

## ГЕОМЕХАНИКА

УДК 539.37

### ТРЕХМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ

**А. Ф. Ревуженко**

*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,  
E-mail: revuzhenko@yandex.ru, Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия*

Описана трехмерная регулярная упаковка частиц с координационным числом, равным восьми, которая эффективным образом заменяет реальную случайную упаковку частиц. Введены понятия векторов главных напряжений и скоростей пластических деформаций. Построены трехмерные уравнения пластического деформирования, удовлетворяющие необходимому условию адекватности модели — отсутствию диссипации энергии в среде с идеально гладкими частицами. При наличии внутреннего трения уравнения приводят к неассоциированному закону течения.

*Трехмерная модель, диссипация энергии, эффективная упаковка*

DOI: 10.15372/FTPRPI20220101

Сыпучие среды занимают промежуточное положение между жидкостями и твердыми телами. Для их исследования используются различные математические модели. В случае быстрых движений применяются модели вязких жидкостей, многофазных сред, а также методы кинетической теории газов [1]. Если же в процессе деформирования контакты между частицами сохраняются так, что поведение сыпучей среды ближе к поведению твердых тел, то используются различные обобщения моделей упругопластических сред [2]. Именно этот случай является основным в задачах горного дела и геомеханики. Таким образом, речь идет о формулировке уравнений, которые описывали бы поведение под нагрузками различных упаковок частиц сыпучей среды [3]. В принципе, внутренний механизм деформирования сыпучей среды хорошо известен. Он сводится к относительному скольжению и качению частиц по контактам, на которых достигнуто предельное состояние. Причем ориентация и распределение предельных контактов существенно зависят от траектории нагружения материала. Проблема состоит в том, что число степеней свободы у такого процесса практически бесконечно, поэтому задача создания адекватной теории оказалась чрезвычайно сложной. Несмотря на то, что в этом направлении выполнено значительное число работ [4], актуальность в проведении дальнейших теоретических и экспериментальных исследований по-прежнему сохраняется.

Последнее связано также с широкой областью приложений задач механики сыпучих сред. Имеет значение и тот факт, что сыпучая среда является простейшим представителем гораздо более широкого класса материалов (горных пород, грунтов, различных порошковых материалов). В настоящее время появилась еще одна область приложений, связанная с развитием численного метода дискретных элементов. В данном методе реальные твердые тела заменяются совокупностью отдельных элементов. Вопрос об определяющих уравнениях такой среды не ставится. Вместо этого задаются потенциалы взаимодействия элементов и динамические уравнения ньютоновской механики. Формально этого достаточно для получения замкнутых решений. Однако вопрос об адекватности таких уравнений остается открытым. Проще говоря, неясно какая именно задача на самом деле решена, какие определяющие уравнения соответствуют выбранным потенциалам, упаковке частиц и самим уравнениям ньютоновской динамики.

Для решения данного вопроса необходимо располагать различными континуальными моделями среды и набором тестовых решений, полученных в рамках таких моделей. При этом континуальные модели должны удовлетворять одному необходимому условию адекватности, которое связано с законом сохранения энергии — наиболее фундаментальным законом природы. В рассматриваемой ситуации он означает, что любая математическая модель сыпучей среды в своем предельном случае, который соответствует абсолютно гладким, идеально упругим или жестким частицам, должна предсказывать нулевую диссипацию энергии. Модели, построенные на основе ассоциированного закона течения, в частности классическая модель Друкера–Прагера [5], этому условию не удовлетворяют. Более адекватными будут модели, в которых реальная стохастическая упаковка частиц заменяется эффективной регулярной упаковкой, причем сама модель строится как описание взаимного скольжения частиц в эффективной упаковке. В этом случае структура континуальных уравнений всегда будет такой, что указанное выше условие адекватности заведомо будет выполняться. Плоские модели этого типа изложены в [6, 7]. В настоящей работе рассмотрим обобщение на трехмерный случай.

### ПЛОСКАЯ МОДЕЛЬ

Для бóльшей ясности изложим вначале схему построения плоских моделей. На рис. 1 показана элементарная ячейка регулярной упаковки плоских частиц. Центральная частица  $O$  контактирует с четырьмя частицами  $A_1, A_2, A_3, A_4$ . Координационное число равно четырем. Относительное скольжение частиц  $O$  и  $A_1$  осуществляется вдоль вектора  $\bar{m}$  со скоростью  $\dot{\Lambda}$ . Через  $\bar{n}$  обозначена нормаль к контакту, через  $\bar{R}$  — вектор силы на контакте,  $\varphi$  — угол, на который отклоняется вектор силы  $\bar{R}$  от нормали  $\bar{n}$ ,  $\psi$  — угол между направлениями  $A_2A_1$  и нормалью к контакту. Остальные контакты относительно центральной частицы симметричны.

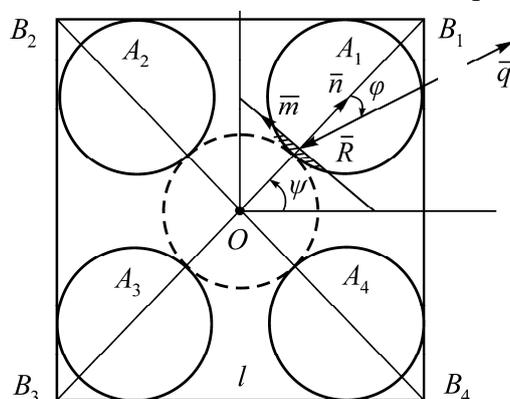


Рис. 1. Эффективная упаковка частиц в плоском случае

Методы механики сплошных сред требуют описания деформирования элементарного объема сплошной среды на языке напряжений и скоростей деформаций данного объема. В рассматриваемом случае — на языке напряжений и скоростей деформаций элементарного объема  $B_1B_2B_3B_4$ . Если скорость относительного скольжения на одном контакте известна, то на остальных контактах она определяется из условий симметрии. Отсюда находится и скорость изменения расстояний  $A_1B_1$ ,  $A_1A_2$ , а значит, и скорости деформаций  $\dot{\epsilon}_1$ ,  $\dot{\epsilon}_2$ . Следовательно, для определения  $\dot{\epsilon}_1$ ,  $\dot{\epsilon}_2$  достаточно описать кинематику скольжения только на одном контакте регулярной упаковки. Для напряжений ситуация будет аналогичной. Если  $\bar{R}$  — усилие на контакте между частицами  $O$  и  $A_1$ , то на остальных контактах усилия рассчитываются из условий симметрии. Их суммирование позволяет перейти к значениям  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ .

Таким образом,

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_1 &= -\dot{\lambda} \sin \psi, & \dot{\epsilon}_2 &= \dot{\lambda} \cos \psi, \\ \sigma_1 &= -r \cos(\psi - \varphi), & \sigma_2 &= -r \sin(\psi - \varphi). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь упругие деформации опущены, сжимающие напряжения и деформации отрицательны, напряжения ранжированы:

$$\sigma_1 \leq \sigma_2, \quad \dot{\lambda} = \frac{2\dot{\Lambda}}{l}, \quad r = \frac{2R}{l}, \quad B_1B_2 = B_2B_3 = l.$$

Из (1) следует, что скорость диссипации энергии

$$D = \sigma_1 \dot{\epsilon}_1 + \sigma_2 \dot{\epsilon}_2 = \frac{4\dot{\Lambda}R}{l^2} \sin \varphi. \quad (2)$$

Для абсолютно гладких частиц  $\varphi \rightarrow 0$  и, следовательно,  $D \rightarrow 0$ . Соотношения (1) пока не являются определяющими. Они представляют собой перевод описания поведения среды с одного языка на другой:

$$(r, \varphi, \dot{\lambda}, \psi) \leftrightarrow (\sigma_1, \sigma_2, \dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2). \quad (3)$$

Переменные слева описывают процесс деформирования на языке параметров упаковки частиц, переменные справа — на языке, принятом в механике сплошных сред.

Если ввести обозначения:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2, \quad \dot{\gamma} = \dot{\epsilon}_2 - \dot{\epsilon}_1, \quad \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \quad \tau = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}, \quad (4)$$

то из (2) следует, что

$$\dot{\epsilon} = \operatorname{tg} \nu \dot{\gamma}, \quad \tau = -\sigma \operatorname{tg}(\varphi + \nu), \quad (5)$$

где  $\nu = \pi/4 - \psi$ .

Если углы  $\nu$  и  $\varphi$  заданы, то оба уравнения становятся определяющими. Первое уравнение описывает дилатансию, второе — предельное состояние. На этом основании угол  $\nu$  или  $\psi$  будем называть углом дилатансии, а  $\varphi$  — углом внутреннего трения.

Результаты (1)–(5) получены в [6]. Для обобщения на трехмерный случай их необходимо представить в другой форме, именно перейти от углов внутреннего трения и дилатансии к компонентам векторов  $\bar{n}$ ,  $\bar{m}$ ,  $\bar{q}$  (см. рис. 1). Тогда вместо (1) можно записать:

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_1 &= \dot{\lambda} m_1, & \dot{\varepsilon}_2 &= \dot{\lambda} m_2, \\
\sigma_1 &= -r q_1, & \sigma_2 &= -r q_2, \\
n_1^2 + n_2^2 &= 1, & m_1^2 + m_2^2 &= 1, & n_1 m_1 + n_2 m_2 &= 0, \\
q_1 &= \cos \varphi n_1 - \sin \varphi m_1, & q_2 &= \cos \varphi n_2 - \sin \varphi m_2.
\end{aligned} \tag{6}$$

Непосредственно из (6) вытекает, что

$$\dot{\lambda} = \sqrt{\dot{\varepsilon}_1^2 + \dot{\varepsilon}_2^2}, \quad r = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_1 n_1 + \dot{\varepsilon}_2 n_2 &= 0, \\
\sigma_1 n_1 + \sigma_2 n_2 &= -\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \cos \varphi,
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} &= -\cos \varphi n_1 + \sin \varphi \frac{\dot{\varepsilon}_1}{\sqrt{\dot{\varepsilon}_1^2 + \dot{\varepsilon}_2^2}}, \\
\frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} &= -\cos \varphi n_2 + \sin \varphi \frac{\dot{\varepsilon}_2}{\sqrt{\dot{\varepsilon}_1^2 + \dot{\varepsilon}_2^2}}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Таким образом, вместо угла дилатансии в уравнении (8) присутствуют компоненты вектора  $\bar{n}$ . Данные компоненты, наряду с углом внутреннего трения  $\varphi$ , также фигурируют в условии предельного состояния.

Далее необходимо обсудить физическую интерпретацию плоской деформации (1)–(9). Возможно три варианта интерпретации:

— частицы представляют собой плоские диски, которые образуют определенную упаковку в плоскости и покинуть плоскость они не могут;

— частицы представляют собой прямые цилиндры, которые могут смещаться только в направлениях, ортогональных своим образующим. Смещения вдоль образующих запрещены, тогда рис. 1 — это сечение цилиндров плоскостью, ортогональной к их образующим;

— частицы представляют собой симметричные трехмерные элементы, расположенные так, что контакты между ними и их центры удерживаются строго в одной плоскости.

Для постановки экспериментов удобнее всего вторая интерпретация, для построения трехмерных уравнений — последняя.

### ТРЕХМЕРНЫЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ

Если частицы имеют форму сферы, то можно сказать, что соотношения (1)–(9) получены в предположении, что относительные смещения частиц допускаются только вдоль меридианов сфер. Эксперименты по деформированию подобной двумерной сыпучей среды показывают, что ее поведение существенно отличается от плоской деформации среды, состоящей из трехмерных частиц [7, 8]. Это хорошо видно на примере задачи о дилатансии в стесненных условиях. Если частицы принять абсолютно жесткими, то положительную дилатансию упаковки никакими напряжениями подавить невозможно. Для упругих частиц расчетные напряжения конечны, но весьма значительны, так как пластическое разрыхление должно полностью компенсироваться только за счет упругого сжатия частиц.

В реальной трехмерной среде такого увеличения напряжений не наблюдается [8]. Причина этого практически очевидна. В двумерной сыпучей среде частицы могут двигаться только “в лоб” друг к другу, т. е. по меридианам. В трехмерном случае появляется составляющая скольжения вдоль параллели (в обход вершины). Таким образом, если в начальном положении частица  $A_2$  смещена относительно центральной частицы  $O$  вдоль параллели, то для симметрии необходимо ввести еще одну частицу, которая будет смещена вдоль параллели в противоположную сторону. То же необходимо сделать и для остальных частиц. В результате приходим к трехмерной упаковке, элементарная ячейка которой приведена на рис. 2. Координационное число равно восьми.

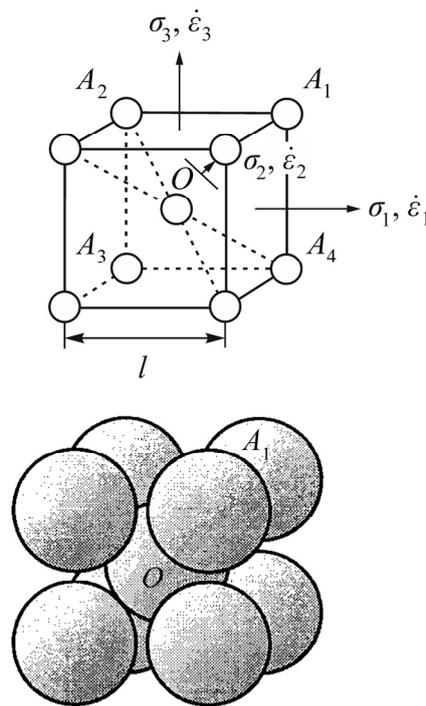


Рис. 2. Эффективная упаковка частиц в трехмерном случае

В пределах элементарной ячейки все контакты находятся в одинаковых условиях. Поэтому достаточно рассмотреть кинематику скольжения и силы, которые действуют на одном из контактов. Выберем контакт между центральной частицей  $O$  и частицей  $A_1$  (рис. 2). Смещения остальных частиц и силы на контактах находятся из условий симметрии. Суммируя результаты, определяем напряжения и скорости деформаций на ячейки. Затем ячейку рассматриваем уже как элементарный объем сплошной среды и для дальнейших построений используем методы континуальной механики.

На рис. 3 показана плоскость, касательная к контакту между центральной частицей  $O$  и частицей  $A_1$ ,  $\bar{n}$  — нормаль в точке контакта к плоскости, направленная от частицы  $O$  к  $A_1$ ,  $\bar{R}$  — вектор силы,  $\varphi$  — угол, на который отклоняется сила от нормали  $\bar{n}$ ,  $\bar{q}$  — единичный вектор в направлении  $-\bar{R}$ . Направление скольжения  $\bar{m}$  должно совпадать с направлением касательной составляющей силы  $\bar{R}$ .

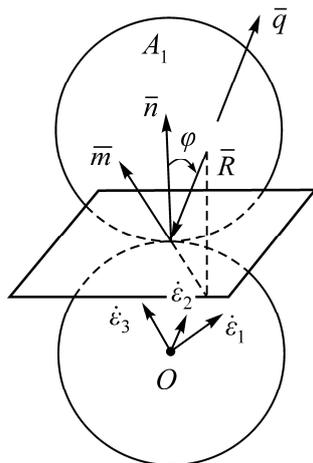


Рис. 3. Параметры скольжения по контакту между двумя частицами

Действуя точно так же, как и в плоском случае, приходим к следующей структуре уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_1 &= \dot{\lambda} m_1, & \dot{\epsilon}_2 &= \dot{\lambda} m_2, & \dot{\epsilon}_3 &= \dot{\lambda} m_3, \\ \sigma_1 &= -r q_1, & \sigma_2 &= -r q_2, & \sigma_3 &= -r q_3, \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1, & m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 &= 1, \\ n_1 m_1 + n_2 m_2 + n_3 m_3 &= 0, \\ q_i &= \cos \varphi n_i - \sin \varphi m_i, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $i = 1, 2, 3$ ;  $\dot{\lambda} = 2\dot{\Lambda} / l$ ;  $r = 4R / l^2$ ;  $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$ .

Отсюда следует, что

$$\dot{\lambda} = \sqrt{\dot{\epsilon}_1^2 + \dot{\epsilon}_2^2 + \dot{\epsilon}_3^2}, \quad r = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}, \quad (11)$$

$$\dot{\epsilon}_1 n_1 + \dot{\epsilon}_2 n_2 + \dot{\epsilon}_3 n_3 = 0, \quad (12)$$

$$\sigma_1 n_1 + \sigma_2 n_2 + \sigma_3 n_3 = -\cos \varphi \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}} &= -\cos \varphi n_1 + \sin \varphi \frac{\dot{\epsilon}_1}{\sqrt{\dot{\epsilon}_1^2 + \dot{\epsilon}_2^2 + \dot{\epsilon}_3^2}}, \\ \frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}} &= -\cos \varphi n_2 + \sin \varphi \frac{\dot{\epsilon}_2}{\sqrt{\dot{\epsilon}_1^2 + \dot{\epsilon}_2^2 + \dot{\epsilon}_3^2}}, \\ \frac{\sigma_3}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}} &= -\cos \varphi n_3 + \sin \varphi \frac{\dot{\epsilon}_3}{\sqrt{\dot{\epsilon}_1^2 + \dot{\epsilon}_2^2 + \dot{\epsilon}_3^2}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Система (10) обладает двумя особенностями. Первая связана с ее структурой, которая обеспечивает безусловное выполнение необходимого условия адекватности модели. Действительно, скорость диссипации энергии

$$D = \sigma_1 \dot{\epsilon}_1 + \sigma_2 \dot{\epsilon}_2 + \sigma_3 \dot{\epsilon}_3 = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} \sqrt{\dot{\epsilon}_1^2 + \dot{\epsilon}_2^2 + \dot{\epsilon}_3^2} \sin \varphi.$$

При  $\varphi \rightarrow 0$  диссипация энергии  $D \rightarrow 0$ . Вторая особенность: в основе уравнений (10) лежат правила векторного, а не тензорного проектирования, т. е. напряженно-деформированное состояние характеризуется не тензорами  $\sigma = \sigma_i \bar{e}_i \bar{e}_i$ ,  $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_i \bar{e}_i \bar{e}_i$ , а векторами главных напряжений и скоростей пластических деформаций:

$$\bar{\sigma} = \sigma_i \bar{e}_i, \quad \bar{\dot{\epsilon}} = \dot{\epsilon}_i \bar{e}_i, \quad (15)$$

$\bar{e}_i$  — орты вдоль главных направлений тензоров  $\sigma$ ,  $\dot{\epsilon}$ .

Из (15), (10) видно, что закон деформирования (10) предполагает соосность тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций. Кроме того, видно, что угол между векторами (15) равен  $\pi/2 - \varphi$ . Значит, имеет место неассоциированный закон течения. Очевидно также, что скорость диссипации энергии — это скалярное произведение векторов  $\bar{\sigma}$  и  $\bar{\dot{\epsilon}}$ .

“Мост” между тензорным и векторным описаниями устанавливается элементарно: вектор главных напряжений (15) совпадает с точностью до множителя с вектором напряжений, действующим на октаэдрической площадке и вычисленным по правилам тензорного проектирования. Такое же соответствие отмечается и для скоростей деформаций.

Далее, соотношения (10) устанавливают связи между следующими группами переменных:

$$(r, \dot{\lambda}, \varphi, n_1, n_2, m_1) \leftrightarrow (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2, \dot{\epsilon}_3). \quad (16)$$

Первая группа описывает процесс деформирования на языке параметров упаковки частиц, вторая — на языке континуальной механики. Соотношения (10) открывают возможность формулировки континуальных определяющих уравнений на языке микропеременных (16).

Равенство (12) показывает, что задание компонент вектора  $\bar{n}$  равносильно заданию дилатансионного уравнения. Единичный вектор  $\bar{n}$  имеет две степени свободы. Значит, дилатансия в трехмерном случае характеризуется не одним, как в плоском случае, а двумя независимыми параметрами. Например, параметрами  $n_1$  и  $n_2$  либо их комбинациями, имеющими тот или иной механический смысл. В плоском случае дилатансия элементарного объема связана с его максимальным сдвигом. В трехмерном случае наблюдаются три площадки максимальных сдвигов, поэтому дилатансию естественно связывать с ними:

$$\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_3 = \frac{n_1 - n_3}{n_1 + n_2 + n_3} (\dot{\epsilon}_3 - \dot{\epsilon}_1) + \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2 + n_3} (\dot{\epsilon}_2 - \dot{\epsilon}_1) + \frac{n_2 - n_3}{n_1 + n_2 + n_3} (\dot{\epsilon}_3 - \dot{\epsilon}_2),$$

$$n_3 = \pm \sqrt{1 - n_1^2 + n_2^2}.$$

Дилатансия приводит к изменению относительной плотности среды и в общем, т. е. нелинейном, случае — к изменению всех ее характеристик. Соответствующие уравнения удобнее записать в приращениях

$$\Delta n_1 = \alpha_1 \Delta \lambda, \quad \Delta n_2 = \alpha_2 \Delta \lambda, \quad \Delta \lambda = \dot{\lambda} \Delta t, \quad (17)$$

где  $\Delta t$  — шаг по времени;  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  — заданы.

Обратимся теперь к соотношению (13). Предположим, что сцепление отсутствует и несущая способность среды определяется только силами сжатия между частицами и трением между ними. В эффективно регулярной упаковке сила трения характеризуется углом  $\varphi$ . Предположим, что исходный объем среды сформирован так, что его реальная, значит, случайная упаковка частиц является изотропной. Подвергнем объем некоторому начальному всестороннему сжатию  $p$ . Численные и физические эксперименты показывают, что за счет устранения части

дефектов упаковка начинает необратимо уплотняться. Однако после нескольких циклов  $p \rightarrow p_0 \rightarrow 0$  дефекты, неустойчивые к сжатию, устраняются и упаковка переходит в обратимое состояние (на сжатие до предела  $p_0$  упаковка реагирует вполне упруго).

Построение математической модели данного процесса — отдельная задача. Здесь она не рассматривается. Будем считать, что исходная упаковка частиц уже изначально является обратимой. Нагрузим ее напряжениями  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$ ,  $p < p_0$ . В эффективной регулярной упаковке данному состоянию должно отвечать значение  $\varphi \equiv 0$  или равные между собой значения параметров  $n_1 = n_2 = n_3 = 1/\sqrt{3}$ . Далее осуществим сдвиг элементарного объема в некотором направлении. Сдвиг приведет к тому, что часть контактов между частицами мобилизуется и перейдет в предельное состояние. По ним произойдут проскальзывания, и объем получит необратимую (допредельную) пластическую деформацию. Для ее описания используем уравнение

$$\Delta\varphi = \beta\Delta\lambda, \quad (18)$$

где  $\beta$  задано из тестовых экспериментов.

Распределение и ориентация мобилизованных контактов зависят от направления сдвига, а также от того, идет активное нагружение или разгрузка. В качестве критерия разгрузки естественно принять  $\Delta\varphi < 0$ , а критерия активного нагружения —  $\Delta\varphi > 0$ . При активном нагружении значение  $\varphi$  увеличивается и достигает своего критического значения  $\varphi^*$ , когда материал переходит в предельное состояние. Уравнение (13) при  $\varphi = \varphi^*$  становится определяющим.

Если учесть тождество

$$3(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2,$$

то становится ясно, что уравнение (13) описывает связь интенсивности касательных напряжений и гидростатического сжатия с учетом вида напряженного состояния — параметра Лоде–Надаи. В частном случае, когда  $n_1 = n_2 = n_3 = 1/\sqrt{3}$ , уравнение (13) переходит в условие предельного состояния Шлейхера–Надаи.

### ЗАМКНУТАЯ МОДЕЛЬ

Определяющие уравнения замыкаются уравнениями движения (равновесия) и условиями совместности деформаций. Для их записи необходимо перейти от координат  $\bar{e}_i$ , связанных с главными напряжениями, к координатам, в которых задано деформируемое тело, краевые и начальные условия. Обозначим исходные координаты  $Ox_1x_2x_3$ , а орты — через  $\bar{\theta}_j$ :

$$\bar{\theta}_j = a_{ij}\bar{e}_j, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Параметры  $a_{ij}$  должны быть включены в список неизвестных. Векторы — единичные и взаимно ортогональные, поэтому число независимых переменных  $a_{ij}$  равно трем. Если через  $\sigma_{ij}$ ,  $\dot{\epsilon}_{ij}$  обозначить компоненты соответствующих тензоров в координатах  $Ox_1x_2x_3$ , то можно записать

$$\sigma_{ij} = \sigma_k a_{jk} a_{ik}, \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_k a_{jk} a_{ik}. \quad (19)$$

Теперь перейдем к уравнениям равновесия (движения) и условиям совместности деформаций в параметрической форме (через соотношения Коши):

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = \rho \frac{dv_i}{dt}, \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{dv_i}{dx_j} + \frac{dv_j}{dx_i} \right). \quad (20)$$

Здесь  $X_i$ ,  $v_i$  — компоненты объемной силы и вектора скорости;  $d/dt$  — полная производная по времени;  $\rho$  — плотность.

Подсчитаем баланс неизвестных и уравнений. Неизвестных,  $\dot{\epsilon}_{ij}$  — 6,  $\sigma_i$  — 3,  $\dot{\epsilon}_i$  — 3,  $v_i$  — 3,  $a_{ij}$  — 3 независимых. Всего 24. В список уравнений включим систему (14) и условие дилатансии (12). Уравнение предельного состояния (13) в список не включаем, так как оно следует из указанных четырех уравнений (12), (14). Если равенства (14) возвести в квадрат, просуммировать и учесть (12), то придем к тождеству. Следовательно, в системе (12), (14) содержится только три независимых уравнения. Подсчитаем общее число уравнений: (14), (12) — 3, (19) — 12, (20) — 9. Всего 24 — баланс сошелся, система уравнений замкнута. Плотность  $\rho$ , параметры дилатансии  $n_1$ ,  $n_2$  и внутреннего трения  $\varphi$  считаются известными. В предельном состоянии — это известные постоянные. Если рассматривается процесс допредельного пластического деформирования, то должны быть заданы все параметры в начальный момент времени  $t = 0$ . Дальше задача решается по шагам  $\Delta t$  и параметры определяются соотношениями (17), (18).

#### ВЫВОДЫ

Выбор в качестве эффективной трехмерной регулярной упаковки частиц (с координационным числом восемь) приводит к замкнутой системе уравнений, которая:

- удовлетворяет необходимому условию адекватности математической модели — предсказывает нулевую диссипацию энергии в случае идеально гладких частиц;
- приводит к неассоциированному закону течения;
- показывает, что в трехмерном случае дилатансия должна описываться не одним, а двумя независимыми параметрами;
- может быть использована для решения краевых задач.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Механика** гранулированных сред: теория быстрых движений / сб. статей, сост. И. В. Ширко. — М.: Мир, 1985. — 280 с.
2. **Определяющие законы** механики грунтов / под ред. В. Н. Николаевского. — М.: Мир, 1975. — 230 с.
3. **Дересевич Г.** Механика зернистой среды. Проблемы механики / под ред. Х. Драйдена, Т. Кармана. — М.: ИЛ, 1961. — С. 91–152.
4. **Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д.** Математическая теория пластичности. — М.: Физматлит, 2001. — 704 с.
5. **Drucker D. C. and Prager W.** Soil mechanics and plastic analysis or limit design, Quarterly of Appl. Mathem., 1952, Vol. 10, No. 2. — P. 157–165.
6. **Ревуженко А. Ф.** Механика сыпучей среды. — Новосибирск: Офсет, 2003. — 373 с.
7. **Revuzhenko A. F.** Mechanics of granular media, Springer, 2006. — 308 p.
8. **Бобряков А. П., Ревуженко А. Ф.** Некоторые закономерности пластического деформирования сыпучих материалов // ФТПРПИ. — 1988. — № 4. — С. 3–8.

Поступила в редакцию 07/IX 2021  
 После доработки 20/X 2021  
 Принята к публикации 24/XII 2021