ПМТФ, № 6, 1972

УДК 532.516

ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА

В. О. Бытев

(Новосибирск)

Рассматриваются некоторые инвариантные решения уравнений Навье — Стокса. Доказываются теоремы существования решений краевых задач соответствующих систем S/H.

1. Известно, что наиболее широкая группа непрерывных преобразований, допускаемая системой уравнений Навье — Стокса

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} - \Delta\mathbf{u} + \nabla\mathbf{p} = 0$$
$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$$

порождается следующими операторами:

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad S = \varphi(t)\frac{\partial}{\partial p}$$
$$X_{kl} = x^l\frac{\partial}{\partial x^k} - x^k\frac{\partial}{\partial x^l} + u^l\frac{\partial}{\partial u^k} - u^k\frac{\partial}{u^l} \quad \begin{pmatrix} k<l \\ k,\, l = 1, 2, 3\end{pmatrix} \tag{1.1}$$
$$T_k = \psi_k(t)\frac{\partial}{\partial x^k} + \psi_k'(t)\frac{\partial}{\partial u^k} - x_k\psi_k''(t)\frac{\partial}{\partial p} \quad (k = 1, 2, 3)$$
$$Z = 2t\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3}\left(x^k\frac{\partial}{\partial x^k} - u^k\frac{\partial}{\partial u^k}\right) - 2p\frac{\partial}{\partial p}$$

где φ, $\psi_k(t)$ $(k = 1, 2, 3)$ — произвольные функции переменного t.

2. При изучении инвариантных решений наиболее существенным моментом является интерпретация их. Оказывается, что из группы G, порожденной операторами (1.1), можно выделить подгруппу G_{11} такую, что любое инвариантное решение, построенное на ее подгруппах, описывает течение со свободной границей. Справедлива следующая теорема, доказанная в работе [1].

Теорема 1. Если $u^k = \varphi^k(\mathbf{x}, t)$, N — инвариантные многообразия относительно одной и той же подгруппы H группы G_{11}, то и условия на свободной границе

$$(-\mathbf{p}I + 2D)\nabla\mathbf{F} = 0, \qquad \mathbf{F}_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{F} = 0$$

также инвариантны относительно этой же подгруппы ($N : \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = 0$ — уравнение свободной границы).

Поэтому с точки зрения приложений к задачам со свободной границей представляет интерес классификация неподобных подгрупп первого, второго и третьего порядка группы G_{11}. Выпишем отдельно базис группы G_{11}

$$X_0, X_{kl}, Z, X_k = \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad Y_k = t\frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{\partial}{\partial u^k} \quad (k = 1, 2, 3)$$

Следуя известной методике [2], построены оптимальные системы подгрупп первого, второго и третьего порядков. При построении оптимальных систем использовался тот факт, что все они являются разрешимыми, за исключением одной — $\langle X_{12}, X_{23}, X_{31}\rangle$. Поэтому если известна оптимальная система θ_{s-1}, то, дополняя каждую s — 1-мерную подалгебру из системы θ_{s-1} до подалгебры размерности s и исключая подобные подалгебры этой размерности, получим оптимальную систему θ_s, s-мерных подалгебр [3]. В случае двух независимых переменных это сделано в работе [1]. Естественно, что большинство инвариантных решений являются уже известными и хорошо изученными [4]. О некоторых новых инвариантных решениях будет сказано ниже.

3. В настоящее время известно несколько примеров точных решений, описывающих движение жидкости со свободными границами (см., например, [1,4,5]). Приведем еще один, довольно простой, пример течения со свободной границей.

Пусть вязкая несжимаемая жидкость заполняет в начальный момент времени сферический слой ($R_{20} \leqslant r \leqslant R_{10}$) и имеет заданную радиальную скорость. Движение предполагается сферически-симметричным. Случай $R_{10} = \infty$ рассматривался Рэлеем [6]. Из уравнений Навье — Стокса, записанных в сферической системе координат, получаем уравнения для v_r, p, которые следует решить в области $\Omega : \{t > 0,\ R_2(t) \leqslant r \leqslant R_1(t)\}$. Здесь $r = R_{1,2}(t)$ — соответственно внешняя и внутренняя границы сферического слоя, которые заранее неизвестны. Интегрируя уравнение неразрывности, получаем

$$v_r = r^{-2}\varphi(t) \tag{3.1}$$

Из равенства нулю вектора напряжений на свободной границе получаем следующие краевые условия:

$$\tau_{rr} \equiv -p - 4\nu\varphi / r^3 = 0 \quad \text{при } r = R_{1,2}(t) \tag{3.2}$$

Из кинематического условия на свободной границе

$$dR_{1,2}(t) / dt = \varphi / R_{1,2}{}^2(t) \tag{3.3}$$

следует закон сохранения объема

$$R_1{}^3(t) - R_2{}^3(t) = R_{10}{}^3 - R_{20}{}^3 \equiv a^3 > 0 \tag{3.4}$$

Далее

$$d\varphi / dt = (d\varphi / dR_2)(dR_2 / dt)$$

поэтому уравнение импульса сводится к

$$\frac{d\varphi}{dR_2} = \frac{\varphi}{2R_2}\left[1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2{}^2}{R_1{}^2} + \frac{R_2{}^3}{R_1{}^3}\right] 4\nu - \left[1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2{}^2}{R_1{}^2}\right] \tag{3.5}$$

К уравнению (3.5) следует присоединить начальное условие

$$\varphi(R_{20}) = \Phi_0 \tag{3.6}$$

Задача Коши (3.5), (3.6) решается явно

$$\varphi = \left\{\Phi_0 - \int\limits_{R_{20}}^{R_2(t)} g \exp\left[-\int\limits_{R_{20}}^{R_2(t)} f dR_2\right] dR_2\right\} \exp\left\{\int\limits_{R_{20}}^{R_2(t)} f dR_2\right\}$$

$$f \equiv \frac{1}{2R_2}\left[1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2{}^2}{R_1{}^2} + \frac{R_2{}^3}{R_1{}^3}\right], \qquad g \equiv 4\nu\left[1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2{}^2}{R_1{}^2}\right]$$

Значениям $\Phi_0 > 0$ соответствует расхождение сферического слоя, а $\Phi_0 < 0$ — сжатие. Ясно, что при расхождении сферического слоя всегда существует такое $R_2 = R_*$, что $\varphi(R_*) = 0$. Покажем, что время расхождения сферического слоя до критического радиуса R_* бесконечно. Действительно, пусть $R_2 \to R_*$, тогда первый член в правой части (3.5) стремится к нулю, а второй — к некоторой постоянной величине. Поэтому $\varphi = O(R_* - R_2)$ и интеграл

$$\int\limits_{R_{20}}^{R_2(t)} \frac{R_2^2}{\varphi(R_2)} dR_2 = t \tag{3.7}$$

расходится при $R_2 \to R_*$. Аналогично и для сжатия всегда существует такое $R_2 = R_*'$, что $\varphi(R_*') = 0$ и время сжатия сферического слоя до критического радиуса R_*' бесконечно.

Рассмотрим еще одну задачу, связанную со сферическим слоем. Ее постановка отличается от постановки предыдущей тем, что разность давлений на внутренней и внешней границах сферического слоя не предполагается нулевой, а является функцией времени. По-прежнему закон сохранения объема будет выполнен, изменится лишь уравнение для определения φ. Выпишем его и начальное условие, которому удовлетворяет функция φ

$$\varphi \frac{d\varphi}{dR_2} - \frac{\varphi}{2} R_2^2 \left[\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right)\left(\frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{R_1^2}\right)\right] +$$
$$+ 4\nu\varphi R_2^2 \left[\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2}\right] - \frac{\psi R_1 R_2^3}{R_1 - R_2} = 0 \tag{3.8}$$

$$\varphi(R_{20}) = \Phi_0 \tag{3.9}$$

где $\psi = f_1(t) - f_2(t)$, $f_1(t)$ — давление на внутренней границе сферического слоя, $f_2(t)$ — давление на внешней границе, $r = R_{1,2}(t)$ — соответственно внешняя и внутренняя границы. Пусть для определенности $\psi \geqslant c > 0$, тогда, используя дифференциальные неравенства типа Чаплыгина, аналогично [5] получаем следующий результат. При сжатии сферического слоя с положительным перепадом давления ψ и $\Phi_0 < 0$ всегда существует такое $R_2 = R_*$, что $\varphi(R_*) = 0$ и время сжатия до критического радиуса R_* конечно. Затем наступает расхождение сферического слоя. Здесь в отличие от предыдущего случая критического радиуса не существует.

4. Структура бесконечномерных групп Ли изучена недостаточно, в частности неизвестно, как перечислять неподобные подгруппы заданной группы. Поэтому придется ограничиться лишь построением некоторых примеров использования операторов, принадлежащих группе G.

Рассмотрим трехпараметрическую подгруппу —$\langle T_1, T_2, T_3\rangle$. Функции ψ_k, входящие в операторы T_k, фиксированы, но произвольны. Решения уравнений Навье — Стокса следует искать в следующем виде:

$$u_1 = x_1\psi_1(t) + A(t),\quad u_2 = x_2\psi_2(t) + B(t),\quad u_3 = x_3\psi_3(t) + C(t)$$
$$P = -\tfrac{1}{2}\,[x_1^2(\psi_1' + \psi_1^2) + x_2^2(\psi_2' + \psi_2^2) + x_3^2(\psi_3' + \psi_3^2)] + \gamma(t)$$

Решения такого типа использовались Хопфом для построения примера неединственности решения задачи Коши для уравнений Навье—Стокса в классе решений с линейным ростом скоростей и квадратичным давлением [7]. Однако фактически пример Хопфа построен для уравнений Эйлера. Приведем пример неединственности решения задачи Коши, который существенно учитывает наличие вязких членов в уравнениях Навье—Стокса. Для этого рассмотрим подгруппу (плоский случай) $\langle T_1 + T_2, S\rangle$, причем $\psi_1 \equiv 1$, а ψ_2 — некоторая фиксированная функция переменного t и класса C^3. Инварианты этой подгруппы следующие:

$$J_1 = \xi \equiv x_2 - \psi_2 x_1,\quad J_2 = t,\quad J_3 = u_1,\quad J_4 = u_2 - x_1\psi_2'(t)$$

Поэтому решение разыскивается в виде

$$u_1 = u(\xi,\ t),\quad u_2 = x_1\psi_2'(t) + v(\xi,\ t) \tag{4.1}$$
$$P = {}^1/_2 x_1^2\, \psi_2''(t)\, \psi_2(t) - x_1 x_2 \psi_2''(t) + \gamma(\xi,\ t)$$

Следует отметить, что данное решение является частично инвариантным. Подставляя (4.1) в уравнения Навье — Стокса, после исключения функции $\gamma(\xi,\ t)$ получаем уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}$$
$$W = (1 + \psi_2^2)\, u - \xi\psi_2',\qquad \tau = \int (1 + \psi_2^2(t))\, dt$$

Из уравнения неразрывности следует, что $v = \psi_2 u$. Пусть $\psi_2 \in C^3$ такова, что $\psi_2(0) = \psi_2'(0) = \psi_2''(0) = 0$, тогда задача, обобщающая известную задачу о диффузии вихревого слоя, с начальным полем скоростей $u_1 = u(x_2)$, $u_2 = 0$ имеет бесконечное множество решений в классе функций, растущих линейно по одной из пространственных координат. Заметим, что известное решение задачи о диффузии вихревого слоя, в котором $u_2 \equiv 0$, $u_1 = u(x_2,\ t)$ получается при $\psi_2 \equiv 0$.

Приведем еще один пример использования операторов из полной группы G. Рассмотрим подгруппу $\langle X_{12} + S\rangle$ (плоский случай). Инвариантное решение надо искать в следующем виде:

$$u_r = u(r, t),\quad u_\theta = v(r, t),\quad p = -\varphi(t)\,\theta + \gamma(r, t)$$

Пусть $u \equiv 0$, тогда можно поставить такую краевую задачу. Задан кольцевой сектор $\Omega : \{R_2 \leqslant r \leqslant R_1,\ 0 < \beta \leqslant \theta \leqslant \alpha < 2\pi\}$, $r = R_{1,2}$ — твердые стенки. Требуется описать движение вязкой несжимаемой жидкости типа течения Пуазейля в криволинейной трубе под действием нестационарного перепада давления. Запишем уравнения и краевые условия

$$\frac{\partial \gamma}{\partial r} = \frac{v^2}{r}$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\varphi(t)}{r} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}$$
$$v|_{t=0} = v_0(r)$$
$$v|_{r=R_{1,2}} = 0 \qquad (v_0(R_1) = v_0(R_2) = 0)$$

Решение поставленной задачи дается формулой

$$v(r, t) = v_0(r) + \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t)\, w_i(r)$$
$$w_i(r) = Y_1(\lambda_i R_2)\, J_1(\lambda_i r) - J_1(\lambda_i R_2)\, Y_1(\lambda_i r)$$

J, Y — функции Бесселя первого и второго рода

$$a_i(t) = e^{-\lambda_i^2 t} \int_0^t F_i(t)\, e^{-\lambda_i^2 t} dt$$
$$F = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_0(r))\right) + \frac{\varphi(t)}{r}$$

F_i — коэффициенты разложения в ряд Фурье функции F по w_i. Собственные числа λ_i находятся из соотношений

$$Y_1(\lambda_i R_2)\, J_1(\lambda_i R_1) - J_1(\lambda_i R_2)\, Y_1(\lambda_i R_1) = 0$$

5. Рассмотрим двухпараметрическую подгруппу — $\langle k\partial/\partial p - \partial/\partial\theta, \partial/\partial t\rangle$. Инвариантное решение уравнений Навье — Стокса ищется в виде

$$u_r = u(r,z), \quad u_\theta = v(r,z), \quad u_z = w(r,z), \quad p = -k\theta + p(r,z)$$

Пусть в плоскости $\theta = \mathrm{const}$ задана область Ω с границей $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$, не содержащая начала координат. Поворотом области Ω на некоторый угол β, меньший $2\pi / k$, вокруг оси z получим криволинейную трубу постоянного сечения. Обозначим через R расстояние до сечения трубы от начала координат. Требуется описать движение вязкой несжимаемой жидкости внутри трубы под действием постоянного перепада давления на ее концах.

Запишем уравнения Навье — Стокса в цилиндрической системе координат для векторной функции $\mathbf{V}$ с компонентами u, v, w

$$u\frac{\partial u}{\partial r} + w\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2}\right] \tag{5.1}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial r} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = \frac{k}{r} + \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2}\right] \tag{5.2}$$

$$u\frac{\partial w}{\partial r} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right] \tag{5.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial}{\partial z}(rw) = 0 \tag{5.4}$$

К уравнениям (5.1) — (5.4) следует добавить краевое условие

$$\mathbf{V}|_{\partial\Omega} = 0 \tag{5.5}$$

Для решения краевой задачи (5.1) — (5.5) вводится функциональное пространство $H(\Omega)$, элементами которого являются векторные функции $\mathbf{V}(r, z)$, определенные в Ω. Пространство $H(\Omega)$ получается пополнением множества $\mathring{J}(\Omega)$ всех бесконечно дифференцируемых, финитных в Ω, соленоидальных векторных функций по норме, порожденной скалярным произведением

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \int\limits_\Omega \nabla\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v}\, r\,dr\,dz$$

Пусть $\mathbf{\Phi}(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) \in H(\Omega)$. Умножим (5.1) — (5.3) соответственно на Φ_1, Φ_2, Φ_3, сложим и проинтегрируем по Ω

$$\int\limits_\Omega (\nu\nabla\mathbf{V}\cdot\nabla\mathbf{\Phi} - \mathbf{V}\cdot\mathbf{V}\cdot\nabla\mathbf{\Phi})\, r\,dr\,dz =$$

$$= \int\limits_\Omega \left[\frac{k}{r}\Phi_2 - \frac{v}{r}(\Phi_2 u - \Phi_1 v) - \frac{\nu}{r^2}(\Phi_1 u + \Phi_2 v)\right] r\,dr\,dz \tag{5.6}$$

Интегральное тождество (5.6) кладется в основу для определения обобщенного решения задачи (5.1) — (5.5). Докажем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Задача (5.1) — (5.5) имеет по крайней мере одно обобщенное решение.

Доказательство теоремы существования решения задачи (5.1) — (5.5) аналогично доказательству теоремы существования решения нелинейной стационарной внутренней краевой задачи, изложенному в [8]. Применение метода [8] оправдано наличием априорной оценки

$$\|\mathbf{V}\|_{H(\Omega')} \leqslant kC(\Omega') \tag{5.7}$$

Оценка (5.7) получается из (5.6), если положить $\Phi \equiv \mathbf{V}$ и сделать замену переменной

$$r = R + \xi$$

6. Рассмотрим подгруппу $\langle k\partial/\partial z - \partial/\partial\theta,\ \partial/\partial t\rangle$.

Инвариантное решение относительно этой подгруппы имеет вид

$$u_r = u(r, \xi), \quad u_\theta = v(r, \xi), \quad u_z = w(r, \xi), \quad p = p(r, \xi), \quad \xi = z + k\theta$$

Подставляя эти выражения в уравнения Навье — Стокса, записанные в цилиндрической системе координат, получаем

$$u\frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{1}{r}kv + w\right)\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{v^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \left(1 + \frac{k^2}{r^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{2k}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{u}{r^2}\right] \tag{6.1}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial r} + \left(\frac{1}{r}kv + w\right)\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{uv}{r} = -\frac{k}{r}\frac{\partial p}{\partial \xi} + \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \left(1 + \frac{k^2}{r^2}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{2k}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{v}{r^2}\right] \tag{6.2}$$

$$u\frac{\partial w}{\partial r} + \left(\frac{1}{r}kv + w\right)\frac{\partial w}{\partial \xi} = -\frac{\partial p}{\partial \xi} + \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \left(1 + \frac{k^2}{r^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right] \tag{6.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial}{\partial \xi}(kv + rw) = 0 \tag{6.4}$$

К уравнениям (6.1) — (6.4) следует добавить краевое условие

$$\mathbf{V}|_{\partial\Omega} = \mathbf{A}(r, \xi) \tag{6.5}$$

и условие периодичности по ξ с периодом l

$$\mathbf{V}(r, \xi + l) = \mathbf{V}(r, \xi) \tag{6.6}$$

Область Ω в переменных r, ξ представляет собой кусок плоскости, ограниченный прямыми $\xi = 0$, l, $r = R_2$ и кривой $r = r(\xi)$, причем r изменяется в пределах $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Вектор $\mathbf{A}(r, \xi)$ имеет компоненты $\{0, q\,r, q\}$, $\{0, q\,R_1, q\}$, $\{0, 0, 0\}$. Данное спиральное течение может быть интерпретировано как решение задачи об «Архимедовом винте».

Теорема 3. Задача (6.1) — (6.6) имеет по крайней мере одно обобщенное решение.

Рассмотрим множество $\dot{H}(\Omega, l)$ соленоидальных бесконечно дифференцируемых в области Ω векторов таких, что они периодичны по ξ с периодом l и обращаются в нуль вблизи границы $\partial\Omega$. Обозначим через $H(\Omega, l)$ гильбертово пространство с нормой

$$\|\mathbf{u}\|^2_{H(\Omega,l)} = \int_\Omega \left\{\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi}\right)^2\right\} r\,dr\,d\xi \tag{6.7}$$

Пространство $H(\Omega, l)$ получается пополнением $\dot{H}(\Omega, l)$ по норме (6.7). Пусть $\Phi \in H(\Omega, l)$. Умножим (6.1) — (6.3) соответственно на $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, сложим и проинтегрируем по Ω

$$\int\limits_{\Omega}\{\nu\nabla\mathbf{V}\cdot\nabla\mathbf{\Phi}-\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}\cdot\nabla\mathbf{\Phi}\}\,rdrd\xi= \tag{6.8}$$

$$=\int\limits_{\Omega}\left\{\varphi_1\frac{v^2}{r}-\varphi_2\frac{uv}{r}-\nu\left[\frac{2k}{r^2}\left(\varphi_1\frac{\partial v}{\partial\xi}-\varphi_2\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)+\varphi_1\frac{u}{r^2}+\varphi_2\frac{v}{r^2}\right]\right\}rd\,rd\xi$$

Интегральному тождеству (6.8) удовлетворяет любое решение системы (6.1) — (6.4) независимо от краевых условий.

Определение. Функция $\mathbf{V}\,(r,\ \xi)$ называется обобщенным решением задачи (6.1) — (6.6), если существует такая соленоидальная вектор-функция $\mathbf{a}\in W_2^{\,1}(\Omega,\ l)$, что $\mathbf{a}\,|_{\partial\Omega}=\mathbf{A}$, $\mathbf{V}-\mathbf{a}\equiv\mathbf{u}\in H\,(\Omega,\ l)$, тождество (6.8) выполнено для любой $\mathbf{\Phi}\in H\,(\Omega,\ l)$.

Можно показать, что (6.8) эквивалентно некоторому операторному уравнению вида $\mathbf{u}=F\mathbf{u}+f$ с вполне непрерывным оператором F, аналогично тому, как это сделано в [8]. Поэтому доказательство теоремы существования решения сводится к получению априорной оценки $\|\,\mathbf{u}\,\|$ в пространстве $H\,(\Omega,\ l)$.

Отметим, что получение ее не вполне тривиально. Это связано с тем, что область Ω в переменных r, θ, z неограничена. Поэтому оценка интеграла Дирихле, полученная в [8] для внутренней стационарной задачи, здесь не применима. Однако в переменных r, ξ область Ω ограничена, что и позволяет получить априорную оценку. Для вывода априорной оценки в тождестве (6.8) положим $\mathbf{V}=\mathbf{a}+\mathbf{u}$, $\mathbf{\Phi}\equiv\mathbf{u}$, $\mathbf{u}\,(u_1,\ u_2,\ u_3)$. Тогда получаем следующее равенство:

$$\nu\,[\mathbf{u},\mathbf{u}]+\nu\,[\mathbf{a},\mathbf{u}]-\{\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{u}\}-\{\mathbf{a},\mathbf{u},\mathbf{u}\}-\{\mathbf{u},\mathbf{a},\mathbf{u}\}-\{\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{u}\}=$$
$$=-\int\limits_{\Omega}\frac{1}{r}\,(a_1u_2^{\,2}+a_1a_2u_2-a_2u_1u_2-a_2^{\,2}u_1)\,rdrd\xi\,-$$
$$-\,\nu\int\limits_{\Omega}\frac{1}{r^2}\,(u_1^{\,2}+u_2^{\,2})\,rdrd\xi-\nu\int\limits_{\Omega}\frac{1}{r^2}\,(a_1u_1+a_2u_2)\,rdrd\xi\,-$$
$$-\,2\nu k\int\limits_{\Omega}\frac{1}{r^2}\left(u_1\frac{\partial u_2}{\partial\xi}-u_2\frac{\partial u_1}{\partial\xi}\right)rdrd\xi-2\nu k\int\limits_{\Omega}\frac{1}{r^2}\left(u_1\frac{\partial a_2}{\partial\xi}-u_2\frac{\partial a_1}{\partial\xi}\right)rdrd\xi$$

где

$$[\mathbf{u},\mathbf{u}]=\int\limits_{\Omega}\nabla\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\,rdrd\xi\equiv\int\limits_{\Omega}\left\{\sum_{i=1}^{3}\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial r}\right)^2+\left(1+\frac{k^2}{r^2}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial\xi}\right)^2\right]\right\}rdrd\xi$$

$$\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}=\int\limits_{\Omega}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{w}\,rdrd\xi,\qquad\nabla\left(\frac{\partial}{\partial r},\ \frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial\xi},\ \frac{\partial}{\partial\xi}\right)$$

Но так как

$$\frac{1}{r^2}\left[(u_1^{\,2}+u_2^{\,2})+2k\left(u_1\frac{\partial u_2}{\partial\xi}-u_2\frac{\partial u_1}{\partial\xi}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{r^2}\left\{\left(u_1+k\frac{\partial u_2}{\partial\xi}\right)^2+\left(u_2-k\frac{\partial u_1}{\partial\xi}\right)^2\right\}-\frac{k^2}{r^2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial\xi}\right)^2\right]$$

то, применяя лемму Хопфа [9] с $\varepsilon=\nu\,/\,2\,(1+C)$, где C — постоянная из равенства Пуанкаре [8], получаем требуемую оценку

$$\mathbf{u}\,\|_{H(\Omega,l)}\leqslant\nu^{-1}C_0\,(\Omega,\mathbf{a},k)$$

7. Рассмотрим подгруппу $\langle k\partial/\partial z - \partial/\partial\theta + \partial/\partial p, \partial/\partial t\rangle$. Инвариантное решение относительно этой подгруппы имеет вид

$$u_r = u(r,\xi),\ u_\theta = v(r,\xi),\quad u_z = w(r,\xi),\ p = k^{-1}z + p(r,\xi),\ \xi = z + k\theta$$

Подставляя эти выражения в уравнения Навье — Стокса, записанные в цилиндрической системе координат, получаем

$$u\frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{1}{r}kv + w\right)\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{v^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \left(1 + \frac{k^2}{r^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{2k}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{u}{r^2}\right] \tag{7.1}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial r} + \left(\frac{1}{r}kv + w\right)\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{uv}{r} = -\frac{k}{r}\frac{\partial p}{\partial \xi} + \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \left(1 + \frac{k^2}{r^2}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{2k}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{v}{r^2}\right] \tag{7.2}$$

$$u\frac{\partial w}{\partial r} + \left(\frac{1}{r}kv + w\right)\frac{\partial w}{\partial \xi} = -\frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{1}{k} + \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \left(1 + \frac{k^2}{r^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right] \tag{7.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial}{\partial \xi}(kv + rw) = 0 \tag{7.4}$$

Условие прилипания дает краевое условие

$$\mathbf{V}|_{\partial\Omega} = 0 \tag{7.5}$$

Будем искать периодическое по ξ с периодом l решение

$$\mathbf{V}(r, \xi + l) = \mathbf{V}(r,\xi) \tag{7.6}$$

Поставленная краевая задача может быть интерпретирована как течение вязкой несжимаемой жидкости внутри змеевика.

Поступая аналогично тому, как это было сделано в предыдущем пункте, получаем интегральное тождество

$$\int_\Omega\left\{\varphi_2\frac{uv}{r} - \varphi_1\frac{v^2}{r} + \nu\left[\frac{2k}{r^2}\left(\varphi_1\frac{\partial v}{\partial \xi} - \varphi_2\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \frac{1}{r^2}(\varphi_1 u + \varphi_2 v)\right]\right\} r\,dr\,d\xi -$$

$$- \int_\Omega \mathbf{V}\cdot\mathbf{V}\cdot\nabla\mathbf{\Phi} r\,dr\,d\xi = -\nu\int_\Omega \nabla\mathbf{V}\cdot\nabla\mathbf{\Phi} r\,dr\,d\xi + \frac{1}{k}\int_\Omega \varphi_3 r\,dr\,d\xi, \tag{7.7}$$

$$\mathbf{\Phi}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in H(\Omega, l)$$

Тождество (7.7) кладется в основу для определения обобщенного решения задачи (7.1) — (7.6).

Теорема 4. Задача (7.1) — (7.6) имеет по крайней мере одно обобщенное решение.

Как и раньше, достаточно найти априорную оценку $\|\mathbf{V}\|_{H(\Omega, l)}$. Для ее получения положим в (7.7) $\mathbf{\Phi} \equiv \mathbf{V}$. Заметим, что интеграл

$$\int_\Omega \mathbf{V}\cdot\mathbf{V}\cdot\nabla\mathbf{V} r\,dr\,d\xi = 0$$

поэтому справедливо следующее равенство:

$$\nu\int\limits_{\Omega}\left\{\sum_{i=1}^{3}\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial r}\right)^2+\left(1+\frac{k^2}{r^2}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi}\right)^2\right]\right\}rdrd\xi\,+$$

$$+\,\nu\int\limits_{\Omega}\left[\frac{1}{r^2}(u_1{}^2+u_2{}^2)+\frac{2k}{r^2}\left(u_1\frac{\partial u_2}{\partial \xi}-u_2\frac{\partial u_1}{\partial \xi}\right)\right]rdrd\xi=\frac{1}{k}\int\limits_{\Omega}u_3rdrd\xi$$

Представим второй интеграл в левой части полученного равенства в виде

$$\nu\int\limits_{\Omega}\left\{\frac{1}{r^2}\left[\left(u_1+k\frac{\partial u_2}{\partial \xi}\right)^2+\left(u_2-k\frac{\partial u_1}{\partial \xi}\right)^2\right]-\frac{k^2}{r^2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi}\right)^2\right]\right\}rdrd\xi$$

Сокращая подобные члены, получаем требуемую оценку

$$\|\mathbf{V}\|_{H(\Omega,l)}\leqslant k^{-1}C(\Omega)$$

Отметим, что для задач (5.1) — (5.5) и (7.1) — (7.6) имеет место теорема единственности, но уже при дополнительных ограничениях на величину k.

В заключение автор благодарит В. В. Пухначева за обсуждение результатов и советы.

Поступила 12 V 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Пухначев В. В. Инвариантные решения уравнений Навье — Стокса, описывающие движения со свободной границей. Докл. АН СССР, 1972 т. 202, № 2.
2. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.
3. Ибрагимов Н. Х. Групповые свойства некоторых дифференциальных уравнений. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1967.
4. Berker R. Integration des equations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible. Handbuch der Physik, Bd 8/2, Berlin Springer — Verlag, 1963.
5. Бытев В. О. Неустановившиеся движения кольца вязкой несжимаемой жидкости со свободной границей. ПМТФ, 1970, № 3.
6. Rayleigh (Lord). On the pressure deweloped in a liquid during the collapse of a spherical cavity. Philos. Mag., Ser. 6, 1917, vol. 34, No. 200.
7. Hopf E. Statistical hydromechanics and functional colculus. J. Ration Mech. Analys, 1952, No. 1.
8. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1970.
9. Hopf E. Ein allgemeiner Endlichkeitssatz der Hydrodinamik. Math. Ann., 1941, Bd 117, S. 764—775.