

УДК 629.042:629.783

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ АНИЗОГРИДНЫХ СЕТЧАТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КОРПУСОВ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

А. В. Лопатин, В. В. Москвичев, А. Е. Буров

Федеральный исследовательский центр информационных  
и вычислительных технологий, 660049 Красноярск, Россия  
E-mails: lopatin@krasmail.ru, krasn@ict.nsc.ru, aeburov@ict.nsc.ru

Представлены результаты решения задач определения параметров анизотридной сетчатой структуры корпусов космических аппаратов (анализ деформативности корпуса, нагруженного поперечными силами инерции; определение основной частоты поперечных колебаний консольно закрепленного корпуса; исследование деформативности корпуса, нагруженного осевой сжимающей силой; анализ деформативности корпуса с внутренним топливным баком, нагруженного поперечными силами инерции). Для решения указанных задач использованы континуальная модель сетчатой структуры цилиндрического корпуса и метод конечных элементов.

**Ключевые слова:** космический аппарат, композиционные материалы, анизотридная структура, сетчатая цилиндрическая оболочка, аналитические и численные методы расчета оболочки.

DOI: 10.15372/PMTF20210514

**Введение.** Сетчатые анизотридные оболочки, состоящие из регулярных систем спиральных и кольцевых ребер, широко используются в современных космических приложениях. Сетчатая структура, а также большие удельная прочность и жесткость высокомодульных композиционных материалов позволяют улучшить технические характеристики конструкций.

Технологии производства, проектирования и анализа композитных сетчатых конструкций достаточно хорошо разработаны [1, 2]. Сетчатые цилиндрические оболочки используются в качестве несущих корпусов современных космических аппаратов. Как правило, оборудование космического аппарата располагается на внешней поверхности сетчатой цилиндрической оболочки. Топливные баки и двигательная установка находятся внутри силового сетчатого цилиндрического корпуса. Сетчатая цилиндрическая оболочка прикрепляется к адаптеру, который устанавливается на стыковочный шпангоут ракетного носителя.

Проектирование сетчатого цилиндрического корпуса космического аппарата представляет собой процесс, требующий проведения большого количества оценок его деформативности и динамического поведения для определения параметров сетчатой структуры. Выбор параметров на основе результатов конечно-элементного моделирования замедляет и

усложняет поиск оптимальной конструкции. На этапе проектирования необходимо использовать методы, позволяющие быстро и надежно определять параметры деформирования и основную частоту колебаний композитного сетчатого корпуса космического аппарата. Эти методы могут быть развиты на основе аналитических решений задач о деформировании и динамике композитных оболочек. В настоящее время перспективным является синтетический подход к проектированию композитных конструкций сетчатых корпусов космических аппаратов. На начальном этапе проектирования используются аналитические методы, позволяющие выбрать параметры сетчатой структуры цилиндрического корпуса без значительных вычислительных затрат. Затем конструкция анализируется с помощью цифровых технологий, основой которых является метод конечных элементов.

Для анализа сетчатого цилиндрического корпуса космического аппарата используются две расчетные модели. Сначала была разработана континуальная модель, в которой сетчатая оболочка заменяется сплошной ортотропной оболочкой с осредненными жесткостными параметрами. Континуальные модели сетчатых структур рассмотрены в работах [1–8]. Для создания дискретных моделей используются конечные элементы различного типа. Впервые исследование сетчатых оболочек с помощью метода конечных элементов выполнено в работе [9] (см. также [10–12]). При проектировании сетчатых оболочек с использованием синтетического подхода применяются обе модели. Параметры сетчатой структуры, удовлетворяющие заданным ограничениям, определяются с помощью континуальной модели. Использование дискретной модели позволяет уточнить эти параметры.

В данной работе представлены результаты решения задач определения параметров анизотропной сетчатой структуры корпусов космических аппаратов, производимых ОАО “Информационные спутниковые системы” им. академика М. Ф. Решетнева (анализ деформативности композитного анизотропного сетчатого корпуса, нагруженного поперечными силами инерции; определение основной частоты поперечных колебаний консольно закрепленного композитного анизотропного сетчатого корпуса; исследование деформативности композитного анизотропного сетчатого корпуса, нагруженного осевой сжимающей силой; анализ деформативности композитного анизотропного сетчатого корпуса с внутренним топливным баком, нагруженного поперечными силами инерции). Для решения рассматриваемых задач используются континуальная модель сетчатой структуры цилиндрического корпуса и метод конечных элементов.

**1. Определение жесткостных параметров сетчатой структуры.** Приведем выражения, определяющие мембранные жесткости  $B_{11}$ ,  $B_{12}$ ,  $B_{22}$ ,  $B_{33}$ , изгибные жесткости  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{22}$ ,  $D_{33}$  и погонную массу  $B_\rho$  для сетчатой цилиндрической оболочки, наиболее часто используемой в космических приложениях (рис. 1). Такая оболочка состоит из двух симметричных систем спиральных ребер и системы кольцевых ребер. Спиральные ребра расположены под углами  $\pm\varphi$  к образующей цилиндра. Кольцевые ребра проходят через середины сегментов спиральных ребер, расположенных между точками их пересечения. Толщина сетчатой оболочки равна  $h$ . Спиральные ребра имеют ширину  $\delta_s$ , кольцевые —  $\delta_r$ . Расстояния между спиральными и кольцевыми ребрами равны  $a_s$ ,  $a_r$  соответственно (см. рис. 1). Спиральные ребра изготовлены из однонаправленного композиционного материала с модулем упругости  $E_s$ . Материал кольцевых ребер имеет модуль упругости  $E_r$ . Материалы спиральных и кольцевых ребер характеризуются плотностями  $\rho_s$  и  $\rho_r$ . Число спиральных ребер в одном направлении равно  $n_s$ . Осредненные жесткости и погонная масса сетчатой оболочки с рассматриваемыми параметрами определяются по следующим формулам [7, 8]:

$$B_{11} = A_{11}h, \quad B_{12} = A_{12}h, \quad B_{22} = A_{22}h, \quad B_{33} = A_{22}h,$$

$$D_{11} = A_{11} \frac{h^3}{12}, \quad D_{12} = A_{12} \frac{h^3}{12}, \quad D_{22} = A_{22} \frac{h^3}{12}, \quad D_{33} = A_{33} \frac{h^3}{12},$$

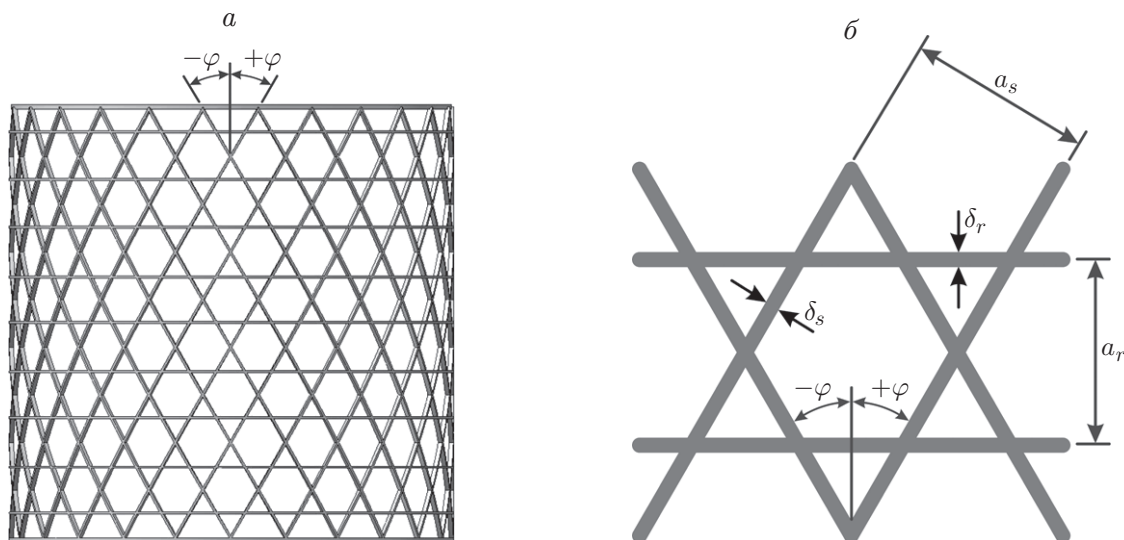


Рис. 1. Оболочка с сетчатой структурой:  
 а — общий вид, б — геометрические параметры

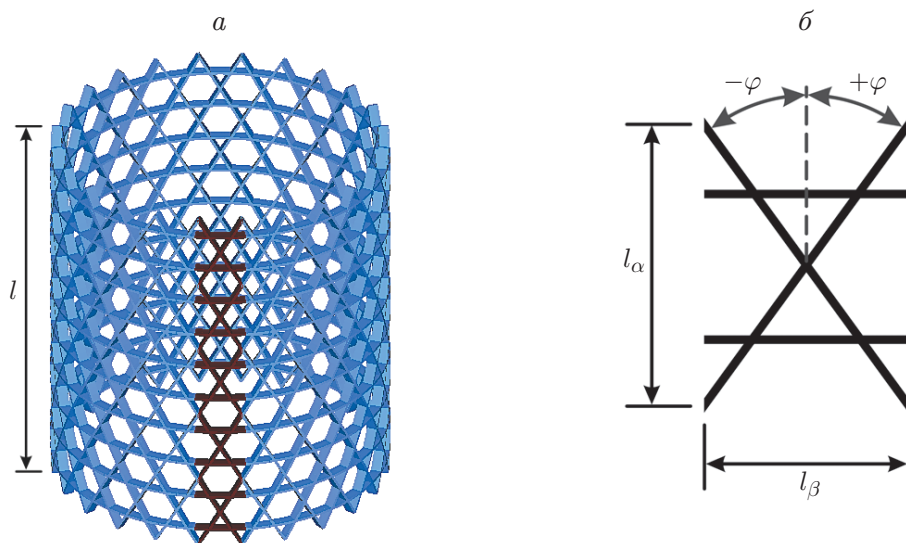


Рис. 2. Цилиндрическая оболочка с сетчатой структурой:  
 а — общий вид, б — типовой сегмент

$$B_\rho = h \left( 2 \frac{\delta_s}{a_s} \rho_s + \frac{\delta_r}{a_r} \rho_r \right),$$

$$A_{11} = 2\bar{E}_s \cos^4 \varphi, \quad A_{12} = A_{33} = 2\bar{E}_s \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi, \quad A_{22} = 2\bar{E}_s \sin^4 \varphi + \bar{E}_r,$$

$$\bar{E}_s = E_s \frac{\delta_s}{a_s}, \quad \bar{E}_r = E_r \frac{\delta_r}{a_r}, \quad a_s = \frac{2\pi R}{n_s} \cos \varphi, \quad a_r = \frac{\pi R}{n_s \operatorname{tg} \varphi}.$$

Как правило, сетчатые цилиндрические оболочки изготавливаются таким образом, чтобы точки пересечения спиральных ребер в различных направлениях находились на краях. Структуру такой оболочки можно представить в виде набора типовых сегментов (рис. 2). Размеры сегмента вычисляются по формулам

$$l_\beta = \frac{2\pi R}{n_s}, \quad l_\alpha = \frac{2\pi R}{n_s \operatorname{tg} \varphi}. \tag{1}$$

Угол наклона спиральных ребер  $\varphi$  должен быть таким, чтобы отрезок  $l_\alpha$  укладывался на длине оболочки  $l$  целое число раз (см. рис. 2). Рассмотрим способ определения угла  $\varphi$ , обеспечивающего выполнение этого условия. Пусть  $\varphi_i$  — начальное значение угла наклона спиральных ребер. Соответствующий этому углу размер сегмента вдоль оси  $\alpha$  определяется с помощью второго равенства (1). Вычислим отношение

$$n_{\alpha i} = \frac{l}{l_{\alpha i}} = \frac{ln_s}{2\pi R} \operatorname{tg} \varphi_i. \quad (2)$$

Если отношение  $n_{\alpha i}$  является целым числом, то можно создать сетчатую структуру, показанную на рис. 2. Если отношение  $n_{\alpha i}$  не является целым числом, то значение  $n_{\alpha i}$  нужно округлить до ближайшего целого числа  $n_\alpha$ . В уравнении (2) выполним замену  $n_{\alpha i}$  на  $n_\alpha$  и  $\varphi_i$  на  $\varphi$ . Тогда

$$n_\alpha = \frac{ln_s}{2\pi R} \operatorname{tg} \varphi. \quad (3)$$

Из равенства (3) определим угол  $\varphi$ :

$$\varphi = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{2\pi R n_\alpha}{ln_s} \right).$$

## 2. Конечно-элементное моделирование сетчатой цилиндрической оболочки.

Конечно-элементная модель сетчатой структуры оболочки как пространственной рамы создается с помощью двухузлового балочного конечного элемента [13]. Каждый из узлов конечного элемента имеет шесть степеней свободы: три перемещения и три угла поворота. Основой конечно-элементной модели сетчатой оболочки является повторяющийся сегмент структуры, показанный на рис. 3. Сегмент состоит из двух фрагментов спиральных ребер и фрагмента кольцевого ребра. Сначала строится конечно-элементная модель сегмента, задаются геометрические параметры, параметры упругости для ребер и размеры поперечного сечения конечных элементов. Затем с помощью процедуры зеркального отражения создается конечно-элементная модель двух связанных между собой типовых сегментов. На следующем этапе происходит копирование двойных сегментов по окружности оболочки и создается пояс конечных элементов, после чего пояс двойных сегментов копируется вдоль оси оболочки. На завершающем этапе построения модели задаются граничные условия и осуществляется присоединение к сетчатой структуре абсолютно жесткого конечного элемента. Граничные условия соответствуют жесткому закреплению края оболочки. Абсолютно жесткий конечный элемент используется при решении задач динамики и статического нагружения сетчатой оболочки. В модальном анализе этот элемент моделирует

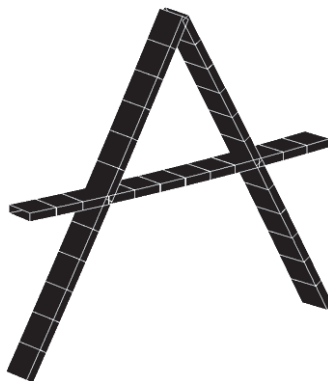


Рис. 3. Сегмент структуры сетчатой оболочки, используемый в конечно-элементной модели

присоединенную массу, в статическом анализе он используется для приложения силы или момента в центральной точке.

**3. Анализ деформативности композитного анизотропного сетчатого корпуса космического аппарата, нагруженного поперечными силами инерции.** Сетчатая оболочка корпуса космического аппарата является несущей конструкцией, к которой присоединяются приборы и механизмы. Один край такой оболочки прикреплен через адаптер к ракетному носителю. При выведении на орбиту космический аппарат испытывает действие значительных поперечных инерционных усилий. Нагруженная поперечным инерционным усилием силовая сетчатая оболочка изгибается, и присоединенный к ней космический аппарат перемещается в соответствующем направлении, что приводит к уменьшению размера зазора между космическим аппаратом и обтекателем ракетного носителя. Анализ поперечных перемещений космического аппарата необходим для определения изгибной жесткости силовой сетчатой оболочки, обеспечивающей необходимый зазор.

Расчетной моделью является консольная композитная сетчатая цилиндрическая оболочка, к свободному краю которой прикреплены жесткий диск и массивное тело. Масса тела равна массе оборудования, установленного на сетчатой оболочке. Масса тела значительно превышает массу сетчатой оболочки, поэтому в расчетной модели масса оболочки принимается равной нулю. Конструкция подвергается действию поперечных инерционных усилий. При анализе перемещений изгибаемой оболочки используются уравнения безмоментной теории цилиндрических ортотропных оболочек.

Рассмотрим анизотропную сетчатую цилиндрическую оболочку, один край которой закреплен, а к другому краю присоединены жесткий диск и массивное тело (рис. 4). Сетчатая структура анизотропной оболочки представляет собой регулярную систему часто расположенных ребер, которую заменим сплошной оболочкой, обладающей определенными ортотропными жесткостями [7, 8]. На срединной поверхности ортотропной оболочки радиусом  $R$  с длиной образующей  $l$  выберем систему криволинейных координат  $(\alpha, \beta, \gamma)$  (см. рис. 4). Консольная оболочка с присоединенным массивным телом нагружается инерционной силой, действующей в направлении оси  $\gamma$ . Величина этой силы определяется величиной перегрузки  $n_\gamma$ .

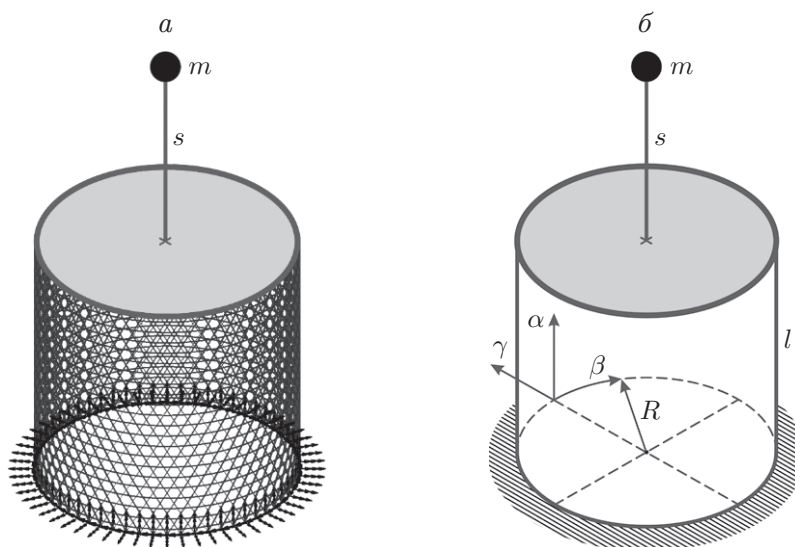


Рис. 4. Анизотропная сетчатая ортотропная цилиндрическая оболочка с присоединенными жестким диском и массивным телом:  
 $a$  — общий вид,  $b$  — геометрические параметры

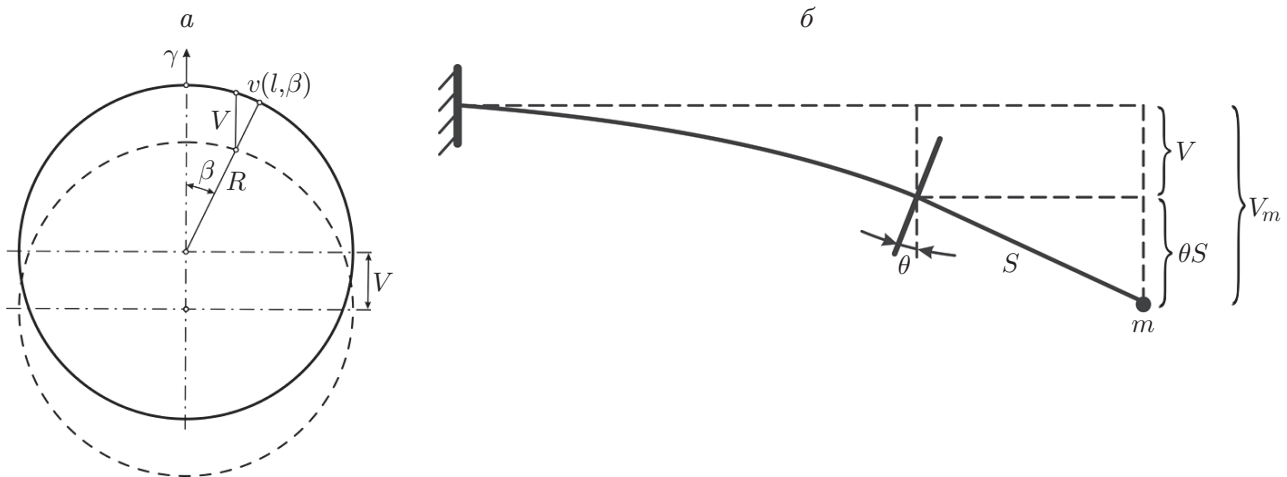


Рис. 5. Вертикальное перемещение жесткого диска и массивного тела:  
 а — поперечное сечение, б — продольное сечение

Под действием приложенных силы и момента консольная цилиндрическая оболочка изгибается в плоскости  $(\alpha, \gamma)$ . При исследовании процесса деформирования конструкции использовались уравнения безмоментной теории ортотропных цилиндрических оболочек [7].

В результате решения задачи получены формулы для определения угла поворота жесткого диска (рис. 5)

$$\theta = \frac{B_{22}l^2}{2\pi BR^3} mgn_\gamma \left(2\frac{s}{l} + 1\right)$$

и вертикального смещения жесткого диска (см. рис. 5)

$$V = \frac{mgn_\gamma}{\pi B_{33}} \frac{l}{R} \left[1 + \frac{B_{22}B_{33}}{3B} \frac{l^2}{R^2} \left(\frac{3}{2}\frac{s}{l} + 1\right)\right].$$

Здесь  $B = B_{11}B_{22} - B_{12}^2$ ;  $m$  — масса тела;  $s$  — расстояние между жестким диском и массивным телом;  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$  — ускорение свободного падения.

Вертикальное смещение  $V_m$  массивного тела, прикрепленного к жесткому диску, определяется следующим образом:

$$V_m = \frac{mgn_\gamma}{\pi B_{33}} \frac{l}{R} \left[1 + \frac{B_{22}B_{33}}{B} \frac{l^2}{R^2} \left(\frac{s^2}{l^2} + \frac{s}{l} + \frac{1}{3}\right)\right].$$

**4. Численный анализ деформативности композитного анизотропного сетчатого корпуса космического аппарата.** Рассмотрим оболочку, радиус  $R$  которой равен 0,5 м, а длина  $l$  равна 3 м. Спиральные и кольцевые ребра изготовлены из одного и того же однонаправленного углепластика ( $E_s = E_r = 170 \text{ ГПа}$ ). Пусть толщина сетчатой стенки оболочки равна  $h = 0,016 \text{ м}$ . Будем полагать, что спиральные и кольцевые ребра имеют одинаковую ширину и  $\delta_s = \delta_r = 0,004 \text{ м}$ . Сетчатая структура может иметь различное число спиральных ребер в одном направлении. Положим  $n_s = 36, 48, 60$ . Пусть поперечная перегрузка равна  $n_\gamma = 3$ , а масса тела  $m = 1500 \text{ кг}$ , расстояние от тела до торца оболочки  $s = 1,5 \text{ м}$ . Определим вертикальное смещение диска, прикрепленного к оболочке с приведенными выше параметрами. Расчеты выполним для углов  $\varphi$ , изменяющихся в диапазоне  $10 \div 30^\circ$  с шагом, равным  $5^\circ$ . Выполнены расчеты угла поворота и вертикального перемещения жесткого диска при различных значениях параметров  $\varphi, n_s$ . Из полученных данных

следует, что для каждой сетчатой оболочки существует угол  $\varphi$ , при котором угол поворота и перемещение жесткого диска будет минимальным. Для спиральных ребер такой угол наклона равен  $20^\circ$ .

Проведено сравнение результатов численного решения с использованием метода конечных элементов и результатов аналитического решения, которое показало, что их максимальное различие не превышает 2,2 %. Следовательно, предложенная аналитическая модель позволяет достаточно точно определить перемещение жесткого диска, прикрепленного к краю консольной сетчатой цилиндрической оболочки.

**5. Определение основной частоты поперечных колебаний консольно закрепленного композитного анизотропного сетчатого корпуса космического аппарата.** По основной частоте колебаний можно судить об эффективности силового сетчатого цилиндрического корпуса при определенных жесткости и массе. При проектировании космического аппарата для определения основной частоты колебаний сетчатого корпуса с прикрепленным к нему оборудованием используется упрощенная расчетная модель. Такой моделью является консольная сетчатая цилиндрическая оболочка, на свободном краю которой находится абсолютно жесткий диск, имитирующий оборудование. Масса этого диска существенно превышает массу сетчатой оболочки, поэтому в расчетной модели массой оболочки можно пренебречь.

Рассмотрим консольную сетчатую цилиндрическую оболочку (рис. 6), к свободному краю которой прикреплен абсолютно жесткий диск. Заменяем сетчатую оболочку, состоящую из регулярных систем часто расположенных ребер, на сплошную ортотропную оболочку. На срединной поверхности сплошной ортотропной оболочки радиусом  $R$  и длиной  $l$  выберем систему цилиндрических криволинейных координат  $(\alpha, \beta, \gamma)$  (см. рис. 6). Край оболочки  $\alpha = 0$  жестко закреплен. К краю оболочки  $\alpha = l$  прикреплен абсолютно жесткий диск массой  $m$ .

Решение задачи о поперечных колебаниях консольно закрепленной ортотропной цилиндрической оболочки с присоединенным диском будем искать с помощью метода Ритца и соответствующей безмоментной теории [7]. Для построения разрешающих уравнений этого метода используется принцип Гамильтона.

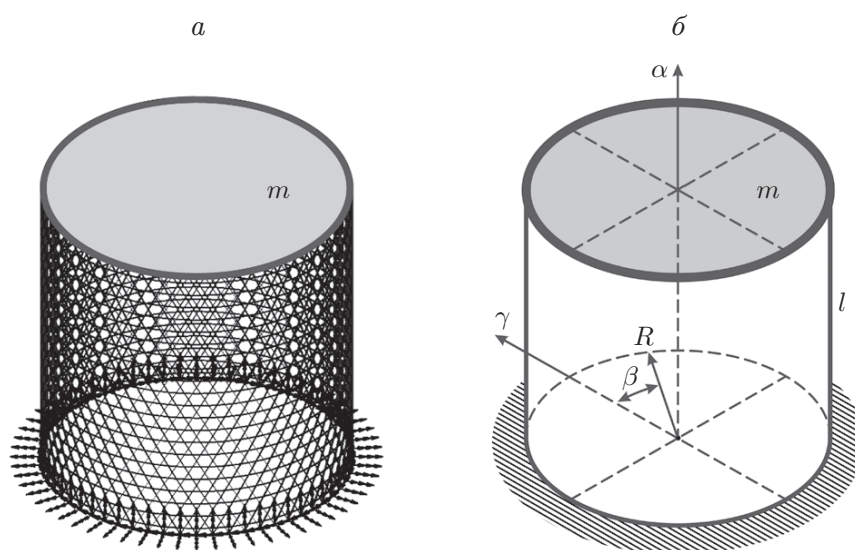


Рис. 6. Консольная сетчатая ортотропная цилиндрическая оболочка с прикрепленным жестким диском:

$a$  — общий вид,  $b$  — геометрические параметры



Поскольку при поперечных колебаниях консольной цилиндрической оболочки с жестким диском поперечные сечения  $\alpha = 0$  и  $\alpha = l$  всегда сохраняют круглую форму, сделано предположение, что у оболочки, колеблющейся с основной частотой, все поперечные сечения сохраняют круглую форму. Учитывая это предположение, представим выражения для продольного перемещения  $u(\alpha, \beta)$ , окружного перемещения  $v(\alpha, \beta)$  и прогиба оболочки  $w(\alpha, \beta)$  в следующем виде:

$$u(\alpha, \beta) = \theta(\alpha)R \cos \beta, \quad v(\alpha, \beta) = -\eta(\alpha) \sin \beta, \quad w(\alpha, \beta) = \eta(\alpha) \cos \beta.$$

Здесь  $\eta(\alpha)$ ,  $\theta(\alpha)$  — неизвестные функции, представляющие собой вертикальное перемещение продольной оси оболочки и угол поворота поперечного сечения оболочки соответственно.

Полагая, что форма продольной оси цилиндрической оболочки совпадает с формой консольно закрепленной балки, нагруженной перерезывающей силой на свободном краю, представим функции  $\eta(\alpha)$  и  $\theta(\alpha)$  в виде

$$\eta(\alpha) = A_1 H(\alpha), \quad \theta(\alpha) = A_2 \frac{dH}{d\alpha},$$

где  $A_1$ ,  $A_2$  — неизвестные коэффициенты.

Аппроксимирующая функция  $H(\alpha)$  определяется следующим образом:

$$H(\alpha) = 3 \frac{\alpha^2}{l^2} - \frac{\alpha^3}{l^3}.$$

Реализация метода Ритца позволила получить однородную систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\frac{6}{5l} \pi R B_{33} (A_1 + A_2) - m \omega^2 A_1 = 0, \quad \frac{R^2}{l^2} \bar{B}_{11} A_2 + \frac{2}{5} B_{33} (A_1 + A_2) = 0. \quad (4)$$

Здесь  $\bar{B}_{11} = B_{11} - B_{12}^2/B_{22}$ .

Однородная система уравнений (4) имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю. Реализуя это условие, для определения основной частоты колебаний рассматриваемой оболочки получаем формулу, которая позволяет оценить ее поперечную жесткость:

$$\omega = \sqrt{3\pi \bar{B}_{11} \frac{R^3}{l^3} / \left[ m \left( 1 + \frac{5}{2} \frac{\bar{B}_{11}}{B_{33}} \frac{R^2}{l^2} \right) \right]}. \quad (5)$$

Используем полученную формулу (5) для определения основной частоты колебаний консольной сетчатой цилиндрической оболочки с прикрепленным жестким диском при различных геометрических параметрах.

Рассмотрим сетчатую оболочку, спиральные и кольцевые ребра которой изготовлены из одного и того же однонаправленного углепластика ( $E_s = E_r = 170$  ГПа). Примем, что спиральные и кольцевые ребра имеют одинаковую ширину ( $\delta_s = \delta_r = 0,004$  м). Высота каждого ребра равна  $h = 0,016$  м. Радиус оболочки  $R$  примем равным 0,5 м. Длина оболочки  $l$  составляет 3 м. Масса жесткого диска равна  $m = 2000$  кг. В расчетах будем варьировать число спиральных ребер  $n_s$  и угол наклона спиральных ребер  $\varphi$ . Пусть  $n_s = 36, 48, 60$  и угол  $\varphi$  изменяется в диапазоне  $10 \div 30^\circ$  с шагом, равным  $5^\circ$ . Результаты вычислений основной частоты колебаний  $f = \omega/(2\pi)$  при различных значениях  $\varphi$ ,  $n_s$  представлены в табл. 1. Из анализа представленных данных следует, что существуют значения угла  $\varphi$ , при которых основная частота колебаний сетчатой оболочки максимальна. Для спиральных ребер такой угол наклона равен  $25^\circ$ .



Таблица 1

Значения основной частоты колебаний  $f$  консольной сетчатой цилиндрической оболочки с прикрепленным жестким диском

$\varphi$ , град	$f$ , Гц		
	$n_s = 36$	$n_s = 48$	$n_s = 60$
10	6,38	7,36	8,23
15	7,91	9,13	10,21
20	8,55	9,87	11,04
25	8,58	9,91	11,07
30	8,19	9,46	10,58

Таблица 2

Расчетные значения основной частоты колебаний  $f_{FEM}$  консольной сетчатой цилиндрической оболочки с прикрепленным жестким диском

$\varphi$ , град	$f_{FEM}$ , Гц		
	$n_s = 36$	$n_s = 48$	$n_s = 60$
10	6,12	7,06	7,97
15	7,59	8,76	9,80
20	8,21	9,53	10,71
25	8,30	9,68	10,82
30	8,04	9,26	10,44

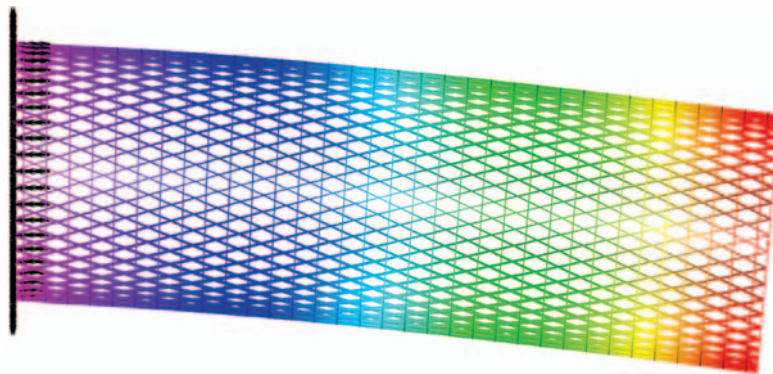


Рис. 7. Характерная форма основной моды колебаний сетчатой оболочки с присоединенным жестким диском

Проведено сравнение значений основной частоты колебаний рассматриваемой оболочки, полученных по приведенным выше формулам, с соответствующими значениями, полученными с помощью метода конечных элементов. Значения частоты  $f_{FEM}$ , найденные с помощью метода конечных элементов, приведены в табл. 2. Характерная форма основной моды колебаний для оболочки с  $\varphi = 20^\circ$ ,  $n_s = 48$  приведена на рис. 7.

Сравнивая частоты  $f$  и  $f_{FEM}$ , можно сделать вывод, что максимальное различие этих значений не превышает 4,2 %. Выполненная верификация подтверждает эффективность предложенного способа определения основной частоты колебаний консольной сетчатой цилиндрической оболочки с прикрепленным абсолютно жестким диском.

**6. Деформативность анизотридного сетчатого корпуса космического аппарата, нагруженного осевой сжимающей силой.** Сетчатый цилиндрический корпус космического аппарата испытывает действие сжимающих нагрузок, возникающих при выведении его на орбиту. Продольное деформирование сетчатого корпуса является важной характеристикой при проектировании. Корпус космического аппарата представляется в виде сетчатой цилиндрической оболочки, один край которой закреплен, а другой нагружается осевой сжимающей силой. Величина силы равна произведению веса космического аппарата и максимальной осевой перегрузки. Перемещение нагруженного края оболочки является мерой продольной жесткости сетчатого корпуса.

Рассмотрим анизотридную сетчатую цилиндрическую оболочку, один край которой полностью закреплен, а другой соединен с абсолютно жестким диском. Диск нагружен сжимающей силой  $P$  (рис. 8). Под действием этой силы оболочка деформируется в про-

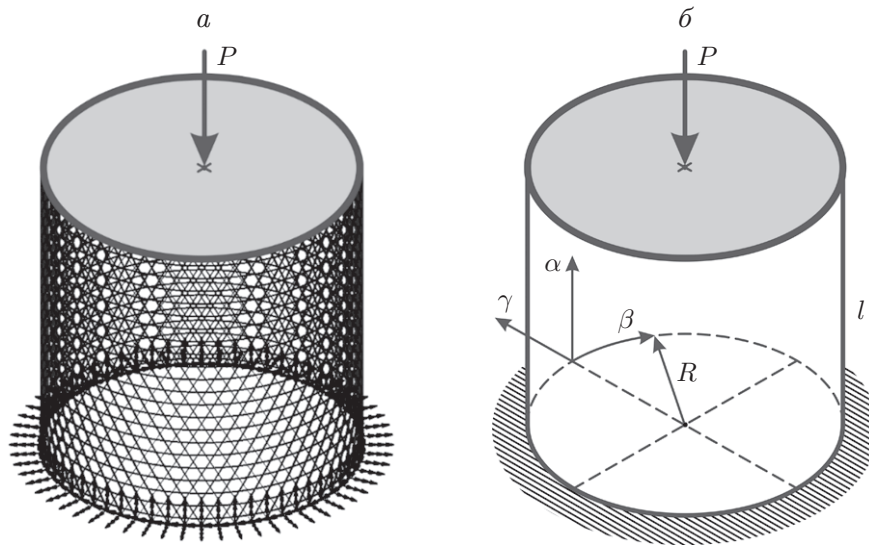


Рис. 8. Анизотридная сетчатая ортотропная цилиндрическая оболочка:  
*a* — общий вид, *b* — геометрические параметры

дольном направлении и абсолютно жесткий диск перемещается вниз. Для определения перемещения диска используем феноменологическую континуальную модель сетчатой оболочки. Заменяем сетчатую оболочку сплошным ортотропным аналогом, обладающим приведенными жесткостями. Введем систему криволинейных координат  $(\alpha, \beta, \gamma)$  (см. рис. 8), связанную со срединной поверхностью ортотропной оболочки, у которой длина образующей и радиус срединной поверхности равны  $l$  и  $R$  соответственно.

Напряженно-деформированное состояние оболочки при продольном сжатии является осесимметричным. Для исследования этого состояния использованы уравнения нелинейной безмоментной теории ортотропных цилиндрических оболочек [7]. В рамках этой теории получена формула, позволяющая определить осевое перемещение  $U$  абсолютно жесткого диска, прикрепленного к краю сетчатой цилиндрической оболочки и нагруженного сжимающим усилием:

$$U = -\frac{Nl}{B_{11}} \left( 1 + \frac{B_{12}^2}{B} (1 - Z) \right). \quad (6)$$

Здесь

$$N = \frac{P}{2\pi R}, \quad Z = \frac{2}{k} \frac{1 - \cos k}{\sin k}, \quad k = \frac{l}{R} \sqrt{\frac{B}{NB_{11}}}. \quad (7)$$

Используем формулы (6), (7) для вычисления перемещения жесткого диска, прикрепленного к сетчатой оболочке, при различных геометрических и жесткостных параметрах.

Рассмотрим сетчатую оболочку, спиральные и кольцевые ребра которой имеют одинаковые поперечные сечения и изготовлены из одного и того же однонаправленного углепластика. При проведении расчетов перемещения жесткого кольца будем варьировать число спиральных ребер и угол наклона спиральных ребер. Эти параметры могут принимать следующие значения:  $n_s = 36, 48, 60$ ,  $\varphi = 10, 15, 20, 25, 30^\circ$ . Расчеты проводились при следующих значениях параметров: длина оболочки  $l = 3$  м, радиус  $R = 0,5$  м, модули упругости  $E_s = E_r = 170$  ГПа, размеры поперечных сечений ребер  $h = 0,016$  м,  $\delta_s = \delta_r = 0,004$  м, сжимающая нагрузка  $P = 100\,000$  Н. Проведен расчет перемещения  $U$  при различных значениях параметров  $n_s$  и  $\varphi$ .

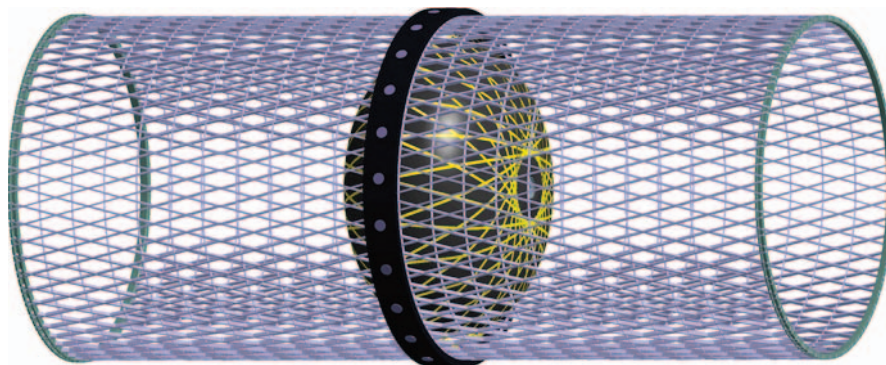


Рис. 9. Композитная сетчатая цилиндрическая оболочка с внутренним топливным баком

Выполнена верификация результатов, полученных с помощью аналитических формул. Для этого с использованием метода конечных элементов решалась задача о сжатии сетчатой оболочки. С помощью метода конечных элементов проведены расчеты перемещения жесткого диска  $U_{FEM}$  при различных значениях параметров  $n_s$ . Максимальное различие значений перемещений  $U$  и  $U_{FEM}$  не превышает 2 %. Таким образом, выполненная верификация подтвердила результаты аналитического решения задачи.

**7. Деформативность анизотропного сетчатого корпуса космического аппарата с внутренним топливным баком, нагруженного поперечными силами инерции.** Ниже рассматривается задача о деформировании сетчатого цилиндрического корпуса с жестко прикрепленным к нему топливным баком (рис. 9). Результаты решения такой задачи используются, например, при разработке способов безопасной наземной транспортировки космического аппарата, когда его сетчатый корпус испытывает действие значительных инерционных нагрузок. В данном случае наиболее существенное влияние на деформативность сетчатой оболочки с прикрепленным грузом оказывает инерционное поперечное усилие. Исследование поперечных перемещений сетчатого корпуса является важной составляющей анализа, проводимого при создании такой конструкции.

Рассмотрим сетчатую цилиндрическую оболочку, которая в центральном сечении скреплена с абсолютно жестким диском, имитирующим соединенные между собой топливный бак и силовой шпангоут. При моделировании заменим сетчатую оболочку сплошной оболочкой. На срединной поверхности ортотропной оболочки, имеющей радиус  $R$  и длину образующей  $L$ , выберем систему криволинейных координат  $(\alpha, \beta, \gamma)$  (рис. 10). Положение жесткого диска, обладающего нулевой толщиной, определяется координатой  $\alpha = l$ , где  $l = L/2$ .

Оболочка с диском подвергается воздействию силы инерции, направленной вдоль оси  $\gamma$ . Величина этой силы зависит от величины соответствующей перегрузки  $n_\gamma$  (см. рис. 10). Каждая точка срединной поверхности оболочки нагружена погонным весом  $p$ , величина которого определяется следующим образом:

$$p = B_\rho g n_\gamma.$$

Здесь  $B_\rho$  — погонная масса оболочки.

Погонный вес имеет размерность давления. На жесткий диск вдоль оси  $\gamma$  действует сила  $Q$ , величина которой равна

$$Q = m g n_\gamma$$

( $m$  — масса диска).

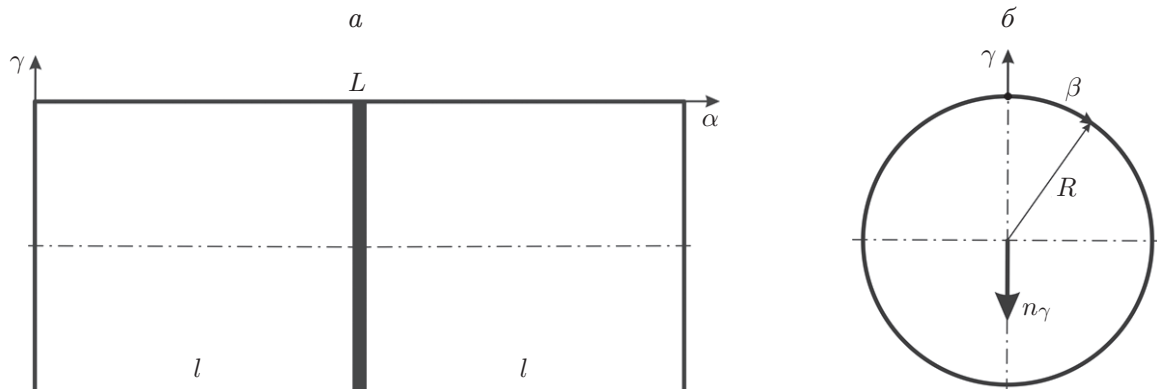


Рис. 10. Ортоотропная сплошная цилиндрическая оболочка с абсолютно жестким диском в центральном сечении:  
*a* — продольное сечение, *б* — поперечное сечение

Нагруженная силой инерции оболочка изгибается в плоскости  $(\alpha, \gamma)$ , и жесткий диск перемещается вдоль оси  $\gamma$ . Для определения этого перемещения использованы уравнения полубезмоментной теории оболочек [7], имеющие вид

$$\begin{aligned} \bar{B}_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + B_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + B_{33} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} &= 0, \\ B_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + D_{22} \left( R^2 \frac{\partial^6 v}{\partial \beta^6} + 2 \frac{\partial^4 v}{\partial \beta^4} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} \right) + B_{33} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + 2p \sin \frac{\beta}{R} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $\bar{B}_{11} = B_{11} - B_{12}^2/B_{22}$ . Функции  $u, v$  представляют собой перемещения точек срединной поверхности оболочки.

При решении уравнений (8) сделано предположение, что при деформировании цилиндрической оболочки с прикрепленным абсолютно жестким диском все ее поперечные сечения сохраняют круглую форму. Рассмотрены граничные условия, в соответствии с которыми на краях оболочки отсутствуют окружные перемещения и края оболочки могут перемещаться навстречу друг другу.

Вертикальное перемещение жесткого диска  $V$  вычисляется по формуле

$$V = \frac{L}{4\bar{B}_{11}} \left[ \frac{Q}{\pi R} \left( \frac{\bar{B}_{11}}{B_{33}} + \frac{1}{12} \frac{L^2}{R^2} \right) + pL \left( \frac{\bar{B}_{11}}{B_{33}} + \frac{5}{48} \frac{L^2}{R^2} \right) \right]. \quad (9)$$

Данная формула позволяет определить перемещение  $V$ , в случае если на рассматриваемую конструкцию действует инерционная поперечная нагрузка.

С использованием формулы (9) определим перемещение жесткого диска, прикрепленного к оболочке, при различных значениях параметров сетчатой структуры. Рассмотрим сетчатую оболочку, радиус которой равен  $R = 0,5$  м, а длина  $L$  составляет 2 или 4 м. Спиральные и кольцевые ребра этой оболочки изготовлены из одного и того же однонаправленного углепластика с модулем упругости 70 ГПа и плотностью 1550 кг/м<sup>3</sup>. Будем полагать, что все ребра сетчатой структуры имеют одинаковые поперечные сечения, высота которых равна 0,008 м, а ширина — 0,002 м. В расчетах будем варьировать число спиральных ребер, полагая  $n_s = 48, 60, 72$ . Пусть поперечная перегрузка  $n_\gamma = 6$ , масса диска  $m = 200$  кг. Угол наклона спиральных ребер  $\varphi$  может изменяться в диапазоне  $15 \div 45^\circ$  с шагом, равным  $5^\circ$ . Используя формулу (9), определим перемещение жесткого диска, прикрепленного к оболочке с приведенными выше параметрами. Проведены вычисления перемещения  $V$  при различных значениях  $\varphi, n_s, L$ . Анализ полученных результатов



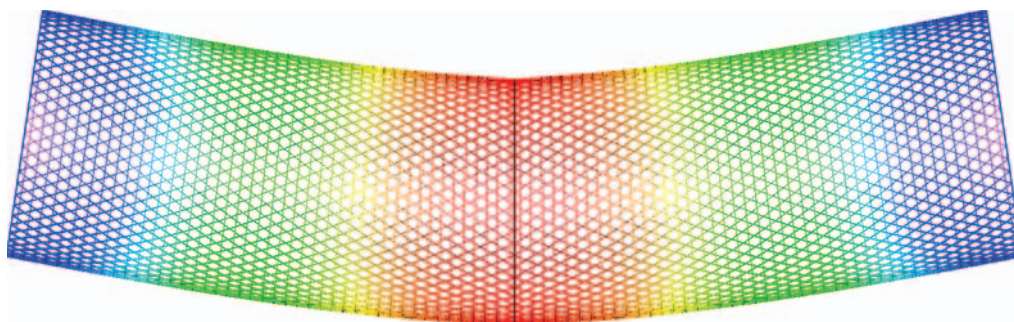


Рис. 11. Форма деформированной сетчатой цилиндрической оболочки

позволяет сделать вывод, что для каждого сочетания параметров  $n_s$  и  $L$  существует значение угла  $\varphi$ , при котором перемещение жесткого диска будет минимальным. Угол наклона спиральных ребер, обеспечивающий наибольшую изгибную жесткость короткой оболочки ( $L = 2$  м), равен  $35^\circ$ . В случае длинной оболочки ( $L = 4$  м) значение этого угла уменьшается до  $25^\circ$ .

Для верификации результатов аналитического определения перемещения жесткого диска, скрепленного с сетчатой оболочкой, используется метод конечных элементов. Проведены расчеты перемещения жесткого диска  $V_{FEM}$  при различных значениях  $\varphi$ ,  $n_s$ ,  $L$ . Характерная форма деформированной оболочки ( $L = 4$  м,  $n_s = 60$ ,  $\varphi = 30^\circ$ ) представлена на рис. 11. Из результатов численного анализа следует, что максимальное различие значений  $V$  и  $V_{FEM}$  не превышает 4,2 %.

Выполненная верификация подтверждает применимость формулы (9) для определения перемещений жесткого диска, скрепленного с сетчатой цилиндрической оболочкой.

**Заключение.** В работе представлены результаты реализации синтетического подхода в задачах выбора параметров анизотридной сетчатой структуры корпусов космических аппаратов. Приведены формулы для расчета поперечных и продольных перемещений и основной частоты колебаний консольно закрепленной сетчатой цилиндрической оболочки корпуса космического аппарата. Сравнение данных, полученных с помощью аналитического и численного решений, показало, что они хорошо согласуются.

В работе наряду с численными методами, применяемыми при анализе деформативности и частоты колебаний композитных сетчатых конструкций корпусов космических аппаратов, использовались методы механики деформируемого твердого тела, в развитие которых существенный вклад внес академик Б. Д. Аннин [14–16]. Результаты этих исследований использованы при разработке методов расчета современных конструкций космической техники.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Vasiliev V. V., Razin A. F.** Anisogrid composite lattice structures for spacecraft and aircraft applications // Composite Structures. 2006. V. 76. P. 182–189.
2. **Vasiliev V. V., Barynin V. A., Rasin A. F., et al.** Anisogrid composite lattice structures — development and space applications // Composites Nanostructures. 2009. V. 3. P. 38–50.
3. **Vasiliev V. V., Barynin V. A., Razin A. F.** Anisogrid composite lattice structures — development and aerospace applications // Composite Structures. 2012. V. 94. P. 1117–1127.
4. **Totaro G., Gurdal Z.** Optimal design of composite lattice shell structures for aerospace applications // Aerospace Sci. Technol. 2009. V. 13. P. 157–164.

5. **Paschero M., Hyer M. W.** Axial buckling of an orthotropic circular cylinder: Application to orthogrid concept // Intern. J. Solids Structures. 2009. V. 46. P. 2151–2171.
6. **Totaro G.** Local buckling modelling of isogrid and anisogrid lattice cylindrical shells with triangular cells // Composite Structures. 2012. V. 94. P. 446–452.
7. **Vasiliev V. V.** Mechanics of composite structures. Washington: Taylor and Francis, 1993.
8. **Vasiliev V. V.** Advanced mechanics of composite materials and structural elements. 3rd ed. / V. V. Vasiliev, E. V. Morozov. Amsterdam: Elsevier, 2013.
9. **Hou A., Gramoll K.** Compressive strength of composite latticed structures // J. Reinforced Plastics Composites. 1998. V. 17. P. 462–483.
10. **Zhang Y., Xue Z., Chen L., Fang D.** Deformation and failure mechanisms of lattice cylindrical shells under axial loading // Intern. J. Mech. Sci. 2009. V. 51. P. 213–221.
11. **Frulloni E., Kenny J. M., Conti P., Torre L.** Experimental study and finite element analysis of the elastic instability of composite lattice structures for aeronautic applications // Composite Structures. 2007. V. 78. P. 519–528.
12. **Morozov E. V., Lopatin A. V., Nesterov V. A.** Finite-element modelling and buckling analysis of anisogrid composite lattice cylindrical shells // Composite Structures. 2011. V. 93. P. 308–323.
13. **MSC Nastran.** Quick reference guide. Newport Beach: MSC Software Corp., 2011.
14. **Аннин Б. Д.** Расчет и проектирование композиционных материалов и элементов конструкций / Б. Д. Аннин, А. Л. Каламкаров, А. Г. Колпаков, В. З. Партон. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1993.
15. **Аннин Б. Д.** Механика деформирования и оптимальное проектирование слоистых тел. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН, 2005.
16. **Аннин Б. Д., Волчков Ю. М.** Неклассические модели теории пластин и оболочек // ПМТФ. 2016. Т. 57, № 5. С. 5–14.

*Поступила в редакцию 28/VI 2021 г.,  
после доработки — 28/VI 2021 г.  
Принята к публикации 28/VI 2021 г.*

---