

Тогда максимум достигается лишь в точке $D (p_D = p_*)$. Интегрируя условие (5.2) по частям, получим

$$\frac{p - p_*}{\eta(\lambda)} \Big|_A - \frac{p - p_*}{\eta(\lambda)} \Big|_C + \int_C^A \frac{p - p_*}{\eta^2} d\eta = 0.$$

При этом все три члена одного знака, следовательно, $p - p_* = 0$. Таким образом, $\min p = \max p$, значит, $p = \text{const}$, $f = 0$. Тогда задача сопряжения (4.1) однозначно разрешима в выбранном классе функций, и, следовательно, $J \neq 0$.

Таким образом, разрешимость сформулированной краевой задачи зависит от типа отраженного скачка уплотнения. Если отраженный скачок слабый и сильноустойчивый, то течение не изменит своего характера, т.е. произойдет деформация отраженного скачка уплотнения, и задача о возмущениях будет иметь решение. В остальных случаях поставленная автомодельная задача о возмущениях неразрешима, что свидетельствует о принципиальной перестройке течения.

Анализ полученного решения (4.3) показывает, что в угловой точке решение имеет логарифмическую особенность. Это обстоятельство указывает на неправомерность линейного приближения в малой окрестности точки перелома и на необходимость отдельного детального изучения поведения решения в окрестности этой точки. Полное изучение данного вопроса выходит за рамки предложенной работы.

В [3] аналогичные выводы получены при исследовании задачи о нестационарных неавтомодельных возмущениях стационарного течения, возникающего при регулярном отражении косоугольного скачка уплотнения от жесткой стенки. В [5] вывод о неразрешимости задачи о возмущениях сильного скачка уплотнения получен при анализе уравнений околосвукового приближения.

Автор выражает искреннюю благодарность профессору В.М. Тешукову за постоянное внимание к работе и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ter-Minassiants S.M. The diffraction accompanying the regular reflexion of a plane obliquely impinging shock wave from the walls of an obtuse wedge // J. Fluid Mech. — 1969. — V. 35, pt 2.
2. Арутюнян Г.М., Карчевский Л.В. Отраженные ударные волны. — М.: Машиностроение, 1973.
3. Тешуков В.М. Об устойчивости регулярного отражения ударных волн // ПМТФ. — 1989. — № 3.
4. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.
5. Гришин А.В., Шифрин Э.Г. О режиме присоединенного скачка уплотнения на кромках V-образного крыла // ПММ. — 1979. — № 1.

г. Новосибирск

Поступила 15/1 1993 г.,
в окончательном варианте —
25/V 1993 г.

УДК 532.539

В.П. Киселев, С.П. Киселев, В.М. Фомин

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ С ОБЛАКОМ ЧАСТИЦ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

В работе приведены результаты расчетов взаимодействия ударной волны (УВ) с облаком частиц. Показано существенное влияние объемной концентрации частиц на ускорение облака частиц.

© В.П. Киселев, С.П. Киселев, В.М. Фомин, 1994

1. Рассмотрим облако твердых сферических частиц, на которое набегают УВ. Требуется найти параметры газа и частиц, возникающие в результате взаимодействия УВ с облаком частиц. Движение частиц моделируется бесстолкновительным кинетическим уравнением, а газ — осредненными уравнениями запыленного газа. Предполагается, что частицы могут обладать дисперсией по скоростям и размерам. Данная модель подробно описана в [1, 2] и применима в случае, когда в области течения не происходит пересечения траекторий частиц либо столкновения частиц являются редкими ($Kp \approx \approx d/(6m_2L) \geq 1$, L — относительное расстояние, проходимое частицей в облаке, m_2 — объемная концентрация частиц, d — диаметр частиц). Пренебрегая эффектами теплообмена, запишем полную систему уравнений [1, 2] в виде

$$(1.1) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_i v_i' f + \frac{\partial}{\partial v_i'} (a_i' f) = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$f = f(t, x', v_2', r_s), \quad n = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} f dV_v' dr_s,$$

$$m_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{4}{3} \pi r_s^3 f dV_v' dr_s, \quad dV_v' = dv_2' d\sigma_2' d\sigma_3',$$

$$m_1 + m_2 = 1, \quad \rho_2 = \rho_{22} m_2, \quad a_i' = a_i' - \nabla_i p / \rho_{22},$$

$$a_i' = \frac{3}{4} \left(\frac{Re \mu}{\rho_{22} d^2} \right) C_d(Re, M_{12}) (v_1' - v_i'),$$

$$C_d(Re, M_{12}) = (1 + \exp(-0,43/M_{12}^{4,67})) \left(\xi + \frac{24}{Re} + \frac{4}{\sqrt{Re}} \right),$$

$$Re = \rho_{11} |v_1 - v_2| d / \mu, \quad M_{12} = |v_1 - v_2| / c_0,$$

$$p = (\gamma - 1) \rho_{11} \mathcal{E}_1, \quad \mathcal{E}_1 = c_v T_1, \quad \rho_1 = \rho_{11} m_1, \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla_i (\rho_1 v_i') = 0,$$

$$\rho_1 \frac{d_i v_1'}{dt} = -m_1 \nabla_i p - F_{12}^i, \quad \frac{d_1}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_1' \nabla_i,$$

$$\frac{d_1 \mathcal{E}_1}{dt} + p \frac{d_1}{dt} \left(\frac{1}{\rho_{11}} \right) = \Phi_3, \quad F_{12}^i = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} m a_i' f dV_v' dr_s, \quad m = \frac{4}{3} \pi r_s^3 \rho_{22},$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{\rho_1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} m a_i' (v_1' - v_i') f dV_v' dr_s,$$

где по повторяющимся индексам i подразумевается суммирование; f — одночастичная функция распределения в фазовом пространстве t, x', v_2', r_s ($i = 1, 2, 3$); dV_v' — элемент объема в пространстве скоростей; n — концентрация; $a_i', \langle v_i' \rangle$ — i -е компоненты ускорения и средней скорости частиц; p, μ, c_0 — давление, вязкость и скорость звука в газе; γ — показатель адиабаты; Re, M_{12} — числа Рейнольдса и Маха; $m_1, m_2, \rho_1, \rho_2, \rho_{11}, \rho_{22}$ — объемные концентрации, средние плотности и истинные плотности газа и частиц; \mathcal{E}_1 — удельная внутренняя энергия газа; F_{12}^i — i -я составляющая силы взаимодействия газ — частица, связанная со скоростной неравновесностью. В данной работе рассчитывается движение газа и частиц в осесимметричном и плоском случае. Поскольку при ускорении облако может смещаться на большие расстояния, целесообразно решать задачу в системе центра масс облака частиц. Направляя ось z вдоль скорости центра масс облака частиц D , а r — перпендикулярно, перепишем систему (1.1):

$$(1.2) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + v_2 \frac{\partial f}{\partial z} + w_2 \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial v_2}(a_z f) + \frac{\partial}{\partial w_2}(a_r f) + k \frac{w_2}{r} f = 0,$$

$$v_2 = v_2^n - D, w_2 = w_2^n, a_z = a_z^n - \dot{D}, a_r = a_r^n,$$

$$\dot{D} = \frac{dD}{dt}, D = \int \rho_2 v_2^n f dV dV_c dr_s / \int \rho_2 f dV dV_c dr_s,$$

$$dV = r^k dr dz, dV_c = dw_2 dv_2, \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial r} + \Phi = 0,$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_1 v_1 \\ \rho_1 w_1 \\ \rho_1 \left(\mathcal{E}_1 + \frac{v_1^2 + w_1^2}{2} \right) \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} \rho_1 v_1 \\ \rho_1 v_1^2 + p m_1 \\ \rho_1 v_1 w_1 \\ \rho_1 v_1 A_1 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} \rho_1 w_1 \\ \rho_1 v_1 w_1 \\ \rho_1 w_1^2 + p m_1 \\ \rho_1 w_1 A_1 \end{pmatrix}, \Phi = \begin{pmatrix} k \rho_1 w_1 / r \\ k \rho_1 v_1 w_1 / r + \Phi_1 \\ k \rho_1 w_1^2 / r + \Phi_2 \\ k \rho_1 w_1 A_1 + A_2 \end{pmatrix},$$

$$v_1 = v_1^n - D, w_1 = w_1^n, A_1 = \mathcal{E}_1 + p m_1 / \rho_1 + (v_1^2 + w_1^2) / 2,$$

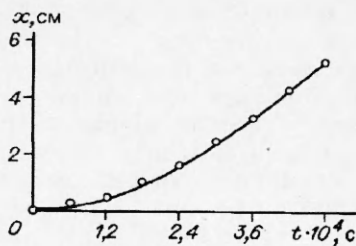
$$A_2 = v_1 \Phi_1 + w_1 \Phi_2 + p \left(\frac{\partial m_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial m_1}{\partial z} + w_1 \frac{\partial m_1}{\partial r} \right) - \rho_1 \Phi_3,$$

$$\Phi_1 = \rho_1 \dot{D} - p \frac{\partial m_1}{\partial z} - F_{12}^z, \Phi_2 = -p \frac{\partial m_1}{\partial r} - F_{12}^r,$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{\rho_1} \int m (a_z^2 (v_1 - v_2) + a_r^2 (w_1 - w_2)) f dV_c dr_s.$$

Здесь $k = 0$ в плоском случае, $k = 1$ — в осесимметричном; v_1, v_2, w_1, w_2 — z - и r -компоненты скорости газа и частиц; индексом л отмечены параметры газа и частиц в лабораторной системе отсчета. Остальные обозначения совпадают с (1.1).

Система уравнений (1.1), (1.2) используется для расчета дозвуковых ($M_{12} < 1$) и сверхзвуковых ($M_{12} > 1$) движений частиц в газе. При сверхзвуковом движении в окрестности каждой частицы возникает коническая маховская УВ. Данная модель не позволяет рассчитать УВ, «сидящую» на каждой частице, однако наличие маховской УВ учитывается в зависимости $C_d(M_{12})$, так что $C_d(M_{12} > 1) / C_d(M_{12} < 1) \sim 2$. Это дает возможность корректно описать осредненное сверхзвуковое движение облака частиц в газе. Коэффициент ζ в формуле для C_d (см. (1.1)) выбирался из условия совпадения рассчитанной и измеренной в эксперименте [3, 4] зависимости координаты одиночной частицы от времени $x(t)$ при ее ускорении за фронтом



Р и с. 1

УВ. На рис. 1 линией показаны результаты расчетов траектории движения одиночной частицы при $\zeta = 0,38$, а кружками — результаты эксперимента для частиц бронзы с $\rho_{22} = 8,6 \cdot 10^3$ кг/м³, $d = 180 \pm 10$ мкм, при числе Маха УВ $M_0 = 2,6$ и начальном давлении $p^0 = 1$ атм. Из рис. 1 следует, что выбранная формула для C_d достаточно хорошо описывает движение одиночной частицы в широком диапазоне изменения M_{12} и Re .

2. Система уравнений (1.2) решалась численно на ЭВМ с помощью алгоритма, суть которого состоит в следующем. На плоскости (r, z) строится эйлерова прямоугольная сетка с шагами по r и z , равными $2h_r$ и $2h_z$. На эйлеровой сетке расписываются уравнения для газа по явной конечно-разностной схеме 3-го порядка точности (используется векторная форма записи, см. (1.2)) [5, 6]. Бесстолкновительное кинетическое уравнение решается в лагранжевых переменных. Выберем индивидуальный объем в фазовом пространстве частиц $\mathcal{V}^0(t)$. Условие сохранения полного числа частиц N в индивидуальном объеме имеет вид

$$(2.1) \quad N = \int_{\mathcal{V}^0(t)} f dV dV dr_z = \text{const}$$

где $\mathcal{V}^0(t)$ образована одними и теми же частицами, траектории которых определяются из уравнений

$$(2.2) \quad \frac{dz}{dt} = v_z, \quad \frac{dr}{dt} = w_r, \quad \frac{dv_z}{dt} = a_z, \quad \frac{dw_r}{dt} = a_r, \quad \frac{dr_s}{dt} = 0.$$

Система (2.2) совпадает с характеристиками кинетического уравнения (первое в (1.2)). Последнее уравнение в (2.2) отражает отсутствие дробления и коагуляции частиц. Дифференцируя (2.1) по времени, с учетом теоремы Остроградского — Гаусса и системы (2.2) легко получить бесстолкновительное кинетическое уравнение в (1.2).

Область, занятая частицами, разбивается в момент $t = 0$ на прямоугольные лагранжевы ячейки частиц (ЯЧ) размером $2h_z, 2h_r$, так что внутри каждой i -й ЯЧ все частицы имеют одинаковую скорость v_{2i}^0, w_{2i}^0 и радиус r_i , поэтому функция распределения в i -й ЯЧ при $t = 0$ запишется как

$$f_i^0 = \frac{N_i}{V_i^0} \delta(v_z - v_{2i}^0) \delta(w_r - w_{2i}^0) \delta(r - r_i), \quad V_i^0 = 4(r_i^0)^k h_z h_r$$

(N_i — число частиц в i -й ЯЧ, δ — дельта-функция). Индивидуальный объем $\mathcal{V}^0(t)$ будет совпадать с объемом движущейся ЯЧ, поэтому число частиц в i -й ЯЧ останется постоянным. В результате функция распределения в i -й ЯЧ в момент t^n будет даваться формулой

$$(2.3) \quad f_i^n = \frac{N_i}{V_i^n} \delta(v_z - v_{2i}^n) \delta(w_r - w_{2i}^n) \delta(r - r_i),$$

где

$$\begin{aligned} V_i^n &= 4(r_{2i}^n)^k h_z h_r, \\ v_{2i}^n &= v_{2i}^{n-1} + \tau a_{z_i}^{n-1}, \quad w_{2i}^n = w_{2i}^{n-1} + \tau a_{r_i}^{n-1}, \\ z_{2i}^n &= z_{2i}^{n-1} + \tau v_{2i}^{n-1} + a_{z_i}^{n-1} \tau^2 / 2, \\ r_{2i}^n &= r_{2i}^{n-1} + \tau w_{2i}^{n-1} + a_{r_i}^{n-1} \tau^2 / 2, \end{aligned}$$

$\tau = t^n - t^{n-1}$ — шаг по времени. Как следует из (2.3), лагранжевы ЯЧ движутся относительно эйлеровой сетки со скоростями v_{2i}^n, w_{2i}^n . Функция распределения f_j^n в j -й эйлеровой ячейке (ЭЯ) имеет вид

$$(2.4) \quad f_j^n = \sum_i \frac{\delta_i^n N_i}{V_i^n} \delta(v_z - v_{2i}^n) \delta(w_r - w_{2i}^n) \delta(r - r_i),$$

$$\delta_i^n = \frac{V_i^n}{V_j^n}, \quad V_j^n = (r_{2i}^n)^k S_{ij}^n, \quad V_j = (r_j)^k S_j, \quad S_j = 4h_z h_r,$$

где δ_i^n — доля объема, занимаемая i -й ЯЧ в j -й ЭЯ; величины S_j, S_j^n показаны на рис. 2 для i -й ЯЧ, пересекающей j -ю ЭЯ. Суммирование в (2.4) идет по m ЯЧ, пересекающих j -ю ЭЯ. С помощью (2.4) можно найти среднюю величину

$$(2.5) \quad \langle Q \rangle = \frac{1}{V} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} Q f dV_j dr.$$

Подставляя (2.4) в (2.5), в j -й ЭЯ получим

$$(2.6) \quad \langle Q \rangle_j^n = \left(\sum_i^m Q_i^n \delta_i^n N_i / V_i^n \right) / \left(\sum_i^m \delta_i^n N_i / V_i^n \right).$$

Формула (2.6) позволяет найти средние параметры частиц в произвольной ЭЯ. Параметры газа в ЯЧ находились методом линейной интерполяции.

3. Рассмотрим облако твердых сферических частиц, находящихся в плоском канале, на которое слева набегают УВ (рис. 3). В момент $t = 0$ облако является однородным и перекрывает все сечение канала. Вдоль z облако ограничено границами Γ_2, Γ_3 . Координата левой границы облака обозначена z_1 , а правой z_2 . Требуется рассчитать картину течения, возникающую в результате взаимодействия УВ с облаком частиц, и найти зависимость координаты левой границы облака z_1 от времени t . (В [3, 4] экспериментально изучалось взаимодействие УВ с облаком частиц и измерялась зависимость координаты левой границы облака от времени.) В области Ω_1 частицы отсутствуют, поэтому параметры газа находились из решения системы уравнений Эйлера (газ идеальный) по схеме 3-го порядка точности. В области Ω_2 решалась система уравнений (1.2) с помощью численной методики, описанной в п. 2. В уравнениях (1.2) полагалось $k = 0$ (плоский случай), $\xi = 0,38, D = \dot{D} = 0$ (лабораторная система координат). Начальные условия задавались в виде

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \rho_{11} &= \rho_{11}^0, p = p^0, v_1 = w_1 = 0, z > z^+, \\ \rho_{11} &= \rho_{11}^0 M_0^2 / (1 - h + h M_0^2), p = p^0 ((1 + h) M_0^2 - h), \\ v_1 &= (1 - h) c_0 (M_0 - 1/M_0), h = (\gamma - 1) / (\gamma + 1), \\ w_1 &= 0, M_0 = D_0 / c_0, z < z^+, \\ m_2 &= m_2^0, f^0 = R(r) \delta(w_2) \delta(v_2) \text{ в } \Omega_2, \end{aligned}$$

где $R(r) = \frac{6m_2^0}{\pi d^3} \delta(r - d/2)$ для монодисперсного облака частиц с диаметром $d = d_s$; в полидисперсном случае функция $R(r)$ будет приведена ниже. В качестве граничных условий для газа на $\gamma_1 \Gamma_1 \gamma_1' \gamma_3 \Gamma_3 \gamma_3'$ полагается $w_1 = 0$, а

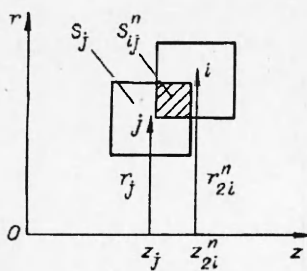


Рис. 2

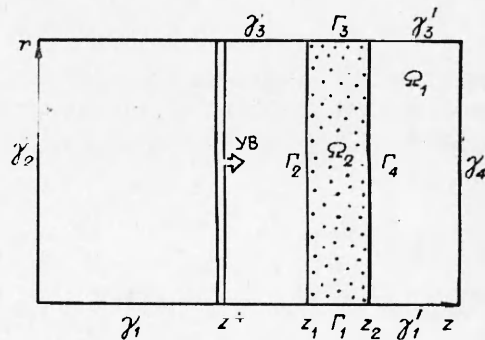


Рис. 3

на γ_2, γ_4 ставится условие симметрии (см. рис. 3). Для частиц на $\gamma_1 \Gamma_1 \gamma'_1$ и $\gamma_3 \Gamma_3 \gamma'_3$ ставится условие зеркального отражения, а на γ_2, γ_4 — поглощения частиц. Значения параметров газа и частиц в расчетах выбирались такими же, как в экспериментах [3, 4]. Перед фронтом УВ газ покоился: $w_1^0 = v_1^0 = 0$, $\rho_{11}^0 = 1,2 \text{ кг/м}^3$, $p^0 = 10^5 \text{ Па}$, $\gamma = 1,4$, а $M_0 = 2,8$. Рассматривались сферические частицы из оргстекла и бронзы. Для частиц оргстекла с $\rho_{22} = 1,2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $d_s = 300 \text{ мкм}$ расчеты проводились при $m_2^0 = 10^{-3}$ и $3 \cdot 10^{-2}$, а координаты границ облака при $t = 0$ были $z_1 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, $z_2 = 3,8 \cdot 10^{-2} \text{ м}$. Для частиц бронзы с $\rho_{22} = 8,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $d_s = 130 \text{ мкм}$ $m_2^0 = 10^{-3}$ и 10^{-2} , $z_1 = 1,4 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, $z_2 = 2,3 \cdot 10^{-2} \text{ м}$.

Отметим, что в экспериментах размеры частиц бронзы изменялись в диапазоне $d \sim 80 \div 130 \text{ мкм}$, а оргстекла $d \sim 80 \div 300 \text{ мкм}$. Влияние полидисперсности рассмотрено ниже на примере частиц бронзы. Расчеты показали, что наличие мелкой фракции не меняет существенно картину течения газа и зависимость координаты левой границы облака от времени.

На рис. 4 приведена траектория левой границы облака $z_1(t)$ после взаимодействия УВ с облаком частиц оргстекла. Кружки — результаты эксперимента [3, 4] с разреженным облаком ($m_2^0 = 10^{-3}$), треугольники — с более плотным облаком ($m_2^0 = 3 \cdot 10^{-2}$). Результаты расчета при $m_2^0 = 10^{-3}$ и $3 \cdot 10^{-2}$ — соответственно кривые 1 и 2. Видно, что наблюдается хорошее совпадение расчетов с экспериментом. На рис. 5, 6 для облака при $m_2^0 = 3 \cdot 10^{-2}$ представлены зависимости давления $p(z)$ и местного числа Маха $M_1(z)$ ($M_1 = v_1/c_1$) на моменты времени $t = 50, 100, 150 \text{ мкс}$ (кривые 1—3). Вертикальными отрезками на кривых $p(z)$, $M_1(z)$ показаны левая и правая границы облака. Видно, что перед облаком формируется отраженная коллективная УВ, которая постепенно «убегает» от облака. Внутри облака образуется волна разрежения, в которой происходит ускорение газа, и вблизи правой границы облака поток становится сверхзвуковым. Волна разрежения не расплывается со временем и имеет размеры, совпадающие с размерами облака. Амплитуда проходящей УВ уменьшается по сравнению с падающей, так как часть энергии газа идет на ускорение облака. Образование отраженной УВ связано с торможением газа частицами облака. Поэтому время ее формирования t^* должно быть порядка времени скоростной релаксации газа τ_v . Величину τ_v оценим из уравнений движения газа

$$(3.2) \quad \frac{dv_1}{dt} = -\frac{1}{\rho_{11}} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{3}{4} C_d \frac{m_2}{m_1} |v_1 - v_2| (v_1 - v_2) / d.$$

На стадии формирования коллективной УВ скорость частиц v_2 существенно меньше скорости газа v_1 ($v_2 \ll v_1$), поэтому второй член в правой части (3.2) можно представить в виде $-v_1/\tau_v$, где

$$(3.3) \quad \tau_v = \frac{4}{3} \frac{m_1}{C_d m_2} \frac{d}{v_1}.$$

Подставляя в (3.3) $d = 300 \text{ мкм}$, $C_d \sim 1 \div 0,5$, $m_2 = 3 \cdot 10^{-2}$, $v_1 \approx 7 \cdot 10^2 \text{ м/с}$, получим $\tau_v \sim 20 \div 40 \text{ мкс}$, что близко к $t^* \sim 50 \text{ мкс}$ (см. рис. 5, 6). Из рис. 5, 6 видно, что при $t > 50 \text{ мкс}$ движение газа в системе центра масс облака является квазистационарным, поэтому, переписывая (3.2) в системе центра масс облака с учетом $\frac{\partial(v_1 - v_2)}{\partial t} \approx 0$, $D \approx v_2$, получим

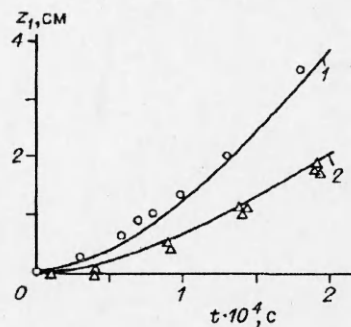
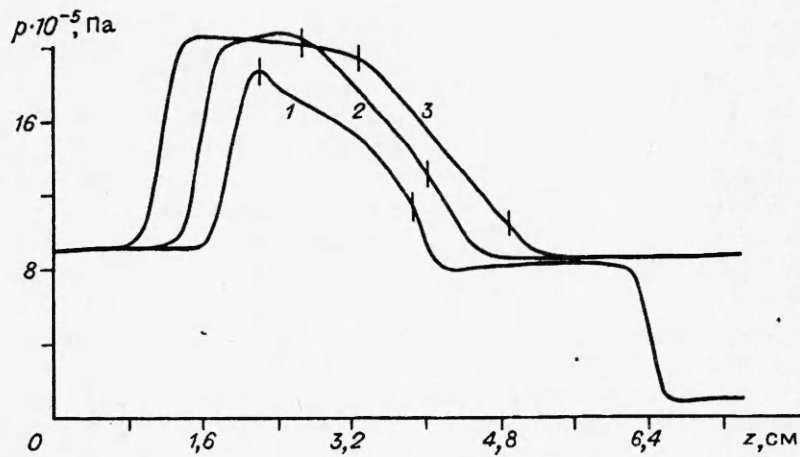


Рис. 4



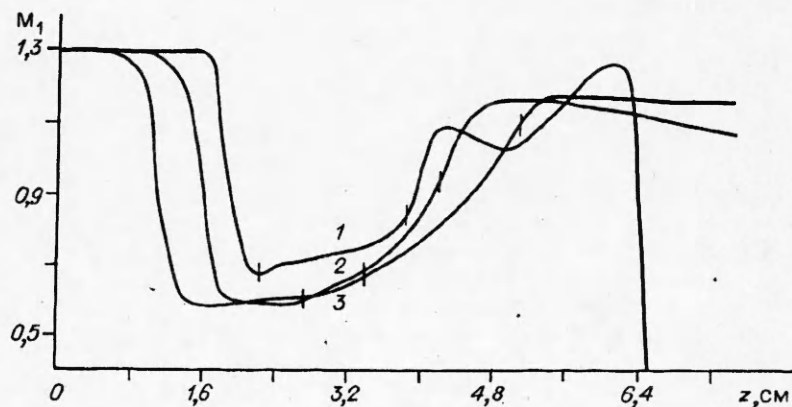
Р и с. 5

$$(3.4) \quad \frac{\partial p}{\partial z} \approx -\rho_{11} \dot{v}_2 - \frac{\partial}{\partial z} \rho_{11} (v_1 - v_2)^2 - \frac{3}{4} C_d \frac{m_2}{m_1} \rho_{11} |v_1 - v_2| (v_1 - v_2) / d.$$

Поскольку газ в облаке и само облако ускоряются ($\frac{\partial}{\partial z} \rho_{11} (v_1 - v_2)^2 \geq 0$, $\dot{v}_2 \geq 0$, $v_1 \geq v_2$), то из уравнения (3.4) имеем неравенство $\frac{\partial p}{\partial z} \geq 0$. При ускорении облака разность $(v_1 - v_2)$ уменьшается, что приводит к соответствующему уменьшению градиента $|\partial p / \partial z|$ и амплитуды отраженной УВ. На рис. 5 видно уменьшение давления p в отраженной УВ при $t = 150$ мкс по сравнению с моментом времени $t = 100$ мкс. Равенство $\partial p / \partial z = 0$ достигается, когда облако движется со скоростью, равной скорости газа $v_2 = v_1$, в этом случае отраженная УВ исчезает.

На рис. 7 приведена зависимость $M_1(z)$ при взаимодействии УВ с облаком частиц оргстекла с малой объемной концентрацией частиц ($m_2^0 = 10^{-3}$). Кривые 1—3 соответствуют $t = 50, 100, 150$ мкс. Вертикальными отрезками обозначены левая и правая границы облака. Видно, что течение в облаке является сверхзвуковым ($M_1 > 1$) и отраженная коллективная УВ не возникает. Появление малых возмущений перед левой границей облака связано со схемной вязкостью.

Проведенный анализ течения газа позволяет понять причину более сильного ускорения разреженного облака частиц. В случае разреженного



Р и с. 6

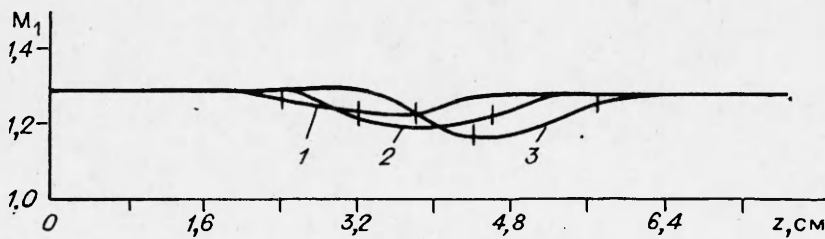


Рис. 7

облака частиц оргстекла ($m_2^0 = 10^{-3}$) скорость газа в облаке примерно в 2 раза больше, чем в плотном облаке ($m_2^0 = 3 \cdot 10^{-3}$) (см. рис. 6, 7). Сила f_{12} , действующая на частицу в облаке, определяется коэффициентом C_d и скоростным напором: $f_{12} \sim C_d \rho_{11} (v_1 - v_2)^2 / d$. На начальной стадии ускорения ($t \leq 100$ мкс) можно пренебречь скоростью частиц $v_2 \ll v_1$, поэтому $f_{12} \sim C_d \rho_{11} v_1^2 / d$. Величина $j = \rho_{11} v_1$ для плотного и разреженного облаков примерно одна и та же. Для доказательства рассмотрим изменение j при пересечении струйкой газа фронта отраженной УВ ($m_2^0 = 3 \cdot 10^{-2}$). Обозначая скорость отраженной коллективной УВ через u , параметры газа перед УВ — индексом $-$, а за УВ — индексом $+$, из условия сохранения потока получим

$$\rho_{11}^+(v_1^+ - u) = \rho_{11}^-(v_1^- - u),$$

откуда

$$(3.5) \quad \frac{\Delta j}{\bar{j}} = \frac{\Delta \rho_{11}}{\rho_{11}^-} \frac{u}{v_1^-} \sim \frac{u}{v_1^-},$$

где $\Delta \rho_{11} = \rho_{11}^+ - \rho_{11}^-$; $\Delta j = j^+ - j^- = \rho_{11}^+ v_1^+ - \rho_{11}^- v_1^-$. Из рис. 5, 6 можно найти скорость отраженной УВ $u = \Delta z / \Delta t = 60$ м/с. Полагая в (3.5) $v_1^- \approx 700$ м/с, $u = 60$ м/с, имеем $\Delta j / \bar{j} \sim 0,1$, изменением j при пересечении газом УВ можно пренебречь.

Другим фактором, оказывающим влияние на f_{12} , является зависимость C_d от M_{12} . На это обстоятельство указывалось ранее в [3,4]. При $m_2^0 = 10^{-3}$ $M_{12} > 1$, а при $m_2^0 = 3 \cdot 10^{-2}$ $M_{12} < 1$, откуда с учетом C_d (M_{12}) получим неравенство $C_d(m_2^0 = 10^{-3}) > C_d(m_2^0 = 3 \cdot 10^{-2})$. Как показали расчеты, при $t \approx 50$ мкс имеем $C_d(m_2^0 = 3 \cdot 10^{-2}) \approx 0,44$, $C_d(m_2^0 = 10^{-3}) \approx 0,72$, поэтому, пренебрегая в первом приближении зависимостью j от m_2^0 , находим оценку

$$(3.6) \quad z_1^n / z_1^p \sim f_{12}^n / f_{12}^p \sim (C_d^n v_1^n) / (C_d^p v_1^p) \sim 0,3,$$

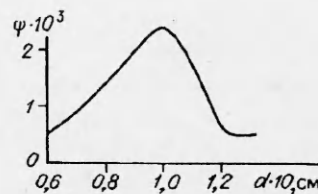
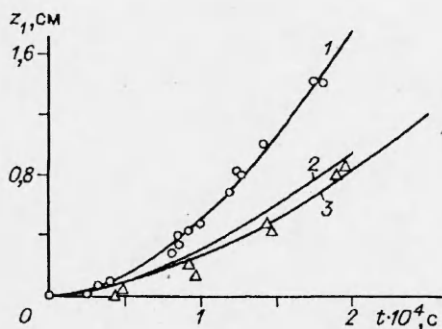
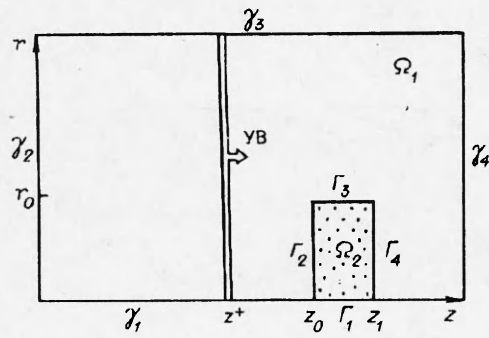


Рис. 9

Рис. 8



Р и с. 10

где индексом p обозначены величины при $m_2^0 = 3 \cdot 10^{-2}$, а индексом n — при $m_2^0 = 10^{-3}$. Приведенная оценка (3.6) сохраняется и на более поздние моменты времени, когда нельзя пренебречь величиной v_2 . Из анализа течения газа и частиц оргстекла, взятых в середине облака в момент $t = 150$ мкс, следует

$$j^n = \rho_{11}^n (v_1 - v_2)^n = 1,6 \cdot 10^3 \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}),$$

$$(v_1 - v_2)^n = 2,3 \cdot 10^2 \text{ м}/\text{с},$$

$$C_d^n = 0,44, j^p = \rho_{11}^p (v_1 - v_2)^p = 1,92 \cdot 10^3 \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}), (v_1 - v_2)^p = 4 \cdot 10^2 \text{ м}/\text{с}, C_d^p \approx 0,5,$$

откуда

$$\frac{f_{12}^n}{f_{12}^p} \sim \frac{C_d^n j^n (v_1 - v_2)^n}{C_d^p j^p (v_1 - v_2)^p} \sim 0,42.$$

Отметим, что при ускорении в УВ облака частиц бронзы, которые рассматриваются ниже, отличие f_{12}^n и f_{12}^p связано, в первую очередь, с зависимостью $C_d(M_{12})$. Так, на момент $t = 150$ мкс для частиц бронзы, находящихся в середине облака, имеем

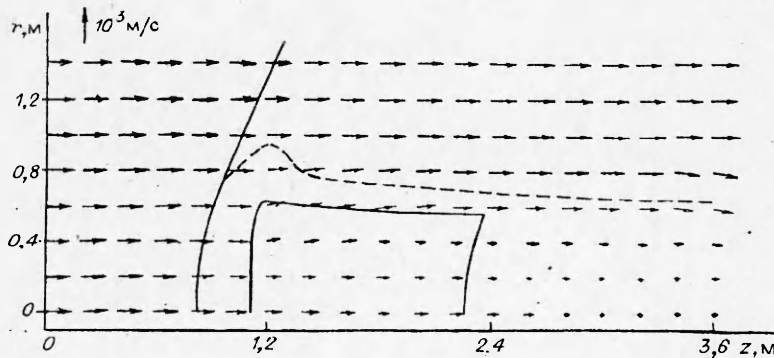
$$j^n = 2,46 \cdot 10^3 \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}), (v_1 - v_2)^n = 3,4 \cdot 10^2 \text{ м}/\text{с}, C_d^n = 0,45,$$

$$j^p = 2,48 \cdot 10^3 \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}), (v_1 - v_2)^p = 4,5 \cdot 10^2 \text{ м}/\text{с}, C_d^p = 0,83,$$

откуда

$$f_{12}^n / f_{12}^p \sim 0,75 C_d^n / C_d^p \sim 0,4.$$

Зависимость $z_1(t)$ при ускорении облака частиц бронзы приведена на рис. 8, где кружки и треугольники — результаты эксперимента при $m_2^0 = 10^{-3}$ и 10^{-2} , кривые 1 и 2 — результаты расчетов ускорения монодисперсного облака ($d_s = 130$ мкм, $M_0 = 2,8$) при $m_2^0 = 10^{-3}$ и 10^{-2} . Качественная картина здесь та же, что и на рис. 4. Кривой 3 показан расчет ускорения полидисперсного облака при $m_2^0 = 10^{-2}$ с функцией распределения по размерам, приведенной на рис. 9. По оси ординат (рис. 9) отложена величина $\psi = \frac{\pi d^3}{6} R(d) \Delta d$, а по оси абсцисс — диаметр d . Функция распределения $R(d)$ при $t = 0$ удовлетворяла условию



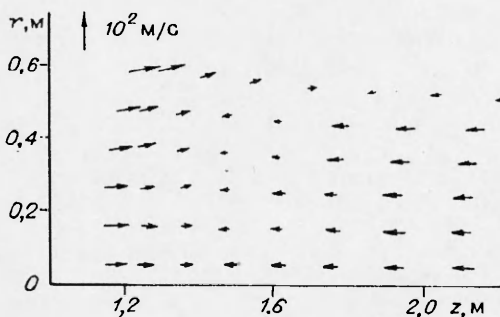
Р и с. 11

$$\int_{d_1}^{d_2} \frac{\pi d^3}{6} R(d) d(d) = m_2^0,$$

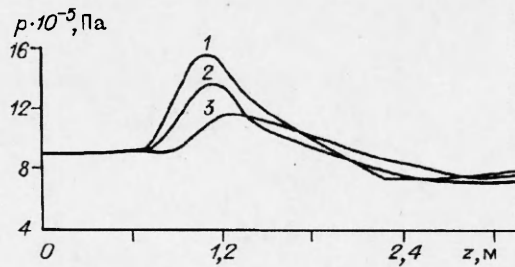
где $d_1 = 60$ мкм; $d_2 = 130$ мкм; $m_2^0 = 10^{-2}$. В расчетах выбирались семь фракций от d_1 до d_2 с шагом $\Delta d = 10$ мкм (рис. 9). Как следует из расчетов, полидисперсность слабо влияет на картину течения в облаке. Некоторое понижение $z_1(t)$ по сравнению с моодисперсным случаем $d_s = 130$ мкм связано с более быстрым формированием отраженной УВ. Как отмечалось выше, $t^* \sim \tau_o \sim d$, поэтому присутствие мелкой фракции уменьшает время образования отраженной УВ t^* . Другой особенностью полидисперсного течения является «сепарация» частиц, так что вблизи левой границы z_1 скапливаются крупные частицы, а вблизи правой границы z_2 — мелкие.

4. Рассмотрим однородное облако сферических частиц, имеющее ограниченные размеры по z и r , на которое слева набегают УВ (рис. 10). Буквой r_0 обозначена координата верхней границы облака в начальный момент $t = 0$, остальные обозначения совпадают с рис. 3. Предполагается, что облако является осесимметричным и находится в безграничной области, заполненной газом. (В численных расчетах область Ω_1 ограничена границами $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$, на которых для газа ставилось условие зеркальной симметрии, а на γ_1 полагалось $w_1 = 0$.) В Ω_1 решались уравнения идеального газа, а в Ω_2 — система (1.2), где полагалось $\zeta = 0,25, k = 1$ (осесимметричный случай). Расчеты проводились в системе центра масс облака. Начальные условия задавались формулами (3.1) при следующих параметрах газа и частиц: $\rho_{11}^0 = 1$ кг/м³, $p^0 = 8,64 \cdot 10^4$ Па, $\gamma = 1,4, M_0 = 3, z_0 = 0,9$ м, $z_1 = 1,9$ м, $r_0 = 0,6$ м, $\rho_{22} = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³, $d_s = 4 \cdot 10^{-3}$ м, $m_2^0 = 2 \cdot 10^{-2}$ (z_0, z_1 — координаты границ облака по z, r_0 — радиус облака) (рис. 10). Граничные условия для газа были описаны выше, для частиц на оси $r = 0$ ставится условие зеркального отражения, а на $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ — поглощения частиц. В результате взаимодействия набегающей УВ с облаком возникают отраженная и прошедшая УВ. Прошедшая УВ выходит из расчетной области через границу γ_4 , а отраженная УВ встает перед облаком частиц.

На рис. 11 стрелками показано поле скоростей газа в момент времени $t = 5,68 \cdot 10^{-3}$ с. Сплошными линиями обозначены отраженная УВ и граница облака, штриховой — звуковая линия ($M = 1$). Видно, что за облаком возникает застойная зона, в которой скорость газа существенно меньше, чем во внешней области ($r > 0,6$ м). Внутри облака вдоль z устанавливается постоянный отрицательный градиент давления, который компенсирует силу



Р и с. 13



Р и с. 12

— F_{12}^z , действующую на газ со стороны частиц. На рис. 12 приведена зависимость $p(z)$ при $t = 5,68 \cdot 10^{-3}$ с в трех сечениях $r = \text{const}$. Линия 1 соответствует оси $r = 0, 2$ — границе облака $r = 0,6$ м, 3 — $r = 1$ м. Увеличение r приводит к уменьшению амплитуды УВ и градиента давления в облаке, а также к смещению фронта УВ вниз по потоку.

На рис. 13 построено поле скоростей частиц в облаке на мо-

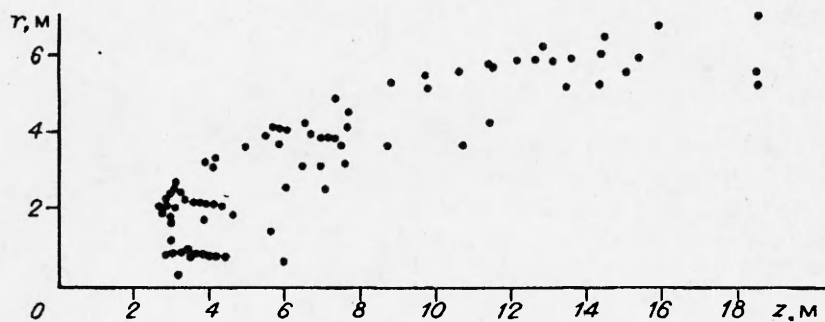


Рис. 14

мент времени $t = 5,68 \cdot 10^{-3}$ с. Из рис. 13 следует, что со временем происходят сжатие облака вдоль оси z и вынос частиц во внешнюю область ($r > 0,6$ м) через верхнюю границу Γ_3 . Существенно более сильная деформация облака происходит при взаимодействии с облаком УВ с $M_0 = 10$. На рис. 14 показано положение центров ячеек частиц на момент $t = 2,9 \cdot 10^{-2}$ с, возникающее в результате взаимодействия УВ ($M_0 = 10$) с облаком частиц, которое при $t = 0$ имело размеры: $z_0 = 6$ м, $z_1 = 13,5$ м, $r_0 = 2,75$ м и $m_2^0 = 2 \cdot 10^{-2}$. В результате деформации облака во внутренней области ($r \leq 2,8$ м) образуется достаточно плотное ядро ($m_2 \sim 4 \cdot 10^{-2}$), с «наветренной» стороны которого выносятся частицы, образующие вытянутый вниз по потоку «хвост» низкой плотности ($m_2 \sim 10^{-4} - 10^{-3}$).

Появление вытянутого «хвоста» связано с тем, что во внешней области ($r \geq 2,8$ м) скорость газа и коэффициент C_d больше, чем во внутренней области ($r \leq 2,8$ м), поэтому сила $f_{12} \sim C_d j(v_1 - v_2)$, действующая на каждую частицу во внешней области, также будет больше, чем во внутренней.

Коллективные эффекты, описанные выше, оказывают значительное влияние на ускорение центра масс облака частиц. На рис. 15 приведена зависимость скорости центра масс облака D от времени t для $m_2^0 = 2 \cdot 10^{-2}$ и $5 \cdot 10^{-4}$ (линии 1 и 2) после взаимодействия с облаком конечных

размеров ($z_0 = 0,9$ м, $z_1 = 1,9$ м, $r_0 = 0,6$ м) УВ с $M_0 = 3$. Скорость D для более плотного облака ($m_2^0 = 2 \cdot 10^{-2}$) в 2 раза меньше, чем для разреженного ($m_2^0 = 5 \cdot 10^{-4}$). Данный эффект связан с различным характером обтекания облака в этих двух случаях. Течение газа в разреженном облаке является сверхзвуковым ($M_{12} > 1$), а в более плотном — дозвуковым ($M_{12} < 1$). В результате сила $f_{12} \sim C_d(M_{12})j(v_1 - v_2)/2$, действующая на частицу в разреженном облаке, будет больше, чем в плотном.

В заключение авторы выражают благодарность В.М. Бойко за полезные обсуждения.

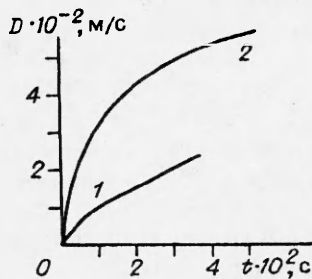


Рис. 15

ЛИТЕРАТУРА

1. Киселев С.П., Фомин В.М. Континуально-дискретная модель для смеси газ—твердые частицы при малой объемной концентрации частиц // ПМТФ. — 1986. — № 2.
2. Киселев С.П., Руев Г.А., Трунев А.П. и др. Ударно-волновые процессы в двух-компонентных и двухфазных средах. — Новосибирск: Наука, 1992.
3. Бойко В.М. Исследование динамики ускорения, разрушения и воспламенения частиц за ударными волнами методами лазерной визуализации: Автореф. дис. ...канд. физ.-мат. наук. — Новосибирск, 1984.

4. Boiko V.M., Fedorov A.V., Fomin V.M. et al. Ignition of small particles behind shock waves // Shock Waves, Explosions and Detonations. — N.Y., 1983. — (Progress in Astronautics and Aeronautics; V. 87).
5. Русанов В.В. Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счета разрывных решений // ДАН СССР. — 1968. — Т. 180, № 6.
6. Гриднев Н.П., Кацнельсон С.С., Фомичев В.П. Неоднородные МГД-течения с T -слоем. — Новосибирск: Наука, 1984.

г. Новосибирск

Поступила 13/IV 1993 г.

УДК 537.84

И.В. Краснослободцев

О ТЕРМОМАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЯХ ПРОВОДЯЩЕГО ГАЗА В СИЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТОВ ХОЛЛА

Рассматриваются медленные стационарные течения проводящего газа в произвольной области, когда магнитные силы и градиент давления в основной части потока по порядку величины превосходят силы инерции и вязкие напряжения, а закон Ома с учетом термотоков и эффектов Холла записывается в самом общем виде. Будем предполагать, что можно пренебречь искажением магнитного поля движущейся средой. Исследуемые течения характеризуются большим значением параметра МГД-взаимодействия, большим числом Гартмана и малым значением магнитного числа Рейнольдса.

Основные уравнения, описывающие движения проводящей среды при сделанных предположениях, имеют следующий вид:
уравнение неразрывности

$$(1) \quad \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0;$$

уравнение магнитной статики

$$(2) \quad \operatorname{grad} p = \frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{H});$$

обобщенный закон Ома при наличии термотоков

$$(3) \quad \mathbf{j} = \sigma (\operatorname{grad} \varphi + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} - \alpha \operatorname{grad} T) - \gamma (\mathbf{j} \times \mathbf{H}) + \kappa (\mathbf{j} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H};$$

закон сохранения заряда

$$(4) \quad \operatorname{div} \mathbf{j} = 0;$$

уравнение энергии

$$(5) \quad \rho c_v \frac{dT}{dt} = k \Delta T - p \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{j^2}{\sigma};$$

уравнение состояния

$$(6) \quad p = p(\rho, T).$$

Здесь ρ — плотность среды; σ — проводимость; v — скорость; p — давление; c — скорость света; j — плотность тока; H — напряженность магнитного поля; φ — электрический потенциал; k — коэффициент теплопроводности; c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме; T — температура; α —