

УДК 622.023.23:620.173.24

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОБОСНОВАНИЕ НЕЛОКАЛЬНЫХ  
КРИТЕРИЕВ РАЗРУШЕНИЯ ГЕОМАТЕРИАЛОВ  
ПРИ НЕРАВНОКОМПОНЕНТНОМ СЖАТИИ ПЛАСТИН  
С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ**

**С. В. Сукнев**

*Институт горного дела Севера им. Н.В. Черского СО РАН, E-mail: suknyov@igds.ysn.ru,  
просп. Ленина, 43, 677980, г. Якутск, Россия*

Теоретически и экспериментально исследовано влияние краевых условий на разрушение хрупкого геоматериала в зоне концентрации напряжений при неравнораспределенном сжатии с учетом масштабного эффекта. Проведено сопоставление результатов расчета критического напряжения по интегральному и градиентному критериям с полученными экспериментальными данными.

*Разрушение, геоматериалы, масштабный эффект, концентрация напряжений, отверстие, нелокальные критерии разрушения*

Для прогнозирования разрушения структурно-неоднородных материалов, в том числе геоматериалов и горных пород, содержащих концентраторы напряжений (включения, полости, дефекты), используют нелокальные и градиентные критерии предельного состояния. В последнее время эти критерии развиты в работах [1–6] и др. В частности, в [6] для построения модели квазихрупкого разрушения горных пород в качестве критерия разрушения использован интегральный критерий Нейбера – Новожилова.

Большинство нелокальных и градиентных критериев основано на представлении о формировании в материале зоны предразрушения (fracture process zone), в которой происходит локальное перераспределение напряжений, в то время как основной материал деформируется упруго вплоть до разрушения. Общим свойством этих критериев является введение внутреннего размера материала (intrinsic material length), характеризующего его структуру, что позволяет описать масштабный эффект, свойственный структурно-неоднородным материалам. На практике это дает возможность прогнозировать наступление разрушения при варьировании размера зоны концентрации напряжений  $L_e$ .

В большинстве работ [7–11], посвященных физическому моделированию разрушения материалов с концентраторами напряжений, варьирование  $L_e$  осуществлялось путем изменения геометрических размеров или формы концентратора (отверстия, выреза и т. д.) при неизменных краевых условиях. В [12] рассмотрено образование трещин отрыва в хрупком материале с эллиптическим отверстием под действием равномерно распределенного сжатия, при этом отверстие заданных размеров и формы ориентировано под различными углами к оси нагружения.

В [13] исследовано образование трещин отрыва в образцах с круговым отверстием различного диаметра под действием равномерно и неравномерно сжимающей нагрузки. Отмечено, что большое влияние на процессы трещинообразования оказывает распределение напряжений вдоль траектории распространения трещины, которое определяется краевыми условиями. При неизменных краевых условиях образование трещин отрыва в зонах концентрации растягивающих напряжений хорошо описывается градиентным критерием разрушения, который учитывает влияние размера зоны концентрации напряжений на локальную прочность материала. Но если изменение краевых условий приводит к существенному изменению распределения напряжений вдоль траектории распространения трещины, то использование размера  $L_e$  в качестве управляющего параметра критерия для оценки разрушающей нагрузки может оказаться недостаточным.

В настоящей работе на примере задачи о разрушении хрупкого материала с круговым отверстием под действием двухосного нагружения сжимающими и растягивающими усилиями рассматривается вопрос о возможности применения интегрального и градиентного критериев в тех случаях, когда варьирование размера зоны концентрации напряжений осуществляется за счет изменения краевых условий.

Исследуется изотропная однородная линейно-упругая пластина из хрупкого материала, к которой приложено равномерно распределенное на бесконечности сжимающее напряжение  $\sigma$  и растягивающее напряжение  $\alpha\sigma$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ . В центре пластины находится малое круговое отверстие радиусом  $a$  (рис. 1). Требуется определить критическое напряжение  $\sigma_c$ , при котором в пластине будет достигнуто предельное состояние (образование трещин отрыва на контуре отверстия) в зависимости от параметра двухосности нагружения  $\alpha$ .

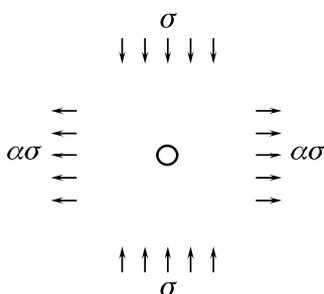


Рис. 1. Круговое отверстие при двухосном нагружении

Материал пластины характеризуется масштабным эффектом прочностных свойств. В присутствии концентратора напряжений (отверстия) эффективный нагруженный объем определяется размером зоны концентрации напряжений  $L_e$ . Стандартные механические свойства материала пластины характеризуются предельным напряжением  $\sigma_0$ , которое рассчитывается при одноосном растяжении пластины без отверстия. Расчет  $\sigma_c$  проведем с использованием интегрального и градиентного критериев разрушения.

#### КРИТЕРИИ РАЗРУШЕНИЯ

Из нелокальных критериев наибольшее распространение получил критерий средних напряжений, или интегральный критерий, который имеет вид

$$\langle \sigma_e \rangle_d < \sigma_0,$$

где  $\langle \sigma_e \rangle_d$  — усредненное на расстоянии  $d$  по опасному сечению значение эквивалентного напряжения, характеризующего внутреннее напряженное состояние деформируемого тела:

$$\langle \sigma_e \rangle_d = \frac{1}{d} \int_{x_0}^{x_0+d} \sigma_e(x) dx, \quad (1)$$

здесь  $x_0$  — координата точки максимума эквивалентного напряжения. Размер усреднения  $d$  полагают константой материала. Необходимость усреднения напряжений связывают, прежде всего, с образованием зоны предразрушения (поврежденности), в которой происходит перераспределение напряжений. Размер этой зоны приблизительно равен  $d$ .

Оценим критическое напряжение, при котором на контуре кругового отверстия в образце, подверженном двухосному нагружению (рис. 1), образуются трещины отрыва. Для расчетов воспользуемся известным [14] решением задачи Кирша. Эквивалентное напряжение будем определять по первой теории прочности (наибольших нормальных напряжений). Распределение нормальных напряжений  $\sigma_y$  вдоль линии приложения сжимающей нагрузки (ось  $x$ ) имеет вид

$$\sigma_y = \frac{\sigma}{2} \left( 3 \frac{a^4}{x^4} - \frac{a^2}{x^2} \right) + \frac{\alpha \sigma}{2} \left( 2 + \frac{a^2}{x^2} + 3 \frac{a^4}{x^4} \right). \quad (2)$$

Начало координат выбрано в центре отверстия, величина приложенного сжимающего напряжения  $\sigma$  принята положительной. Растягивающие напряжения достигают своего максимального значения  $\sigma_{\max} = \sigma(1 + 3\alpha)$  на контуре отверстия в точках  $x = \pm a$ , при удалении от него напряжения быстро убывают.

Критическое напряжение получим, подставив (2) в (1) с пределами интегрирования  $[a, a + d]$  и приравняв результат интегрирования к  $\sigma_0$ :

$$\sigma_c = 2\sigma_0 [(1 + \gamma)\gamma^{-3} + \alpha(1 + \gamma^{-1})(2 + \gamma^{-2})]^{-1}, \quad (3)$$

где  $\gamma = 1 + d/a$ .

В соответствии с градиентным критерием [3] локальная прочность материала предполагается зависящей от размера зоны концентрации напряжений  $L_e$ . Если размер  $L_e$  достаточно велик по сравнению с размерами структурных составляющих материала, то величина локальной прочности мало отличается от величины предельного напряжения  $\sigma_0$ , определенной в условиях однородного распределения напряжений. Наоборот, если  $L_e$  сопоставим с размерами структурных элементов, их влияние на локальную прочность становится заметным. Причем это влияние тем больше, чем меньше размер  $L_e$  по отношению к характерному размеру структуры материала  $L_0$ . Таким образом, локальная прочность материала зависит не просто от размера зоны концентрации напряжений  $L_e$ , а от соотношения  $L_0/L_e$ , которое характеризует масштаб в рассматриваемой задаче. С учетом этого критерий представляется в виде

$$\sigma_e < f(\sigma_0, L_0/L_e). \quad (4)$$

Для задачи об образовании трещин отрыва при сжатии функция локальной прочности запишется следующим образом:

$$f(\sigma_0, L_0/L_e) = \sigma_0 \left( 1 + \left( \frac{L_0}{L_e} \right)^n \right), \quad (5)$$

где

$$L_e = \frac{\sigma_e}{|\text{grad } \sigma_e|}.$$

Критическое напряжение, при котором на контуре отверстия образуются трещины отрыва, определяется выражением

$$\sigma_c = \frac{\sigma_0}{k} \left( 1 + \left( \frac{L_0}{L_e} \right)^n \right). \quad (6)$$

Размер зоны концентрации напряжений, рассчитанный по формуле (5) с учетом (2), составил  $L_e = a \frac{1+3\alpha}{5+7\alpha}$ . Коэффициент  $k$  в формуле (6) представляет собой отношение максимальных растягивающих напряжений на контуре отверстия к приложенному напряжению  $\sigma$ . Для рассматриваемой задачи  $k = 1 + 3\alpha$ . При значении параметра  $L_0 = 0$  формула (6) дает расчет критического напряжения согласно традиционному критерию разрушения.

### ИСПЫТАНИЯ ОБРАЗЦОВ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Программа экспериментальных исследований включала проведение двух серий испытаний гипсовых образцов с круговым отверстием под действием неравнораспределенного сжатия. Нагрузка  $p$  прикладывалась к образцу через металлические вставки, помещенные между образцом и нагружающими плитами. Вставки размещались в центре верхней и нижней грани образца (рис. 2).

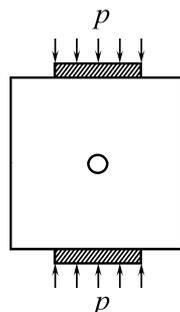


Рис. 2. Схема нагружения образца

При этом в центральной части образца (вне зоны влияния отверстия) реализовывалось достаточно однородное двухосное напряженное состояние: растяжение по горизонтальной оси и сжатие по вертикальной (рис. 1).

В качестве модельного материала использовали дигидрат сульфата кальция (двухводный гипс), приготовленный для первой серии экспериментов (гипс 1) из водного раствора строительного гипса, содержащего  $\beta$ -полугидрат сульфата кальция, и для второй серии экспериментов (гипс 2) — из водного раствора высокопрочного гипса марки ГВВС-16, содержащего  $\alpha$ -полугидрат сульфата кальция. Образцы представляли собой квадратные плиты размером  $200 \times 200$  мм и толщиной 36–38 мм. После изготовления образцы просушивали в течение 30–40 сут, непосредственно перед испытанием в центре образцов высверливали круговые отверстия диаметром 5 мм.

В процессе испытания образцов в зонах концентрации растягивающих напряжений на контуре отверстия наблюдалось образование трещин отрыва, которое носило внезапный характер и сопровождалось характерным щелчком. Трещины моментально распространялись на расстояние около 50 мм вдоль линии приложения сжимающей нагрузки, при дальнейшем нагружении их рост стабилизировался. Образование трещин также сопровождалось локальной разгрузкой образца, что отражалось на диаграмме деформирования в виде появления зубца. Критическую нагрузку в момент образования трещин определяли по вершине зубца на диаграмме. На рис. 3 в качестве примера приведены диаграммы деформирования образцов из гипса 1 в координатах “нагрузка–время испытания”, использованы вставки двух размеров: широкие (114 мм) и узкие (40 мм).



Рис. 3. Диаграммы деформирования образцов из гипса 1

Предел прочности материала на растяжение рассчитывали из прямых экспериментов, т. е. путем испытания образцов на разрыв. Для этого изготовили образцы толщиной 25 мм корсетного типа с радиусом закругления рабочей части 110–120 мм и шириной в минимальном сечении 30 мм. Для исключения возможности передачи на образец изгибающих и крутящих моментов во время нагружения разработаны специальные цепные захваты. Их использование позволило добиться равномерного растяжения в минимальном сечении образца. По результатам испытания 11 образцов из гипса 1 определено среднее значение предела прочности 2.00 МПа, стандартное отклонение составило 0.29 МПа.

Значения  $\sigma$  и  $\alpha$  вычисляли методом конечных элементов в центре образцов, нагруженных через вставки заданного размера и не содержащих отверстия. Нагрузку, приложенную к образцу, моделировали перемещением абсолютно жесткой вставки. В области контакта образца со вставкой накладывали условие непроскальзывания. Результаты расчетов приведены в таблице.

С целью проверки корректности сделанных оценок, используя решение задачи Кирша и полученные значения  $\sigma$  и  $\alpha$ , рассчитывали максимальные растягивающие напряжения на контуре малого кругового отверстия, помещенного в центр пластины. Те же напряжения рассчитывали для образцов, содержащих отверстие и нагруженных через вставки, методом конечных элементов. Расхождение составило около 1%, что намного меньше разброса полученных экспериментальных данных о критическом давлении: коэффициент вариации составил от 5 до 10%.

На рис. 4а представлены полученные по данным эксперимента значения критического напряжения  $\sigma_c$  (точки) в момент образования трещин отрыва на контуре отверстия в зависимости от параметра двухосности  $\alpha$  и результаты расчета  $\sigma_c$ , сделанные на основе интегрального (кривая 1) и градиентного (кривая 2) критериев по формулам (3) и (6) соответственно. Штриховая кривая рассчитана согласно традиционному критерию. Параметры критериев составили:  $d = 2.2$  мм,  $L_0 = 1.9$  мм. Параметр градиентного критерия  $n$  задавали равным 0.5 на основании анализа экспериментальных данных об образовании трещин отрыва в образцах с круговым отверстием различного диаметра [13]. Видно, что интегральный критерий разрушения лучше описывает полученные экспериментальные данные по сравнению с градиентным критерием.

При испытании образцов из гипса 2 размер вставок изменяли от 20 до 178 мм, результаты расчетов  $\sigma$  и  $\alpha$  приведены в таблице. Изготовлено и испытано по 5–6 образцов со вставками каждого размера. Предел прочности материала на растяжение определяли из прямых экспериментов. По результатам испытания 12 образцов найдено среднее значение предела прочности 6.50 МПа, стандартное отклонение составило 0.67 МПа.

На рис. 4б приведены вычисленные по данным эксперимента значения критического напряжения  $\sigma_c$  (точки) в момент образования трещин отрыва на контуре отверстия в зависимости от параметра двухосности  $\alpha$  и результаты расчета  $\sigma_c$ , сделанные на основе интегрального

(кривая 1) и градиентного (кривая 2) критериев по формулам (3) и (6) соответственно. Штриховая кривая рассчитана по традиционному критерию. Интегральный критерий разрушения хорошо описывает полученные экспериментальные данные. Размер усреднения  $d$  составил 0.92 мм. Так же как и в первой серии экспериментов, градиентный критерий несколько хуже описывает экспериментальные данные. Параметр  $L_0$  составил 0.44 мм.

Параметры образцов из гипса 1 и 2

Размер вставки, мм	$\sigma/p$	$\alpha$	$a$ , мм	$L_e$ , мм
Гипс 1				
40	0.347	0.317	2.5	0.68
114	0.757	0.189	2.5	0.62
Гипс 2				
20	0.185	0.327	2.5	0.68
60	0.488	0.299	2.5	0.67
100	0.693	0.235	2.5	0.64
139	0.822	0.134	2.5	0.59
178	0.942	0.015	2.5	0.51

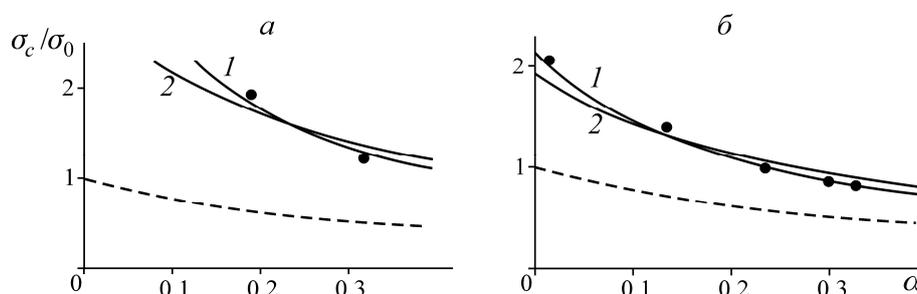


Рис. 4. Зависимость критического напряжения от параметра двухосности нагружения для образцов:  $a$  — из гипса 1;  $b$  — из гипса 2

### ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Достаточно очевидно, что применение градиентного критерия для более точного описания полученных экспериментальных данных возможно, если предположить, что параметр критерия  $L_0$  не остается постоянным, а зависит от параметра двухосности нагружения  $\alpha$ , т. е. от краевых условий, что подтверждает сделанные ранее [13] выводы. На рис. 5 в качестве примера приведены экспериментальные данные (точки), полученные во второй серии экспериментов, и результаты расчета, выполненные по градиентному критерию при значениях параметра  $L_0 = 0.69$  мм (кривая 1) и  $L_0 = 0.30$  мм (кривая 2). Экспериментальные точки находятся в полосе, ограниченной расчетными кривыми.

Поскольку управляющим параметром градиентного критерия является размер зоны концентрации напряжений (или обратная ему величина — относительный градиент напряжений), то сделанный вывод справедлив лишь в том случае, если влияние неоднородности поля напряжений на локальную прочность материала исчерпывающим образом определяется параметром  $L_e$ . В противном случае критерий разрушения должен учитывать распределение напряжений не только в зоне концентрации напряжений, но и за ее пределами.

На рис. 6 показаны распределения нормальных напряжений  $\sigma_y$  вдоль линии приложения сжимающей нагрузки (ось  $x$ ) в образцах из первой серии экспериментов, нагруженных через широкие (кривая 1) и узкие (кривая 2) вставки. Напряжения отнесены к максимальным растягивающим напряжениям на контуре отверстия, которые в соответствии с традиционным критерием разрушения достигают предельного значения  $\sigma_0$  в момент образования трещины.

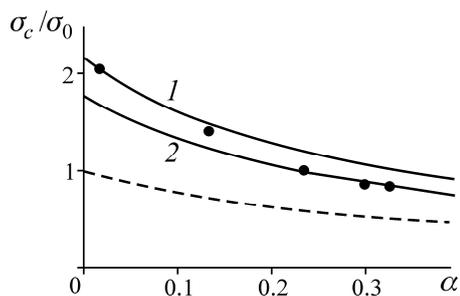


Рис. 5. Зависимость критического напряжения от параметра двухосности нагружения для образцов из гипса 2

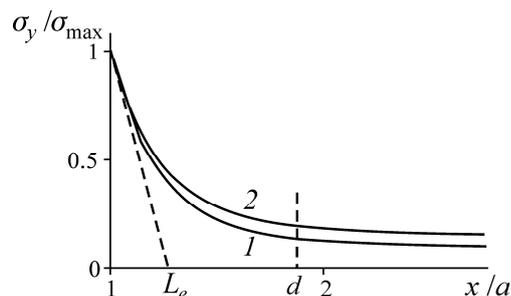


Рис. 6. Распределение напряжений при нагружении образца из гипса 1 через широкие (1) и узкие (2) вставки

Согласно градиентному критерию, максимальные напряжения на контуре отверстия в момент образования трещины превышают значение  $\sigma_0$ , но в обоих случаях нагружения образца (через широкие или узкие вставки) они приблизительно одинаковы, поскольку относительные градиенты напряжений на контуре отверстия также приблизительно равны. Этот вывод справедлив для любых материалов, характеризующихся значением  $L_0 < L_e$ , и для материалов, у которых  $L_0$  превышает размер зоны концентрации напряжений.

Иначе обстоит дело при использовании интегрального критерия разрушения. Управляющим параметром критерия является площадь под кривой  $\sigma_y(x)$  в пределах размера усреднения  $d$ . В зависимости от того как соотносится размер усреднения с размером зоны концентрации напряжений, картина будет различной. При  $d \ll L_e$  результат применения интегрального критерия аналогичен применению градиентного критерия, поскольку распределение напряжений в области  $[a, a + d]$  при нагружении образца через широкие или узкие вставки приблизительно одинаково. Поэтому при малых  $d$  управляющим параметром интегрального критерия фактически является тот же относительный градиент напряжений, что и в градиентном критерии. Размер зоны поврежденности мал, и мы имеем дело с хрупким разрушением.

Но если масштабный эффект достаточно велик, т. е. разрушающие напряжения в 2 раза и более превышают напряжения, рассчитанные по традиционным критериям, что характерно для хрупких пористых материалов (рис. 4), то параметр  $d$  должен быть сопоставим или превышать  $L_e$ . В этом случае влияние на разрушающее напряжение оказывает распределение напряжений не только в зоне концентрации напряжений, но и за ее пределами, а оно зависит от краевых условий. Имеет место квазихрупкое разрушение с развитой зоной поврежденности, что и наблюдалось в эксперименте. Очевидно, размер этой зоны определяется в большей степени геометрией и условиями нагружения образца, чем структурой материала. Действительно, исследованный в работе гипс представляет собой пористый материал со средним размером пор 0.2 мм при общей пористости до 50% [15]. Структура гипса — это структура его порового пространства, которая в значительной степени обуславливает его физико-механические свойства. Размер зоны поврежденности в несколько раз превышает средний размер пор и тем более размер зерен исследованного материала.

Поскольку управляющим параметром градиентного критерия является размер  $L_e$ , влияние распределения напряжений вне зоны концентрации напряжений может быть учтено только соответствующей корректировкой структурного параметра  $L_0$ . При квазихрупком разрушении с развитой зоной поврежденности параметр  $L_0$  в градиентном критерии обусловлен не только структурой материала, но также геометрией образца и краевыми условиями.

**ВЫВОДЫ**

Рассмотрена задача о разрушении хрупкого материала с круговым отверстием под действием двухосного нагружения сжимающими и растягивающими усилиями при варьировании параметра двухосности нагружения с учетом масштабного эффекта прочностных свойств материала. Для исследованных пористых геоматериалов размер зоны поврежденности в несколько раз превышает средний размер пор и определяется в большей степени геометрией и условиями нагружения образца, чем структурой порового пространства материала. Более того, полученные оценки зоны поврежденности свидетельствуют о том, что неупругие деформации охватывают значительные области, размер которых сопоставим или даже превышает размер зоны концентрации упругих напряжений. В этом случае влияние на разрушающее напряжение оказывает не только распределение напряжений в зоне концентрации напряжений, но также распределение напряжений за ее пределами, определяемое краевыми условиями.

Сопоставление результатов расчета разрушающего напряжения по интегральному и градиентному критериям с полученными экспериментальными данными показало, что использование интегрального критерия в рассмотренной задаче является предпочтительным.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Seweryn A., Mroz Z. A non-local stress failure condition for structural elements under multiaxial loading, Eng. Fract. Mech., 1995, Vol. 51, No. 6.
2. Mikhailov S. E. A functional approach to non-local strength condition and fracture criteria, Eng. Fract. Mech., 1995, Vol. 52, No. 4.
3. Сукнев С. В., Новопашин М. Д. Критерий образования трещин отрыва в горных породах при сжатии // ФТПРПИ. — 2003. — № 2.
4. Смирнов В. И. Структурный подход в задачах предельного равновесия хрупких тел с концентраторами напряжений // ПМТФ. — 2007. — Т. 48. — № 4.
5. Taylor D. The theory of critical distances, Oxford: Elsevier, 2007.
6. Корнев В. М., Зиновьев А. А. Модель квазихрупкого разрушения горных пород // ФТПРПИ. — 2013. — № 4.
7. Lajtai E. Z. Brittle fracture in compression, Int. J. Fract., 1974, Vol. 10, No. 4.
8. Imamura S., Sato Y. Fracture of a graphite solid cylinder with a transverse hole in tension, J. Coll. Eng. Nihon Univ., Ser. A., 1987, Vol. 28.
9. Hyakutake H., Hagio T., Nisitani H. Fracture of FRP plates containing notches or a circular hole under tension, Int. J. Pressure Vessels and Piping, 1990, Vol. 44, No. 3.
10. Carter B. J. Size and stress gradient effects on fracture around cavities, Rock Mech. and Rock Eng, 1992, Vol. 25, No. 3.
11. Ефимов В. П. Испытания горных пород в неоднородных полях растягивающих напряжений // ПМТФ. — 2013. — Т. 54. — № 5.
12. Сукнев С. В. Расчетно-экспериментальное исследование разрушения хрупкого материала с эллиптическим отверстием при сжатии // ПМТФ. — 2013. — Т. 54. — № 2.
13. Сукнев С. В. Образование трещин отрыва в гипсе при равномерном и неравномерном распределении сжимающей нагрузки // ФТПРПИ. — 2011. — № 5.
14. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. — М.: Наука, 1984.
15. Vekinis G., Ashby M. F., Beaumont P. W. R. Plaster of Paris as a model material for brittle porous solids, J. Mater. Science, 1993, Vol. 28, No. 12.

Поступила в редакцию 29/XII 2014