

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ КРУГЛОЙ МЕМБРАНЫ В ДИНАМИКЕ

В. И. Базайкин, В. Н. Перетьяко

(Новокузнецк)

Изучение процесса деформирования мембран импульсными нагрузками является актуальной задачей в связи со все более широким внедрением в технологическую практику высокоскоростных методов обработки тонколистовых материалов (гидровзрывная, электромагнитная, электрогидравлическая штамповка). Динамике деформирования гибких мембран посвящен ряд работ [1, 2]. Вопросы осесимметричного пластического течения при импульсном нагружении изучались методом характеристик в [3, 4]. Важные прикладные аспекты взрывного нагружения мембран изложены в [5].

В данной работе обсуждается зависимость свойств поперечной пластической волны в мембране (волны формоизменения) от схемы напряженного состояния. Анализ движения проводится в приближенной постановке, не учитывающей радиальные смещения по эйлеровой координате и изменение толщины мембраны.

Материал мембраны подчиняется условию текучести Треска — Сен-Венана. Представлены результаты экспериментов по гидровзрывному нагружению мембран.

Теоретический анализ. Уравнения движения гибкой мембраны под действием гидровзрывного импульса могут быть записаны в виде

$$(1) \quad rh\sigma_r \sin \alpha = \frac{pr^2}{2} - h\mu \int r \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \frac{1}{\cos \alpha} dr;$$

$$\frac{h\sigma_r}{R_r} + \frac{h\sigma_\varphi}{R_\varphi} = p - h\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \cos \alpha,$$

где r — текущее расстояние точки до оси симметрии; w — вертикальное (осевое) смещение; t — время; α — угол между нормалью к данной точке мембраны и осью симметрии; σ_r и σ_φ — главные напряжения, меридиональное и окружное соответственно; p — давление в импульсе; $h \equiv \text{const}$ — толщина мембраны; μ — плотность материала; R_r и R_φ — главные радиусы кривизны, меридиональный и окружной;

$$R_r = 1/\cos^3 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}; \quad R_\varphi = r/\cos \alpha \frac{\partial w}{\partial r}.$$

На контуре мембраны $r=R$, $w=0$. Прогиб w осуществляется в сторону отрицательной полуоси. После введения безразмерных переменных $x=r/R$, $\tau = \sqrt{\sigma_0 t}/\sqrt{\mu R}$ (σ_0 — предел текучести), $u=w/R$, $\sigma_1 = \sigma_r/\sigma_0$, $\sigma_2 = \sigma_\varphi/\sigma_0$, $q = pR/2h\sigma_0$, проведения соответствующих преобразований система (1) в векторной форме [6] приводится к виду:

$$(2) \quad \frac{\partial \vec{z}}{\partial x} + A \frac{\partial \vec{z}}{\partial \tau} = \vec{b},$$

$$\frac{\partial \vec{z}}{\partial x} = \left\{ \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} \right\}, \quad \frac{\partial \vec{z}}{\partial \tau} = \left\{ \frac{\partial v}{\partial \tau}, \frac{\partial \alpha}{\partial \tau}, \frac{\partial \sigma_1}{\partial \tau} \right\};$$

$$\vec{b} = \left\{ 0, \left(\frac{2q}{\sigma_1 \cos \alpha} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1 x} \operatorname{tg} \alpha \right), \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{x} \right) \right\};$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{\cos^2 \alpha} & 0 \\ \frac{1}{\sigma_1} & 0 & 0 \\ \operatorname{tg} \alpha & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

где $v = \partial u / \partial \tau$, $\operatorname{tg} \alpha = \partial u / \partial x$. Система уравнений (2) замкнута, так как σ_2 связано с σ_1 условием текучести Треска — Сен-Венана. Характеристики квазилинейной системы (2) являются собственными значениями матрицы $A \det \|A - \xi E\|$, где E — единичная матрица. Система (2) имеет характеристики:

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \xi_0 = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} = \xi_+ = \sqrt{\frac{1}{-\sigma_1 \cos^2 \alpha}}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} = \xi_- = \sqrt{\frac{1}{-\sigma_1 \cos^2 \alpha}}.$$

По методу, изложенному в [6], можно найти нормированные левые собственные векторы \vec{l} системы (2) и рассмотреть дифференциальные формы $(\vec{l} \cdot d\vec{z})$.

Собственные векторы имеют вид

$$\vec{l}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sigma_1 \sin \alpha \\ \sqrt{\cos^2 \alpha + \sigma_1^2 \sin^2 \alpha} \\ \cos \alpha \\ \sqrt{\cos^2 \alpha + \sigma_1^2 \sin^2 \alpha} \end{pmatrix}; \quad \vec{l}_+ = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sqrt{\cos^2 \alpha - \sigma_1} \\ -\sqrt{-\sigma_1} \\ \sqrt{\cos^2 \alpha - \sigma_1} \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\vec{l}_- = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sqrt{\cos^2 \alpha - \sigma_1} \\ \sqrt{-\sigma_1} \\ \sqrt{\cos^2 \alpha - \sigma_1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как дифференциальные формы $(\vec{l}_0 \cdot d\vec{z})$, $(\vec{l}_+ \cdot d\vec{z})$ и $(\vec{l}_- \cdot d\vec{z})$ допускают интегрирующие множители

$$\kappa_0 = 2\sigma_1 \cos \alpha \sqrt{\cos^2 \alpha + \sigma_1^2 \sin^2 \alpha}, \quad \kappa_+ = \kappa_- =$$

$$= \sqrt{\cos^2 \alpha - \sigma_1} / \cos \alpha,$$

то систему (2) можно представить в инвариантах Римана s :

$$(3a) \quad \frac{\partial s_0}{\partial x} + \xi_0 \frac{\partial s_0}{\partial \tau} = \varphi_0 = \frac{2\sigma_2 \sigma_1}{x} - \frac{2\sigma_1^2}{x} \cos^2 \alpha - 4q\sigma \sin \alpha;$$

$$(3б) \quad \frac{\partial s}{\partial x} + \xi_+ \frac{\partial s}{\partial \tau} = \varphi_+ = \frac{2q - \sigma_2 \sin \alpha}{\sqrt{-\sigma_1 \cos^2 \alpha}};$$

$$(3в) \quad \frac{\partial s}{\partial x} + \xi_- \frac{\partial s}{\partial \tau} = \varphi_- = \frac{\sigma_2 \sin \alpha - 2q}{\sqrt{-\sigma_1 \cos^2 \alpha}},$$

где $s_0 = \sigma_1^2 \cos^2 \alpha$; $s_+ = v - \sqrt{-\sigma_1} \ln \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$;

$$s_- = v + \sqrt{-\sigma_1} \ln \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Очевидно, что уравнения (3) являются соотношениями на характеристиках:

$$(4a) \quad \tau = \text{const} : \frac{ds_0}{dx} = \varphi_0;$$

$$(4b) \quad \frac{d\tau}{dx} = + \sqrt{\frac{1}{-\sigma_1 \cos^2 \alpha}} : \frac{ds_+}{dx} = \varphi_+;$$

$$(4в) \quad \frac{d\tau}{dx} = - \sqrt{\frac{1}{-\sigma_1 \cos^2 \alpha}} : \frac{ds_-}{dx} = - \varphi_+.$$

Характеристика $\xi_0=0$ соответствует мгновенному распространению возмущений по всему отрезку оси x $[0; 1]$. Вдоль характеристик ξ_+ и ξ_- распространяются со скоростью $\sqrt{-\sigma_1 \cos^2 \alpha}$ прямая и обратная поперечные волны. Общий вид характеристик свидетельствует о том, что гиперболичность квазилинейной системы (2) выполняется лишь при сжимающих напряжениях, т. е. на фронте волны необходимо $\sigma_1 < 0$. Задача осложняется тем, что начальные условия задаются на характеристике $t=0$ (задача Гурса с параболичностью). Условие разрешимости системы (2) [6] заключается в выполнении на прямой $\tau=0$ соотношения

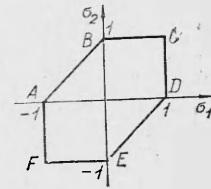
$$(5) \quad \cos \alpha \frac{d\sigma_1}{dx} - \sigma_1 \sin \alpha \frac{d\alpha}{dx} = \frac{\sigma_2}{x \cos \alpha} - \frac{\sigma_1 \cos \alpha}{x} - 2q \operatorname{tg} \alpha.$$

Можно заметить, что условие (5) — развернутая запись соотношения (4a) на характеристике $\tau=0$. Если задать $\alpha=0$ на x при $\tau=0$, из (5) получается уравнение осесимметричного равновесия

$$(6) \quad \frac{d\sigma_1}{dx} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{x} = 0.$$

Таким образом, параболичность системы по одной характеристике обусловлена пренебрежением эйлеровым радиальным смещением. Тот вклад в деформирование, который бы вносила продольная пластическая волна, теперь обеспечивается мгновенным перераспределением напряженно-деформированного состояния в ответ на каждое новое возмущение, вносимое поперечной волной. Однако принятое упрощение дало возможность записать систему (2) в инвариантах Римана, что позволило более внимательно исследовать природу поперечной пластической волны.

Пластическое течение невозможно без достижения предела текучести в центре или на краю мембраны. В силу (6) условие $\sigma_1 = \text{const}$ влечет за собой равенство $\sigma_1 = \sigma_2 = \text{const}$ на всей мембране. Значит, при $\alpha=0$, $\sigma_1 = \text{const}$ возможны состояния C или F (фиг. 1). Режим F не имеет смысла, так как он противоречит факту волнового распространения сжимающих напряжений. Режим C предполагает разрыв напряжений σ_1 в центре или на контуре заземления в момент $\tau=0$. На гладкое для системы (2) решение уравнения (6) накладывается ограничение $\sigma_1 < 0$ в окрестности $x=0$ либо $x=1$ в зависимости от того, рассматривается прямая или обратная волна. Ниже рассматривается обратная волна, распространяющаяся с конца отрезка $x=1$. Так как условие (6) продолжает действовать и при $\tau > 0$, то в окрестности движущегося фронта исключается режим FA . В центре мембраны необходимо $\sigma_1=1$. Единственным возможным в окрестности фронта следует считать режим AB . Решение (6) для режима AB с условием текучести $\sigma_2 - \sigma_1 = 1$, имеющее вид $\sigma_1 = \ln cx$, не удовлетво-



Фиг. 1

ряет введенным ограничениям. Следовательно, при отходе волны от контура заземления (при $\tau > 0$) форма мембраны в окрестности фронта отлична от плоской, и между σ_1 и α устанавливаются соотношения, удовлетворяющие (5).

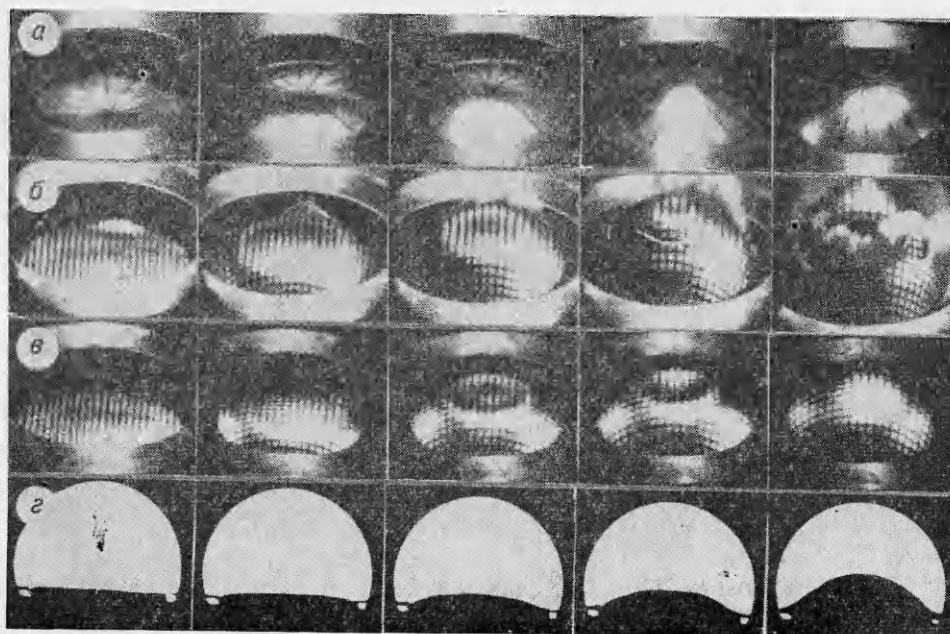
Необходимо определить тип волны. Она может быть слабой ударной волной или простой волной. Разрывное решение возможно вдоль характеристики или вдоль линии, на которой пересекаются приходящие характеристики (рассматривается фазовая плоскость τx). Следует рассмотреть возможность разрыва решений v , α и σ_1 вдоль характеристик. Для уравнения (3а) уравнения (3б, в) являются «остающимися» по терминологии [7]. Так как в «остающихся» уравнениях имеются производные от v , α поперек характеристик $\tau = \text{const}$, то невозможен разрыв v и α , а возможен разрыв σ_1 (v и α — кусочно-гладкие функции по τ). Подобное рассмотрение двух других уравнений системы (3) приводит к выводу о невозможности разрыва v , α и σ_1 поперек характеристик.

Приходящие характеристики пересекаются вдоль линий $x=0$, $x=1$ и $\tau = \text{const}$. Следовательно, возможны лишь контактные разрывы на линиях $x=0$ и $x=1$. Таким образом, волна формоизменения является простой волной, которая в точках $x=0$ и $x=1$ может вырождаться в слабую ударную волну. Более конкретное рассмотрение вопроса о природе простой волны затруднительно, так как проблемы существования решения задачи Гурса для системы трех квазилинейных уравнений и сама постановка задачи не разработаны до настоящего времени. Можно лишь указать, что присутствие давления p в системе (2) исключает в общем случае автомодельность (центрированные волны). В частном случае, когда инвариант s_0 постоянен вдоль характеристик ξ_+ , ξ_- , решением может быть центрированная волна.

Процесс формоизменения качественно можно представить следующим образом. Начальные условия: $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ на $0 \leq x \leq 1$. В момент $\tau = 0$ мгновенно устанавливаются соотношения $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ на $0 \leq x < 1$, $\sigma_1 = \sigma_2 = -1$ на $x = 1$, соответствующие контактному разрыву на $x = 1$. Форма мембраны при $\tau = 0$ плоская. При $\tau > 0$ от контура заземления начинает распространяться волна формоизменения, на фронте которой $\sigma_1 = \sigma_2 = -1$. Распределение σ_1 между контуром и центром мембраны непрерывно. Напряжение σ_2 на фронте терпит разрыв вдоль FA . Разрыв σ_2 по FA допускается системой (2), так как производные по σ_2 не входят в определяющие уравнения. Отход волны от контура и сужение области состояния S на мембране обуславливает выпучивание мембраны, удовлетворяющее (4а). При подходе к центру мембраны волна снова вырождается в слабую ударную волну по σ_1 (особенность при $x=0$). При этом напряжения в центре мгновенно принимают значения $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$.

Если бы не параболичность уравнений (2), то волной процесс мог бы продолжаться до конца действия импульса давления. Однако соотношение (3а) «выравнивает» схему напряжений необратимым образом (что вообще свойственно параболическому оператору) в сторону растягивающих напряжений. Это приводит к снижению интенсивности волнового процесса, а затем к переходу гиперболической системы (2) в эллиптическую. В дальнейшем вся мембрана растягивается локализованно. Так как напряженно-деформированное состояние в момент окончания действия волны служит начальным условием для эллиптической системы, окончательное распределение деформаций должно нести на себе «волновые» следы и отличаться от распределения в статике. Следует учесть, что значения остаточных деформаций достигаются лишь во время эллиптичности системы (2). Волновой механизм формоизменения является лишь одним из механизмов деформирования, описываемых полным решением смешанной системы (2).

Экспериментальные результаты. Была проведена серия экспериментов по гидровзрывному нагружению круглых мембран из стали 08 кп, меди М2 и алюминия АД1 в лабораторном устройстве, моделирующем бассейн с жесткими стенками. Процесс деформирования регистрировался камерой СФР по искажениям нанесенных на плоскость мембран делительных сеток. Для точного определения остаточных деформаций был применен муаровый метод. Схема синхронизации установки и методика нанесения линейных растров описаны в [8]. В качестве ВВ применялся ТЭН (тетраэритритпентанитрат). Значения коэффициента вытяжки мембраны (отношение диаметра исходной мембраны к диаметру деформированной, диаметры замеряются по фланцу) находились в интервале 1,00—1,20.



Фиг. 2

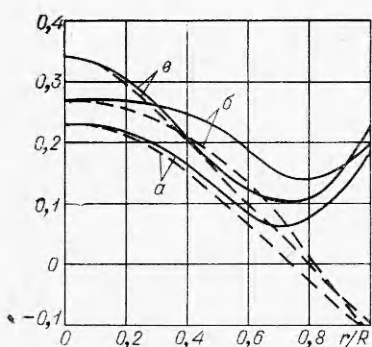
На фиг. 2 представлены кинограммы процесса формоизменения. Фиг. 2, *a* иллюстрирует деформирование стального образца без разрушения; 2, *б, в* — медного и алюминиевого с разрушением. Кинограммы 2, *z* (теневая съемка) фиксируют деформирование свободно лежащей мембраны. Весь процесс деформирования мембран длится ~ 200 мкс.

Распределения остаточных меридиональных и окружных деформаций, предшествующих разрушению, для трех исследуемых материалов приведены на фиг. 3.

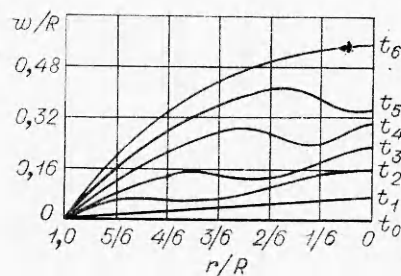
Из кинограмм фиг. 2 видно, что в короткий начальный период меридиан мембраны деформируется как единое целое. Отсутствуют движущиеся локальные искривления поверхности. Она принимает форму, близкую к тупому конусу. Затем с контура защемления распространяется волна кривизны мембраны. Четко различима кольцевая вогнутость на ее фронте. Выпуклость центральной части сохраняется до определенного момента, соответствующего приходу кольцевой вогнутости в центр. Затем происходит схлопывание образовавшейся центральной вогнутости. Фиг. 4 схематически изображает развитие формоизменения мембраны. Внимательное изучение искажения делительной сетки показало, что за фронтом

волны деформации растягивающие, на фронте — сжимающие, перед фронтом искажение сетки не наблюдается (с точностью измерения). Разумно поэтому предположить, что кольцевая вогнутость является фронтом пластической волны, несущим наибольшие сжимающие напряжения, сама же вогнутость объясняется динамической потерей устойчивости формы под действием сжимающих напряжений. Таким образом, конец волнового деформирования, соответствующий приходу пластической волны в центр мембраны, фиксирует состояние с центральной вогнутостью. Последующее деформирование локализовано.

Изложенный выше механизм формоизменения подтверждается провалом остаточных растягивающих меридиональных деформаций посредине отрезка оси x [0; 1] (см. фиг. 3). Их распределение в статике не имеет такой особенности. Кроме того, как следует из фиг. 2, z , условия на контуре существенно не влияют на распространение волны формоизменения.



Фиг. 3



Фиг. 4

Остаточные деформации свободно лежащей мембраны практически равны нулю. Следовательно, основной процесс деформирования происходит после исчерпания пластической волны. Но ее присутствие влияет на характер распределения меридиональных деформаций при последующем деформировании.

В заключение отметим, что теоретический анализ, развитый в первом разделе, соответствует реальному поведению мембраны при динамическом нагружении. Фронт пластической волны несет в себе сжимающие напряжения. Четкое его проявление вызвано неучитываемой идеально пластической постановкой задачи динамической потери устойчивости, возможной на фронте при $\sigma_2 < 0$. Уравнения (2) допускают разрыв σ_2 , так что возможен косвенный учет потери устойчивости. Пренебрежение радиальными смещением и инерцией (параболичность системы (2)) вносит неопределенность в распределение напряжений в окрестностях фронта поперечной волны. При учете радиальной инерции характеристика $\tau = \text{const}$ переходит в семейство характеристик продольной волны. Взаимодействие продольных и поперечных волн приводит к быстрому переходу от сжимающих к растягивающим напряжениям. Особенно значительно это взаимодействие для материалов с ярко выраженным упрочнением (медь). В этом случае происходит резкое сужение пучка центрированных волн и быстрое убывание сжимающих напряжений за фронтом. Фиг. 2, б подтверждает этот вывод: растягивающие напряжения за фронтом вблизи его приводят к разрыву мембраны по параллели.

С позиций данной работы можно объяснить результат [9], заключающийся в том, что динамическая кривая упрочнения, вычисленная

по значениям скорости поперечной волны и остаточных деформаций, не отличается от статической кривой. Здесь следует учесть, что фронт волны связан со сжимающими напряжениями, в крайнем случае (если исключена неустойчивость) приводящими к сжимающим деформациям. Остаточные растягивающие деформации обусловлены неволновым периодом динамического деформирования. Исследование [10] указывает на значительное отличие динамической кривой упрочнения от статической при скоростях деформации $\sim 5 \cdot 10^2 \text{ с}^{-1}$.

Поступила 15 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М., Физматгиз, 1961.
2. Кристеску Н. Динамическая пластичность. Механика.— «Сб. переводов и обзор. иностр. пер. печати», 1969, т. 115, № 3.
3. Щеглов Б. А. Осесимметричное формообразование тонколистовых деталей при динамическом воздействии.— «Машиноведение», 1971, № 4.
4. Щеглов Б. А. Динамика осесимметричного формообразования тонкостенных оболочек.— В кн.: Расчеты процессов пластического течения металлов. М., «Наука», 1973.
5. Штамповка взрывом. Под ред. М. А. Анучина. М., «Машиностроение», 1972.
6. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений. М., «Наука», 1968.
7. Фрейденваль А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
8. Перетятько В. Н., Базайкин В. И. Методика исследования динамики пластического деформирования.— «Завод. лабор.», 1973, № 12.
9. Власов Б. Ф. Исследование механических свойств тонколистовой меди и дюралюминия в процессах высокоскоростного деформирования.— В кн.: Расчеты процессов пластического течения металлов. М., «Наука», 1973.
10. Базайкин В. И., Перетятько В. Н. Экспериментальное исследование распространения пластических волн в медных пластинках.— ПМТФ, 1974, № 1.

УДК 539.3+534.231.1

К ОЦЕНКЕ СТЕПЕНИ АНИЗОТРОПИИ УПРУГИХ СРЕД

В. С. Будаев

(Москва)

Исследуются кривые рефракции, геометрия волновых фронтов и их изменение при варьировании упругих постоянных анизотропных сред в широких пределах. Получен количественный критерий, по величине которого можно судить о количестве и расположении лагун, свойствах корней характеристического уравнения и других важных характеристиках среды.

1. Рассматриваются среды, уравнения движения которых в условиях плоской деформации записываются в виде

$$(4.1) \quad \begin{aligned} c_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + c_3 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\rho a_1 f; \\ c_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + c_4 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -\rho a_2 f, \end{aligned}$$