного ν значение M находится согласно неравенству $\nu_M < \nu < \nu_{M+1}$.

Волновое движение за телом возникает только при $U < U_1 = N_2/\nu_1$ и представляет собой сумму M гармонических волн. С уменьшением скорости обтекания тела число возбуждаемых волн растет.

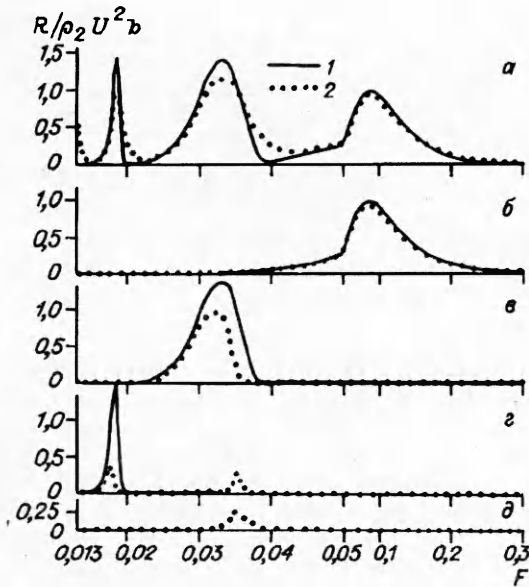


Рис. 4

Дипольное приближение для волнового сопротивления R определено в [6] и для эллиптического цилиндра в рассматриваемой трехслойной жидкости имеет вид

$$R = \rho_2 d^2 \sum_{j=1}^M \frac{k_j^2 e^{-2k_j h}}{Q_1(k_j) + Q_2(k_j)},$$

где

$$Q_1(k) = \frac{(k \sin \gamma_2 H_2 + \gamma_2 \cos \gamma_2 H_2)^2}{2\gamma_2^2} \begin{cases} \frac{2\gamma_1 H_1 - \sin 2\gamma_2 H_2}{\gamma_1 \sin^2 \gamma_1 H_1} & (k < \epsilon v), \\ \frac{\text{sh } 2\beta_1 H_1 - 2\beta_1 H_1}{\beta_1 \text{sh}^2 \beta_1 H_1} & (k > \epsilon v); \end{cases}$$

$$Q_2(k) = H_1 + \frac{1}{k} + \frac{\sin 2\gamma_2 H_2}{2\gamma_2} - \frac{2k}{\gamma_2} \sin^2 \gamma_2 H_2 + \frac{k^2}{\gamma_2^2} \left(H_2 - \frac{\sin 2\gamma_2 H_2}{2\gamma_2} \right);$$

$d = \pi b(a + b)U$ — момент диполя для эллиптического контура.

Расчеты выполнены для рассмотренных в п. 1 случаев стратификации жидкости и геометрии тела, $N_2^2 H_2 / g = 0,03$. Критические значения скорости первых 10 мод приведены в табл. 4. Видно, что с ростом номера моды различие между двумя исследуемыми случаями становится очень большим. Поведение волнового сопротивления представлено на рис. 4, где кривыми 1, 2 показаны соответствующие случаи стратификации жидкости. На рис. 4,а приведен суммарный результат, а на рис. 4,б—д — вклады первых четырех мод. Видно, что, несмотря на резкое отличие критических скоростей, поведение полного волнового сопротивления не очень сильно отличается в этих двух случаях. Разложение волнового сопротивления по модам показывает, что вклады первых мод практически равны вследствие близости их дисперсионных зависимостей, а вклады более высоких мод существенно отличаются. При нормальных дисперсионных зависимостях для каждой волновой моды имеет место один максимум волнового сопротивления, а при аномальных число их возрастает с номером моды. Интересно отметить, что места появления максимумов при аномальных дисперсионных зависимостях близки к тем значениям скоростей, где возникают максимумы при нормальном поведении дисперсионных зависимостей. Так, при $F \equiv U/\sqrt{ga} = 0,035$ в случае 1 волновое сопротивление определяется второй модой, а в случае 2 —

суммарным вкладом мод с $j = \overline{2,6}$, при $F = 0,0175$ в случае 1 — третьей модой, а в случае 2 — вкладом мод с $j = \overline{3,10}$. На рис. 4 представлена только область значений $0,013 \leq F \leq 0,3$, где существует еще не более 3 мод в случае 1 и не более 18 мод в случае 2.

Таким образом, в работе показано, что аномальные дисперсионные зависимости могут приводить к “чехарде” мод внутренних волн, когда возбуждение высших мод происходит более интенсивно, чем низших.

ЛИТЕРАТУРА

1. Миропольский Ю.З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. — Л.: Гидрометеоздат, 1981.
2. Завольский Н.А. Особенности распространения линейных внутренних волн в непрерывно стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1987. — № 1.
3. Стурова И.В. Рассеяние поверхностных и внутренних волн на погруженном теле // Вычислительные технологии. — Новосибирск, 1993. — Т. 2, № 4.
4. Степанянц Ю.А., Стурова И.В., Теодорович Э.В. Линейная теория генерации поверхностных и внутренних волн // Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. — М.: ВИНТИ, 1987. — Т. 21.
5. Стурова И.В. Влияние регулярного волнения на погруженное тело, движущееся в стратифицированной жидкости // Вычислительные технологии. — Новосибирск, 1992. — Т. 1, № 3.
6. Городцов В.А., Теодорович Э.В. К теории волнового сопротивления (поверхностные и внутренние волны) // Н.Е. Кочин и развитие механики. — М.: Наука, 1984.

г. Новосибирск

Поступила 9/VII 1993 г.

УДК 533.69

Н.Ф. Воробьев

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ АЭРОДИНАМИКИ КРЫЛА КОНЕЧНОГО РАЗМАХА

Задачи обтекания невязким сверхзвуковым потоком тонкого слабоизогнутого крыла конечного размаха в линейной постановке сводятся к решению волнового уравнения для потенциала скорости с данными на базовой плоскости временно-ориентированного типа и на головной характеристической поверхности. Представление решения волнового уравнения в форме Вольтера позволяет в этом случае задания исходных данных выбрать в качестве определяющего параметра на базовой плоскости либо выводящую производную — геометрию крыла (прямая задача аэродинамики), либо функцию-нагрузку на крыле (обратная задача аэродинамики). Вместе с тем формула Вольтера устанавливает связь между решениями этих задач — устраняет неоднозначность решения обратной задачи [1].

Потенциал скорости в прямой и обратной задачах записывается в виде двойных интегралов, подынтегральные выражения (ядра интегральных операторов) которых содержат особенности. При нахождении газодинамических параметров потока (производных потенциала скорости) степень подынтегральных особенностей возрастает, при этом иногда бывает невозможно проведение в рамках ограниченных функций формальных операций дифференцирования, а иногда дифференцирование приводит к появлению таких особенностей, при которых интегралы становятся расходящимися. Часто используется прием признания существования интегралов в смысле Адамара [2]. Введение такой символики вносит не только осложнение в реализацию

© Н.Ф. Воробьев, 1994