

УДК 532.59:539.3:534.12

КОЛЕБАНИЯ ПЛАВАЮЩЕЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

А. Е. Букатов, А. А. Букатов

Морской гидрофизический институт РАН, 299011 Севастополь, Россия
E-mails: newisland@list.ru

На основе метода многих масштабов построены асимптотические разложения до величин третьего порядка малости для потенциала скорости движения жидкости конечной глубины и изгибных деформаций плавающей упругой пластины, возникающих при взаимодействии гармоник прогрессивных поверхностных волн конечной амплитуды. Получено выражение для амплитуды второй гармоники и определены критические значения волнового числа. Выполнен анализ колебаний пластины при различных значениях ее толщины и модуля упругости. Исследованы вертикальные смещения пластины при ее изгибной деформации.

Ключевые слова: колебания плавающей пластины, изгибно-гравитационные волны, волны конечной амплитуды, взаимодействие волн.

DOI: 10.15372/PMTF20180412

Введение. Исследование колебаний упругой плавающей пластины в линейной постановке проведено в работах [1–9]. Изучению нелинейных колебаний абсолютно гибкой пластины (битого льда), плавающей на поверхности однородной идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины, посвящена работа [10]. Колебания с конечной амплитудой упругой пластины, плавающей на поверхности однородной жидкости, без учета нелинейности ускорения вертикальных смещений пластины рассмотрены в [11–13]. В [14] исследовано влияние нелинейности ускорения вертикальных смещений пластины, обусловленных ее изгибом, на распространение периодических поверхностных волн. Возникновение нелинейных колебаний абсолютно гибкой плавающей пластины при нелинейном взаимодействии бегущих периодических волновых гармоник изучено в [15].

Целью данной работы является исследование изгибной деформации плавающей упругой пластины при взаимодействии гармоник прогрессивных поверхностных волн конечной амплитуды.

1. Постановка задачи. Пусть на поверхности однородной идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей бассейн постоянной глубины H , плавает тонкая упругая пластина постоянной толщины h . В горизонтальных направлениях пластина и жидкость не ограничены. Рассмотрим нелинейные колебания пластины при взаимодействии первой и второй гармоник волн конечной амплитуды, полагая движение жидкости потенциальным, а колебания пластины — безотрывными. В безразмерных переменных $x = kx_1$, $z = kz_1$,

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме № 0827-2018-0003.

$t = \sqrt{kg} t_1$, $\zeta = k\zeta^*$, $\varphi = (k^2/\sqrt{kg})\varphi^*$ (k — волновое число; g — ускорение свободного падения; t — время; $\varphi(x, z, t)$ — потенциал скорости движения жидкости; $\zeta(x, t)$ — прогиб пластины или возвышение поверхности контакта пластина — жидкость) задача сводится к решению уравнения Лапласа

$$\varphi_{xx} + \varphi_{zz} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad -H \leq z \leq \zeta \quad (1.1)$$

для потенциала скорости с граничными условиями на поверхности контакта пластина — жидкость ($z = \zeta$)

$$D_1 k^4 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + \varkappa k \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] = p; \quad (1.2)$$

$$p = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \zeta - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right]$$

и на дне бассейна ($z = -H$)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (1.3)$$

В начальный момент времени ($t = 0$)

$$\zeta = f(x), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0. \quad (1.4)$$

В (1.2)–(1.4)

$$D_1 = \frac{D}{\rho g}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \varkappa = h \frac{\rho_1}{\rho},$$

E , h , ρ_1 , ν — модуль упругости, толщина, плотность, коэффициент Пуассона пластины соответственно; ρ — плотность жидкости. Потенциал скорости и прогиб пластины при $z = \zeta$ связаны кинематическим условием

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (1.5)$$

В динамическом условии (1.2) выражение, содержащее множитель \varkappa , описывает инерцию вертикальных смещений пластины, причем первое слагаемое в скобках этого выражения характеризует нелинейность вертикального ускорения пластины.

2. Уравнения для нелинейных приближений. Решение задачи (1.1)–(1.5) будем искать с помощью метода многих масштабов [16]. Введем две медленно меняющиеся по сравнению с $t = T_0$ переменные $T_1 = \varepsilon t$, $T_2 = \varepsilon^2 t$ (ε — малая конечная величина). Предполагается, что справедливы разложения

$$\begin{aligned} \zeta &= \varepsilon \zeta_0, \quad \varphi = \varepsilon \varphi_0, \quad f = \varepsilon f_0, \quad \zeta_0 = \zeta_1 + \varepsilon \zeta_2 + \varepsilon^2 \zeta_3 + O(\varepsilon^3), \\ \varphi_0 &= \varphi_1 + \varepsilon \varphi_2 + \varepsilon^2 \varphi_3 + O(\varepsilon^3), \quad f_0 = f_1 + \varepsilon f_2 + \varepsilon^2 f_3 + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Подставляя φ из (2.1) в (1.1), (1.3), с точностью до величин третьего порядка малости получаем уравнения

$$\varepsilon \Delta \varphi_1 + \varepsilon^2 \Delta \varphi_2 + \varepsilon^3 \Delta \varphi_3 = 0, \quad \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \varepsilon^3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

первое из которых удовлетворяется во всем объеме жидкости, а второе — при $z = -H$.

Рассмотрим динамическое (1.2), кинематическое (1.5) и начальное (1.4) условия. Выражение для потенциала скорости поверхности контакта пластина — жидкость $z = \varepsilon \zeta_0$ представим в виде

$$\varphi(x, \varepsilon \zeta_0, t) = \varphi(x, 0, t) + \varepsilon \zeta_0 \varphi_z(x, 0, t) + (\varepsilon^2 \zeta_0^2 / 2) \varphi_{zz}(x, 0, t) + \dots \quad (2.2)$$

Подставим $\zeta = \varepsilon\zeta_0$, $f = \varepsilon f_0$, $\varphi(x, \varepsilon\zeta_0, t)$ и $\varphi_z(x, \varepsilon\zeta_0, t)$ в условия (1.2) и (1.5), учитывая, что по правилу дифференцирования сложной функции частная производная по времени определяется выражением

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2}.$$

Тогда, приравнявая к нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε , для определения нелинейных приближений получаем уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial z^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad -H \leq z \leq 0; \quad (2.3)$$

$$D_1 k^4 \frac{\partial^4 \zeta_n}{\partial x^4} - \varkappa k \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial z \partial T_0} - \frac{\partial \varphi_n}{\partial T_0} + \zeta_n = F_n^*, \quad z = 0; \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \zeta_n}{\partial T_0} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} = L_n, \quad z = 0; \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial z} = 0, \quad z = -H; \quad (2.6)$$

$$\zeta_n = f_n(x), \quad \frac{\partial \zeta_n}{\partial T_0} = G_n, \quad t = 0. \quad (2.7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F_n^* &= F_n + F_n^0, \quad F_1 = F_1^0 = L_1 = G_1 = 0, \quad n = 1, 2, 3, \\ F_2 &= \zeta_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial T_1} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 \right] + \varkappa k N, \\ N &= \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \zeta_1 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_1 \partial z}, \quad L_2 = \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \zeta_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1}, \\ F_3 &= \zeta_1 N_1 + \zeta_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial T_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial T_2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + N_2 + \varkappa k N_3, \\ N_1 &= \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_1 \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial T_0 \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \zeta_1 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z^2}, \\ N_2 &= \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \left(\frac{\partial \zeta_2}{\partial T_0} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right), \\ N_3 &= \zeta_1 N_4 + \frac{1}{2} \zeta_1^2 \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z^3} + \zeta_2 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \zeta_2}{\partial T_0} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1} \right) + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial T_2} + N_5, \\ N_4 &= \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial T_0 \partial z^2} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial z^2 \partial T_1}, \quad N_5 = \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z \partial T_1}, \\ L_3 &= \zeta_1 N_6 - \zeta_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial T_1} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_2} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \right)^2, \\ N_6 &= \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \zeta_1 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial z^3}, \quad F_2^0 = -\varkappa k \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \\ F_3^0 &= -\varkappa k \left[\zeta_1 N_7 + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} \right) \right], \end{aligned}$$

$$N_7 = \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} \right)^2 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x \partial z^2}, \quad G_2 = -\frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1}, \quad G_3 = -\frac{\partial \zeta_1}{\partial T_2} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial T_1}.$$

Заметим, что наличие слагаемых F_2^0, F_3^0 в правых частях динамических условий (2.4) для второго ($n = 2$) и третьего ($n = 3$) приближений обусловлено учетом нелинейности ускорения вертикальных смещений пластины.

3. Выражения для прогиба пластины и потенциала скорости движения жидкости. Уравнения (2.3)–(2.7) получены для общего случая неустановившихся колебаний с конечной амплитудой. Найдем решение этих уравнений в случае взаимодействия бегущих периодических волновых гармоник $\zeta_{11} = \cos \theta$ и $\zeta_{12} = a_1 \cos 2\theta$, $\theta = x + \tau T_0 + \beta(T_1, T_2)$. Зададим первое приближение ($n = 1$) возвышения поверхности контакта пластина — жидкость в виде

$$\zeta_1 = \zeta_{11} + \zeta_{12},$$

где a_1 — постоянная величина порядка единицы; $\beta = 0$ при $t = 0$. Учитывая краевое условие на дне и условия (2.4), (2.5), получаем

$$\varphi_1 = \tau \left(\frac{\operatorname{ch}(z + H)}{\operatorname{sh} H} \sin \theta + a_1 \frac{\operatorname{ch}(2(z + H))}{\operatorname{sh}(2H)} \sin(2\theta) \right),$$

$$\tau^2 = (1 + D_1 k^4)(1 + \varkappa k \operatorname{th} H)^{-1} \operatorname{th} H.$$

Амплитуду a_1 и фазовый сдвиг $\beta(T_1, T_2)$ определим из следующих приближений.

Подставляя ζ_1, φ_1 в правые части динамического (2.4) и кинематического (2.5) уравнений для второго приближения и решая задачу (2.3)–(2.7) при $n = 2$, с учетом условия отсутствия первой и второй гармоник в частном решении находим ζ_2, φ_2 . В свою очередь, величины ζ_1, φ_1 и ζ_2, φ_2 определяют выражения в правых частях динамического и кинематического условий при $n = 3$. Исключая из этих условий слагаемые, порождающие секулярность, получаем ζ_3, φ_3 .

В результате возвышение поверхности контакта пластина — жидкость в бассейне ζ и потенциал скорости движения жидкости φ до величин третьего порядка малости определяются из выражений

$$\begin{aligned} \zeta &= \varepsilon \cos \theta + \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n a_n \cos(2\theta) + \sum_{n=2}^3 \varepsilon^n \sum_{j=3}^4 a_{nj} \cos(j\theta) + \varepsilon^3 \sum_{n=5}^6 a_{3n} \cos(n\theta), \\ \varphi &= \varepsilon \frac{\tau}{\operatorname{sh} H} \operatorname{ch}(z + H) \sin \theta + \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n b_{n2} \operatorname{ch}(2(z + H)) \sin(2\theta) + \\ &+ \sum_{n=2}^3 \varepsilon^n \sum_{j=3}^4 b_{nj} \operatorname{ch}(j(z + H)) \sin(j\theta) + \varepsilon^3 \sum_{n=5}^6 b_{3n} \operatorname{ch}(n(z + H)) \sin(n\theta) + \sum_{n=2}^3 \varepsilon^n b_{n0} t, \\ \theta &= x + \sigma t, \quad \sigma = \tau + \varepsilon \sigma_1 + \varepsilon^2 \sigma_2, \quad \varepsilon = ak, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где a — амплитуда начальной гармоники,

$$b_{12} = a_1 \frac{\tau}{\operatorname{sh}(2H)}, \quad a_1 = \pm \left(\frac{\mu_2 r_1}{4r_2(2\tau^2 \operatorname{cth}(2H) + 4\tau^2 \varkappa k + \mu_2)(1 + 2\varkappa k \operatorname{th}(2H))} \right)^{1/2}; \quad (3.2)$$

$$r_1 = (2 \operatorname{cth} H + \operatorname{th}(2H))(\operatorname{cth} H((1/2) \operatorname{cth} H + 3\varkappa k) - 5/2)(\tau^2(\operatorname{cth} H + \varkappa k) + \mu_1),$$

$$r_2 = \tau^2(1/2 + \operatorname{cth}(2H) \operatorname{cth} H - \varkappa k(\operatorname{cth}(2H) - (5/2) \operatorname{cth} H)) + \mu_1((1/2) \operatorname{cth} H + \operatorname{cth}(2H)),$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\tau\mu_2(2\operatorname{cth} H + \operatorname{th}(2H)(\operatorname{cth} H((1/2)\operatorname{cth} H + 3\kappa k) - 5/2))}{4a_1(2\tau^2\operatorname{cth}(2H) + 4\tau^2\kappa k + \mu_2)(1 + 2\kappa k\operatorname{th}(2H))}, \\ l_3 &= -(3/2)a_1\tau(2\operatorname{cth}(2H) + \operatorname{cth} H), \quad l_4 = -4a_1^2\operatorname{cth}(2H), \\ l_7 &= a_1\tau^2(11/2 - \operatorname{cth}(2H)\operatorname{cth} H + \kappa k(5\operatorname{cth}(2H) - (1/2)\operatorname{cth} H)), \\ l_8 &= a_1^2\tau^2(5 - \operatorname{cth}^2(2H) + 4\kappa k\operatorname{cth}(2H)), \\ b_{23} &= \frac{l_3\mu_3 + 3l_7\tau}{3\operatorname{sh}(3H)(\mu_3 - 9\kappa k\tau^2 - 3\tau^2\operatorname{cth}(3H))}, \quad b_{24} = \frac{l_4\mu_4 + 4l_8\tau}{3\operatorname{sh}(4H)(\mu_4 - 16\kappa k\tau^2 - 4\tau^2\operatorname{cth}(4H))}, \\ a_{23} &= \mu_3^{-1}(l_7 + 3\tau b_{23}(\operatorname{ch}(3H) - \kappa k 3\operatorname{sh}(3H))), \quad a_{24} = \mu_4^{-1}(l_8 + 4\tau b_{24}(\operatorname{ch}(4H) - \kappa k 4\operatorname{sh}(4H))), \\ j_3 &= -5\tau/8 - 3a_1^2\tau/8 - 6b_{24}\operatorname{ch}(4H) - (3/2)a_{24}\tau\operatorname{cth} H + 3a_{23}\sigma_1, \\ j_4 &= -9a_1\tau/2 - 6b_{23}\operatorname{ch}(3H) - 2a_{23}\tau\operatorname{cth} H + 4a_{24}\sigma_1, \\ m_3 &= \tau(9a_1\sigma_1/2 + 2b_{24}\operatorname{ch}(4H)(2\operatorname{th}(4H) - \operatorname{cth} H)) + (1/2)\tau^2((1/4)\operatorname{cth} H(1 - 23a_1^2) + \\ &+ 7a_1^2\operatorname{cth}(2H) - 3a_{24}) + 3b_{23}\sigma_1\operatorname{ch}(3H) + \kappa k[\tau(2b_{24}\operatorname{sh}(4H)(11\operatorname{cth}(4H) - 4\operatorname{cth} H) + \\ &+ 3a_1\sigma_1(2\operatorname{cth}(2H) + (1/2)\operatorname{cth} H)) + \tau^2(a_1^2(21/8 - 2\operatorname{cth}^2(2H) - (7/2)\operatorname{cth} H\operatorname{cth}(2H)) - \\ &- 1/8 - (3/2)a_{24}\operatorname{cth} H - (1/2)\operatorname{cth}^2 H) + 9b_{23}\sigma_1\operatorname{sh}(3H)], \\ m_4 &= \tau(4\sigma_1a_1^2 + (3/2)b_{23}\operatorname{ch}(3H)(5\operatorname{th}(3H) - \operatorname{cth} H)) + 2\tau^2(a_1\operatorname{cth}(2H) - (1/4)a_1\operatorname{cth} H + a_{23}) + \\ &+ 4b_{24}\sigma_1\operatorname{ch}(4H) + \kappa k[\tau((3/2)b_{23}\operatorname{sh}(3H)(11\operatorname{cth}(3H) - 3\operatorname{cth} H) + 8a_1^2\sigma_1\operatorname{cth}(2H)) + \\ &+ \tau^2(a_1(37/4 - 4\operatorname{cth}(2H)\operatorname{cth} H - (3/4)\operatorname{cth}^2 H) + 2a_{23}\operatorname{cth} H) + 16b_{24}\sigma_1\operatorname{sh}(4H)], \\ m_5 &= \tau[2b_{24}\operatorname{ch}(4H)(6\operatorname{th}(4H) - \operatorname{cth} H) + 3b_{23}a_1\operatorname{ch}(3H)((7/2)\operatorname{th}(3H) - \operatorname{cth}(2H))] + \\ &+ \tau^2[(7/2)a_1^2(\operatorname{cth}(2H) - (1/4)\operatorname{cth} H) + 5a_{23}a_1 + 5a_{24}/2] + \\ &+ \kappa k[\tau(2b_{24}\operatorname{sh}(4H)(19\operatorname{cth}(4H) - 4\operatorname{cth} H) + 3b_{23}a_1\operatorname{sh}(3H)((11/2)\operatorname{cth}(3H) - 3\operatorname{cth}(2H))) + \\ &+ \tau^2(a_1^2(3/8 - 6\operatorname{cth}(2H) - (11/2)\operatorname{cth}(2H)\operatorname{cth} H) + 10a_{23}a_1\operatorname{cth}(2H) + (5/2)a_{24}\operatorname{cth} H)], \\ m_6 &= 4\tau b_{24}a_1\operatorname{ch}(4H)(4\operatorname{th}(4H) - \operatorname{cth}(2H)) + \tau^2a_1(a_1^2\operatorname{cth}(2H) + 6a_{24}) + \\ &+ 2\kappa ka_1[4\tau b_{24}\operatorname{sh}(4H)(5\operatorname{cth}(4H) - 2\operatorname{cth}(2H)) + \tau^2(6a_{24}\operatorname{cth}(2H) - a_1^2(1 + 4\operatorname{cth}^2(2H)))]], \\ q_1 &= \mu_1((3/2)b_{23}a_1\operatorname{ch}(3H) - \tau(3/8 - 15a_1^2/4 + a_{23}a_1\operatorname{cth}(2H))) + \\ &+ \tau^2a_1(-\sigma_1/2 + 3b_{23}\operatorname{ch}(3H)((1/2)\operatorname{th}(3H) + \operatorname{cth}(2H))) + \tau^3(9a_1^2\operatorname{cth}(2H) + a_1a_{23} + \\ &+ (1/4)\operatorname{cth} H(5/2 - a_1^2)) + \kappa k[\tau^2a_1(3b_{23}\operatorname{sh}(3H)((1/2)\operatorname{cth}(3H) + 3\operatorname{cth}(2H)) - \\ &- 2\sigma_1\operatorname{cth}(2H) + (1/2)\sigma_1\operatorname{cth} H) + \tau^3(2a_{23}a_1\operatorname{cth}(2H) + (1/2)\tau^2\operatorname{cth}^2 H + 3/8 + \\ &+ a_1^2(8\operatorname{cth}^2(2H) + \operatorname{cth} H\operatorname{cth}(2H) + 39/4))], \\ q_2 &= \mu_2(3b_{23}\operatorname{ch}(3H) + 4b_{24}a_1\operatorname{ch}(4H) + \tau(a_{23}\operatorname{cth} H + 2a_{24}a_1\operatorname{cth}(2H) - 3a_1^3)) + \\ &+ 2\tau^2((3/2)b_{23}\operatorname{ch}(3H)(\operatorname{cth} H - \operatorname{th}(3H)) + 4b_{24}a_1\operatorname{cth}(2H)\operatorname{ch}(4H) - \sigma_1) + \\ &+ 2\tau^3[a_{23} + a_1(3a_1\operatorname{cth} H + 2a_{24} + \operatorname{cth}(2H)(5a_1^2 - 2))] + \\ &+ \kappa k[2\tau^2((3/2)b_{23}\operatorname{sh}(3H)(3\operatorname{cth} H - 5\operatorname{cth}(3H)) + \\ &+ 8b_{24}a_1\operatorname{sh}(4H)(2\operatorname{cth}(2H) - \operatorname{cth}(4H)) - \sigma_1\operatorname{cth} H) + \\ &+ 2\tau^3(2a_1^3(3 + 4\operatorname{cth}(2H)) + a_1(4\operatorname{cth}(2H)(a_{24} + \operatorname{cth} H) + (1/2)\operatorname{cth}^2 H - 3/2) + a_{23}\operatorname{cth} H)], \\ \sigma_2 &= \frac{1}{4}\left(\frac{q_1}{\mu_1} + \frac{q_2}{2a_1\mu_2}\right), \quad b_{3n} = \frac{j_n\mu_n + nm_n\tau}{n\operatorname{sh}(nH)(\mu_n - n^2\tau^2\kappa k - n\tau^2\operatorname{cth}(nH))}, \quad n = 3, \dots, 6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j_5 &= -69a_1^2\tau/8 - 10b_{24} \operatorname{ch}(4H) - (5/2)a_{24}\tau \operatorname{cth} H - 5a_1((3/2)b_{23} \operatorname{ch}(3H) - a_{23}\tau \operatorname{cth}(2H)), \\
j_6 &= -5a_1^3\tau - 6a_1(2b_{24} \operatorname{ch}(4H) - a_{24}\tau \operatorname{cth}(2H)), \\
a_{3n} &= (n\tau b_{3n}(\operatorname{ch}(nH) + n\kappa k \operatorname{sh}(nH)) + m_n)\mu_n^{-1}, \quad n = 3, \dots, 6, \\
\mu_n &= 1 + n^4 D_1 k^4, \quad n = 1, \dots, 6, \\
b_{20} &= \tau^2(a_1^2(1 + \operatorname{cth}^2(2H)) + (1 + \operatorname{cth}^2 H)/4 + \kappa k((1/2) \operatorname{cth} H + 4a_1^2 \operatorname{cth}(2H))), \\
b_{30} &= a_1\tau^2(2 \operatorname{cth}(2H) + (1/2) \operatorname{cth} H + \kappa k(9/4 + 2 \operatorname{cth}(2H) \operatorname{cth} H - (1/4) \operatorname{cth}^2 H)).
\end{aligned}$$

При этом $b_{22} = b_{32} = a_2 = a_3 = l_1 = l_2 = l_5 = l_6 = j_1 = j_2 = m_1 = m_2 = 0$.

Формулы (3.1) для ζ , φ определяют формируемое волновое возмущение в том случае, если нелинейность ускорения вертикальных смещений льда не учитывается в динамическом условии (2.4). Однако тогда следует учесть, что $F_2^0 = F_3^0 = 0$.

В размерных переменных выражения (3.1) принимают вид

$$\begin{aligned}
\zeta &= a \cos \theta + aa_1 \cos(2\theta) + (a^2ka_{23} + a^3k^2a_{33}) \cos(3\theta) + (a^2ka_{24} + a^3k^2a_{34}) \cos(4\theta) + \\
&\quad + a^3k^2a_{35} \cos(5\theta) + a^2k^2a_{36} \cos(6\theta), \\
\varphi &= a(g/k)^{1/2}((\tau/\operatorname{sh} H) \operatorname{ch}(z+H) \sin \theta + b_{12} \operatorname{ch}(2(z+H)) \sin(2\theta)) + \\
&\quad + a^2\sqrt{kg}(b_{23} \operatorname{ch}(3(z+H)) + b_{24} \operatorname{ch}(4(z+H)) \sin(4\theta) + b_{20}t) + \\
&\quad + a^3k\sqrt{kg}(b_{33} \operatorname{ch}(3(z+H)) \sin(3\theta) + b_{34} \operatorname{ch}(4(z+H)) \sin(4\theta) + \\
&\quad + b_{35} \operatorname{ch}(5(z+H)) \sin(5\theta) + b_{36} \operatorname{ch}(6(z+H)) + b_{30}t), \\
\theta &= kx + \sqrt{kg}(\tau + ak\sigma_1 + a^2k^2\sigma_2)t.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Здесь и далее индекс 1 у величин x , z , t и индекс “*” у величин ζ , φ опущены.

4. Анализ результатов. Полученное решение (3.3) справедливо вне малых областей резонансных значений волнового числа $k = k_1$, $k = k_2$, $k = k_3$, $k = k_4$, являющихся положительными действительными корнями уравнений

$$\mu_n - n^2\tau^2\kappa k - n\tau^2 \operatorname{cth}(nH) = 0, \quad n = 3, \dots, 6 \tag{4.1}$$

соответственно. При этом $k_1 > k_2 > k_3 > k_4$. Заметим, что резонансное значение $k = k_1$, получаемое из (4.1) при $n = 3$, совпадает с меньшим из двух резонансных значений, получаемых в случае, когда первое приближение ζ_1 задается в виде $\zeta_1 = \zeta_{11}$ [14].

Для оценки влияния глубины бассейна, толщины и модуля упругости пластины на амплитудно-фазовые характеристики ее изгибных деформаций и резонансные значения волнового числа проведены расчеты при значениях модуля упругости $E = 0,5 \cdot 10^9 \div 3,0 \cdot 10^9$ Н/м², коэффициента Пуассона $\nu = 0,34$ и плотности $\rho_1/\rho = 0,87$, соответствующих ледяной пластине [17].

Результаты расчетов показали, что при фиксированном значении модуля упругости пластины увеличение ее толщины приводит к уменьшению значений k_n . При этом увеличение глубины бассейна обуславливает увеличение значений k_n , несмотря на то что скорость их роста уменьшается с увеличением глубины и при $H > 70$ м значение k_n остается практически постоянным (рис. 1). На рис. 2 показаны изолинии k_n [м⁻¹] в плоскости (E, H) в случае $h = 0,5$ м. Видно, что с увеличением модуля упругости критические значения k_n уменьшаются.

Величина вертикального смещения пластины зависит не только от ее толщины и модуля Юнга материала, но и от наклона $\varepsilon = ak$ начальной основной гармоники и амплитуды a_1 второй гармоники, определяемой по формуле (3.2). Зависимость амплитуды a_1

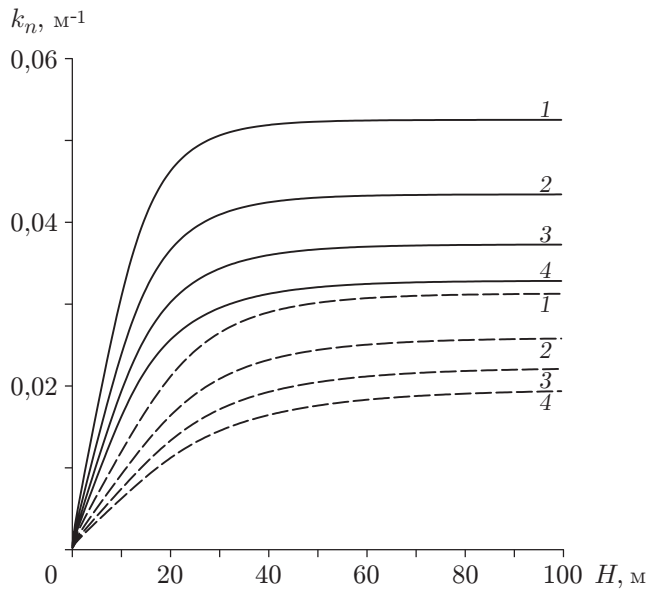


Рис. 1. Зависимость критических значений волнового числа от глубины бассейна при $E = 3 \cdot 10^9$ Н/м² и различной толщине пластины:
сплошные линии — $h = 0,5$ м, штриховые — $h = 1$ м; 1 — $n = 1$, 2 — $n = 2$, 3 — $n = 3$, 4 — $n = 4$

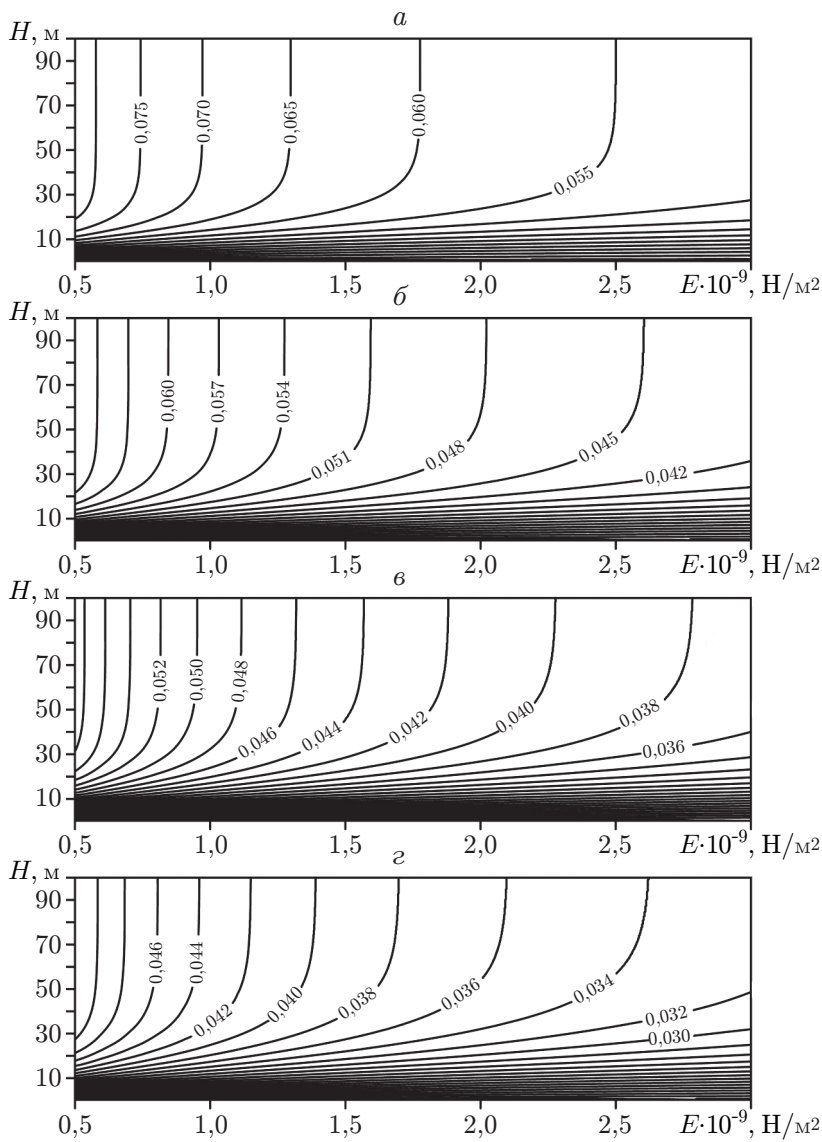


Рис. 2. Изолинии k_1 (а), k_2 (б), k_3 (в), k_4 (г) в плоскости (E, H) при $h = 0,5$ м

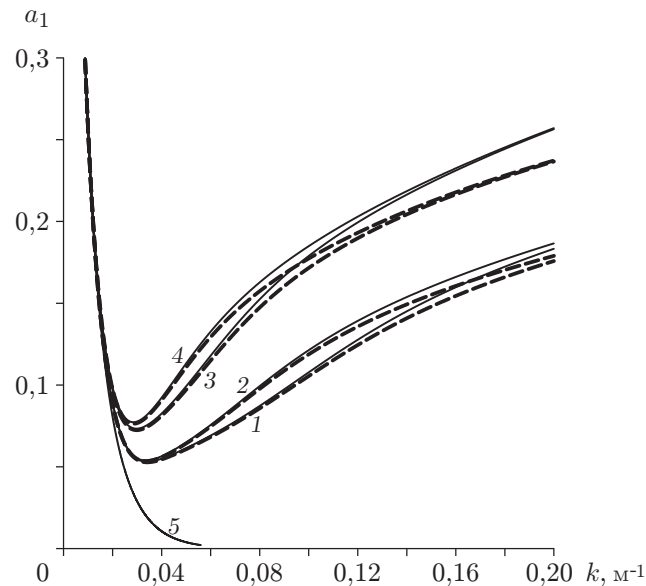


Рис. 3. Зависимость амплитуды второй гармоники от волнового числа при $H = 100$ м и различных значениях толщины и модуля упругости ледяной пластины: 1, 3 — $E = 10^9$ Н/м²; 2, 4 — $E = 3 \cdot 10^9$ Н/м²; 1, 2 — $h = 0,5$ м, 3, 4 — $h = 1$ м, 5 — $h = 0$; сплошные линии — без учета нелинейности ускорения вертикального смещения пластины, штриховые — с учетом нелинейности ускорения вертикального смещения пластины

второй гармоники от волнового числа для пластин различной толщины показана на рис. 3. Кривая 5 соответствует случаю нелинейного взаимодействия гармоник на открытой воде в отсутствие пластины. При $k = 0$ амплитуда принимает значение $a_1 = 1/\sqrt{2}$. Из рис. 3 следует, что с увеличением толщины пластины значение a_1 увеличивается. Функция $a_1(k)$ имеет локальный минимум, величина которого увеличивается с ростом как толщины пластины, так и модуля Юнга, при этом точка локального минимума смещается в сторону меньших значений волнового числа. Влияние нелинейности ускорения вертикальных смещений пластины проявляется в уменьшении величины a_1 с увеличением волнового числа. При фиксированной толщине пластины и малых значениях k амплитуда колебаний пластины практически не зависит от ее толщины и модуля упругости. Однако значения амплитуды колебаний a_1 , полученные с учетом и без учета нелинейности ускорения вертикального смещения пластины, различаются.

Формы профиля волны изгиба пластины в зависимости от амплитуды и длины волны начальной основной гармоники показаны на рис. 4, 5. Профили волны изгиба пластины толщиной $h = 1$ м на рис. 4 соответствуют длине волны начальной гармоники $\lambda = 2\pi \cdot 10^4/11$ м, амплитуда которой изменялась в диапазоне $0,5 \text{ м} \leq a \leq 2,0 \text{ м}$. Соответствующие принятым значениям a значения ε , характеризующие крутизну волны при рассматриваемых значениях λ , изменяются в диапазоне $5,5 \cdot 10^{-4} \leq \varepsilon \leq 2,2 \cdot 10^{-3}$.

Профили волны изгиба на рис. 4, 5 представляют собой чередование “всплесков” и “ложбин”. Результаты сравнения зависимостей $\zeta(x)$ при $a_1 > 0$ и $a_1 < 0$ свидетельствуют о том, что профиль волны изгиба пластины зависит от начальной фазы второй гармоники. В случае $a_1 > 0$ (см. рис. 4,а) с увеличением амплитуды волны основной гармоники в “ложбинах” увеличивается количество высших гармоник. При $a_1 < 0$ (см. рис. 4,б) появляются двугорбые “всплески”, а глубина “ложбины” между “всплесками” и количество высших гармоник в “ложбине” между горбами увеличиваются с ростом амплитуды a .

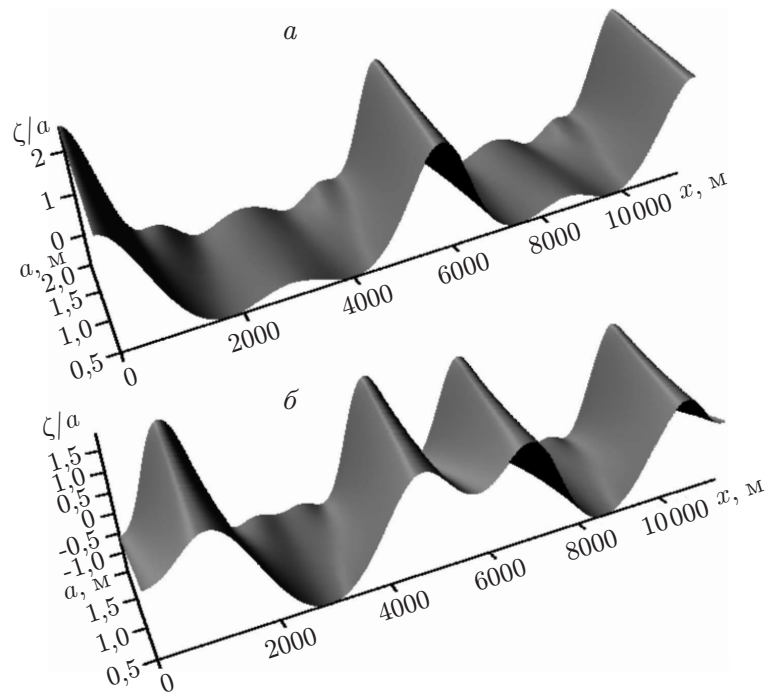


Рис. 4. Форма профиля волны изгиба пластины в зависимости от амплитуды начальной основной гармоники в случаях $a_1 > 0$ (а) и $a_1 < 0$ (б) при $H = 100$ м, $E = 3 \cdot 10^9$ Н/м², $h = 1$ м, $\lambda = 2\pi \cdot 10^4/11$ м

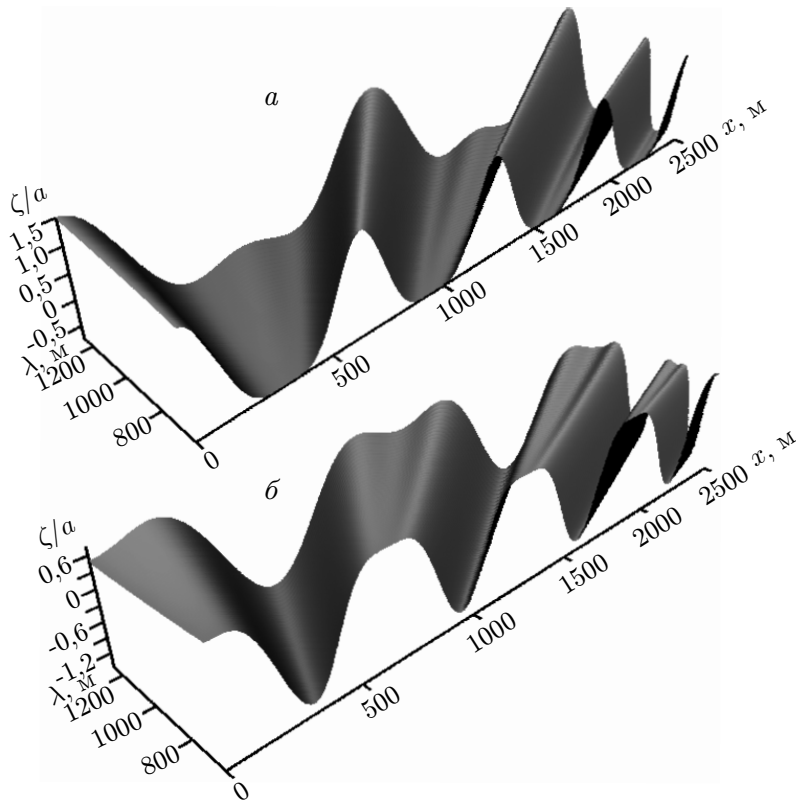


Рис. 5. Форма профиля волны изгиба пластины от длины волны начальной основной гармоники в случаях $a_1 > 0$ (а) и $a_1 < 0$ (б) при $H = 100$ м, $E = 3 \cdot 10^9$ Н/м², $h = 1$ м, $a = 1$ м

Влияние длины волны начальной гармоники при фиксированном значении ее амплитуды на профиль волны изгиба пластины (см. рис. 5) подобно влиянию амплитуды a начальной основной гармоники (см. рис. 4).

Заключение. На основе уравнений динамики нелинейных волн в однородной идеальной несжимаемой жидкости с плавающей упругой пластиной методом многих масштабов построены решения в виде асимптотических рядов до величин третьего порядка малости для потенциала скорости движения жидкости и вертикальных смещений пластины (поверхности контакта пластина — жидкость) при изгибе, возникающих при нелинейном взаимодействии первой и второй гармоник поверхностных волн. Найдены резонансные значения волнового числа и показано, что они уменьшаются с ростом толщины пластины и модуля ее упругости. Получена зависимость амплитуды второй гармоники от волнового числа при различных параметрах пластины с учетом и без учета нелинейности ускорения ее вертикальных смещений. Показано, что профиль вертикального смещения пластины зависит не только от ее толщины и модуля упругости, но и от наклона начальной основной гармоники и от амплитуды второй гармоники.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Хейсин Д. Е.** Нестационарная задача о колебаниях бесконечной пластинки, плавающей на поверхности идеальной жидкости // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1962. № 1. С. 163–167.
2. **Букатов А. Е., Черкесов Л. В.** Неустановившиеся колебания упругой пластинки, плавающей на поверхности жидкости // Прикл. механика. 1970. Т. 6, № 8. С. 89–96.
3. **Ткаченко В. А., Яковлев В. В.** Неустановившиеся изгибно-гравитационные волны в системе жидкость — пластинка // Прикл. механика. 1984. Т. 20, № 3. С. 70–75.
4. **Squire V. A.** A theoretical, laboratory and field study of ice coupled waves // J. Geophys. Res. 1984. V. 89, N C5. P. 1079–1089.
5. **Schulkes R. M. S. M., Sneyd A. D.** Time-dependent response of floating ice to a steadily moving load // J. Fluid Mech. 1988. V. 186. P. 25–46.
6. **Daffy D. G.** The response of floating ice to a moving vibrating, load // Cold Res. Sci. Tech. 1991. V. 20. P. 51–64.
7. **Squire V. A.** Moving loads on ice plates / V. A. Squire, R. J. Hosking, A. D. Kerr, P. J. Langhorne. Dordrecht: Kluwer, 1996.
8. **Pogorelova A. V., Kozin V. M.** Flexural-gravity waves due to unsteady motion of point source under a floating plate in fluid of finite depth // J. Hydrodyn. 2010. V. 22, N 5. P. 71–76. DOI: 10.1016/S1001-6058(09) 60172-4.
9. **Стурова И. В.** Генерация волн колеблющимся погруженным цилиндром при наличии плавающей полубесконечной упругой пластины // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2014. № 4. С. 98–108.
10. **Bukatov A. E., Bukatov A. A.** Propagation of surface wave of finite amplitude in a basin with floating broken ice // Intern. J. Offshore Polar Engng. 1999. V. 9, N 3. P. 161–166.
11. **Гольдштейн Р. В., Марченко А. В.** О длинных волнах в системе ледяной покров — жидкость при наличии ледового сжатия // Электрофизические и физико-механические свойства льда: Сб. науч. тр. Л.: Гидрометеиздат, 1989. С. 188–205.
12. **Гладун О. М., Федосенко В. С.** Нелинейные установившиеся колебания упругой пластины, плавающей на поверхности жидкости конечной глубины // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1989. № 3. С. 146–154.

13. **Ильичев А. Т.** Солитоноподобные структуры на поверхности раздела вода — лед // Успехи мат. наук. 2015. Т. 70, вып. 6. С. 85–138.
14. **Букатов А. Е., Букатов А. А.** Волны конечной амплитуды в однородной жидкости с плавающей упругой пластиной // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 5. С. 67–74.
15. **Букатов А. Е., Букатов А. А.** Взаимодействие поверхностных волн в бассейне с плавающим битым льдом // Мор. гидрофиз. журн. 2003. № 6. С. 3–22.
16. **Найфе А. Х.** Методы возмущений. М.: Мир, 1976.
17. **Хейсин Д. Е.** Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967.

*Поступила в редакцию 15/V 2017 г.,
в окончательном варианте — 18/X 2017 г.*
