

УДК 517.958:532

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ О НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ К СКВАЖИНЕ, ПЕРЕСЕЧЕННОЙ ТРЕЩИНОЙ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО РАЗРЫВА

Е. Р. Бадертдинова, И. Т. Салимьянов,
М. Х. Хайруллин*, М. Н. Шамсиев*

Казанский государственный технологический университет, 420015 Казань

* Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН,
420111 Казань

E-mail: khairullin@mail.knc.ru

Предложен вычислительный алгоритм определения фильтрационных параметров пласта и трещины гидравлического разрыва по результатам нестационарных гидродинамических исследований вертикальных скважин. Численно решена задача фильтрации нефти к скважине, пересеченной трещиной. Для ячеек, через которые проходит трещина, используются осредненные значения проницаемостей.

Ключевые слова: трещина гидравлического разрыва пласта, кривая восстановления давления, коэффициентная обратная задача, фильтрационно-емкостные параметры.

Существующие методы оценки параметров трещины гидравлического разрыва пласта (ГРП) по кривым восстановления давления (КВД) основаны на выявлении и анализе режимов притока нефти к скважине после прекращения ее эксплуатации [1]. Следует отметить, что такой анализ возможен, если исследования скважин проводились с помощью глубинно-измерительных приборов.

В данной работе рассматривается задача о нестационарной фильтрации нефти к скважине, пересеченной симметричной вертикальной трещиной ГРП. Для определения фильтрационно-емкостных параметров пласта и трещины решается коэффициентная обратная задача, состоящая в минимизации функционала-невязки между наблюдаемыми и вычисленными давлениями в скважине. Такой подход позволяет проводить интерпретацию КВД, построенных по кривым восстановления уровня.

1. Процесс нестационарной фильтрации нефти, находящейся в круговом пласте, к скважине с трещиной описывается дифференциальным уравнением

$$\beta^* \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k(r, \varphi)}{\mu} r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{k(r, \varphi)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right), \quad (1)$$

$$0 < t \leq T, \quad r_c < r < R_k, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

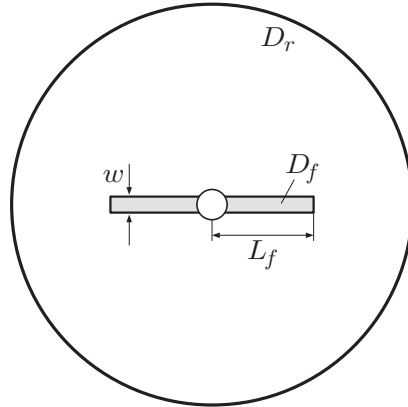


Рис. 1. Схема пласта с вертикальной трещиной гидроразрыва:
 L_f, w — полудлина и величина раскрытия трещины соответственно

с начальным условием

$$p(r, \varphi, 0) = \phi(r, \varphi) \tag{2}$$

и граничными условиями

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_c} d\varphi = \frac{Q(t)}{r_c H}, \quad \frac{\partial p}{\partial \varphi} \Big|_{r=r_c} = 0, \tag{3}$$

$$p(R_k, \varphi, t) = p_k,$$

где β^* — упругоемкость; μ — вязкость нефти; $p = p(r, \varphi)$ — давление; r_c, R_k — радиусы скважины и пласта соответственно; $Q(t)$ — дебит скважины; p_k — давление в пласте; H — толщина пласта; T — время эксперимента; $\phi(r, \varphi)$ — начальное распределение давления в пласте; проницаемость $k(r, \varphi)$ является кусочно-постоянной функцией (рис. 1):

$$k(r, \varphi) = \begin{cases} k_r, & (r, \varphi) \in D_r, \\ k_f, & (r, \varphi) \in D_f, \end{cases}$$

k_r, k_f — проницаемости пласта D_r и трещины D_f соответственно.

Задача (1)–(3) решается методом конечных разностей [2]. Область решения покрывается неравномерной сеткой, которая сгущается по направлению к скважине. Построение такой сетки проводится с помощью преобразования координат $u = \ln r$. В области $\Omega = \{\ln r_c = u_c < u < U_k = \ln R_k, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 < t \leq T\}$ вводятся сетки узлов

$$\omega_h = \left\{ (u_i, \varphi_j): u_i = u_c + (i - 1)h, \varphi_j = jh_\varphi, \right. \\ \left. i = \overline{1, N_r}, j = \overline{1, N_\varphi}, h_u = \frac{U_k - u_c}{N_r - 1}, h_\varphi = \frac{2\pi}{N_\varphi} \right\},$$

$$\omega_\tau = \{t_n, 0 = t_1 < \dots \leq t_{N_\tau} = T, t_n - t_{n-1} = \tau_n\}.$$

Принимаются следующие обозначения:

$$p_{i,j}^n = p(u_i, \varphi_j, t_n), \quad k_{i,j} = k(u_i, \varphi_j).$$

Для разностной аппроксимации краевой задачи (1)–(3) на сетках $\omega_h \times \omega_\tau$ используется неявная разностная схема

$$\beta^* e^{2u_i} \frac{p_{i,j}^n - p_{i,j}^{n-1}}{\tau_n} = \frac{1}{h_u^2 \mu} [a_{i+1/2,j}(p_{i+1,j}^n - p_{i,j}^n) - a_{i-1/2,j}(p_{i,j}^n - p_{i-1,j}^n)] + \frac{k_r}{h_\varphi^2 \mu} (p_{i,j+1}^n - 2p_{i,j}^n + p_{i,j-1}^n),$$

$$i = \overline{2, N_r - 1}, \quad j = \overline{1, N_\varphi}, \quad n = \overline{1, N_\tau - 1},$$

$$p_{i,j}^0 = \phi_{i,j}, \quad \sum_{j=1}^{N_\varphi} a_{1/2,j}(p_{2,j}^n - p_{1,j}^n) \frac{h_\varphi}{h_u} = \frac{\mu Q(t_n)}{H}, \quad p_{N_r,j}^n = p_k.$$

Здесь $a_{i\pm 1/2,j} = 2k_{i,j}k_{i\pm 1,j}/(k_{i,j} + k_{i\pm 1,j})$; $k_{i,j} = (k_r(s_{i,j} - s_{f_{i,j}}) + k_f s_{f_{i,j}})/s_{i,j}$; $s_{i,j}$ — площадь ячейки; $s_{f_{i,j}}$ — площадь области в ячейке, занимаемой трещиной.

2. Коэффициентная обратная задача заключается в оценке давления в пласте p_k , упругости β^* , полудлины трещины L_f и параметра $k_f w$ в случае, когда процесс фильтрации нефти описывается системой (1)–(3). Кроме того, известно изменение давления в скважине $p(r_c, t_n) = \psi(t_n)$, $n = \overline{1, N_\tau}$. Решение обратной задачи сводится к минимизации функционала

$$F(\alpha) = \sum_{n=1}^{N_\tau} (p(r_c, t_n) - \psi(t_n))^2, \quad (4)$$

где $\alpha = (L_f, k_f w, \beta^*, p_k)$, $0 < \alpha_j^0 \leq \alpha_j \leq \beta_j^0$ ($\alpha_j^0 = \text{const}$, $\beta_j^0 = \text{const}$).

Итерационная последовательность для минимизации функционала-невязки (4) строится на основе метода Левенберга — Марквардта. Значения переменных минимизации на k -й итерации вычисляются по формуле

$$\alpha^{k+1} = \alpha^k - (H^k + \nu E)^{-1} \nabla F,$$

где $H^k = A^T A$ — приближенная матрица вторых производных; $\{a_{i,j}\} = \{\partial F_i / \partial \alpha_j\}$ — матрица чувствительности; ν — параметр Марквардта; E — единичная матрица; ∇F — градиент функционала-невязки; $F_n = (p(r_c, t_n) - \psi(t_n))^2$; $n = \overline{1, N_\tau}$; $j = \overline{1, 4}$. Критерием остановки итерационного процесса служит выполнение хотя бы одного из условий

$$|F(\alpha^{k+1}) - F(\alpha^k)| < \varepsilon_1, \quad |\alpha^{k+1} - \alpha^k| < \varepsilon_2,$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — заданные положительные числа.

3. Ниже приводятся результаты численных экспериментов. Рассматриваются модельный круговой нефтяной пласт и вертикальная скважина в нем, пересекаемая трещиной ГРП, со следующими параметрами: $H = 5$ м, $R_k = 200$ м, $k_r = 0,05$ мкм², $r_c = 0,1$ м, $L_f = 50$ м, $w = 0,01$ м, $\beta^* = 3 \cdot 10^{-4}$ МПа⁻¹, $\mu = 25$ мПа · с, $Q = 3$ м³/сут, $p_k = 10$ МПа.

На рис. 2 приведены результаты сравнения численного и аналитического решений стационарной задачи (Q_c — дебит скважины, полученный из численного решения; Q_k — дебит скважины, вычисленный по формуле $Q_k = Q_0 \ln(R_k/r_c) / \ln(R_k/r_f)$; Q_0 — приток к скважине без трещины; r_f — эффективный радиус скважины, пересеченной трещиной ГРП) [3].

В работе [4] предложено полуаналитическое решение задачи о нестационарной фильтрации нефти в неограниченном по длине и ширине пласте к скважине с вертикальной трещиной гидроразрыва. Решение основано на разделении трещины ГРП на конечное число сегментов N_s . Результаты сравнения численного и полуаналитического решений представлены на рис. 3.

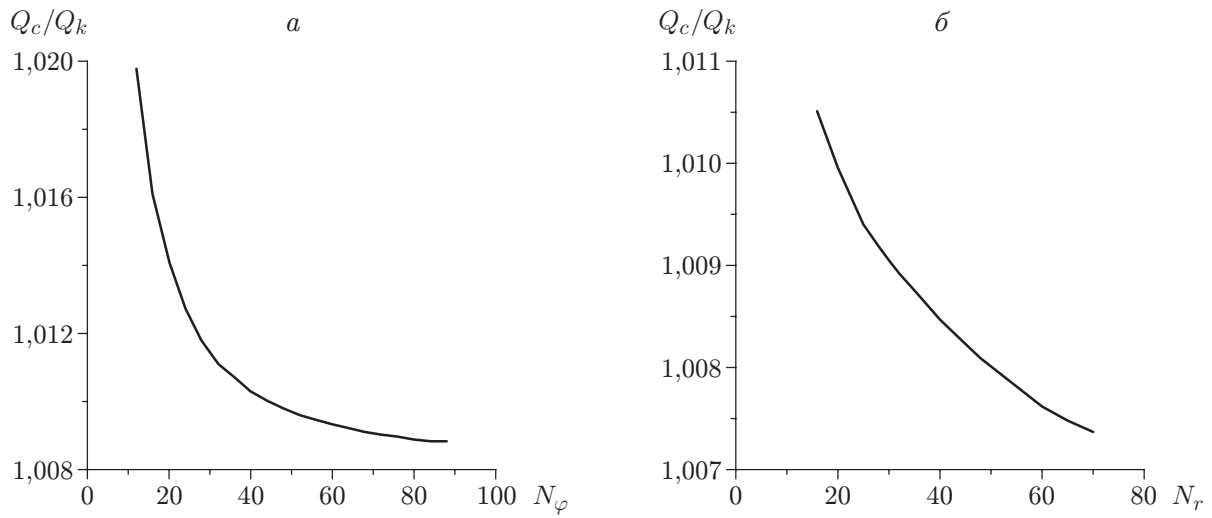


Рис. 2. Зависимости численного решения от числа узлов расчетной сетки по радиусу N_r и по углу N_φ :
 а — $N_r = 48$; б — $N_\varphi = 72$

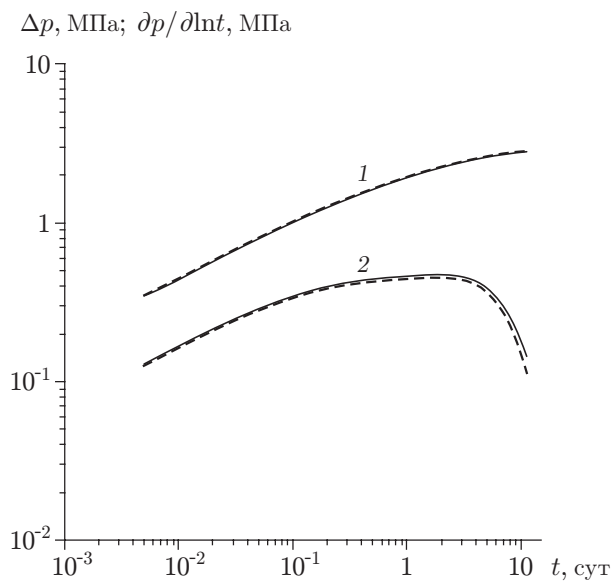


Рис. 3. Зависимости изменения давления (1) и его производной (2) от времени: сплошные кривые — численное решение ($N_r = 60, N_\varphi = 60$); штриховые — полуаналитическое решение ($N_s = 100$)

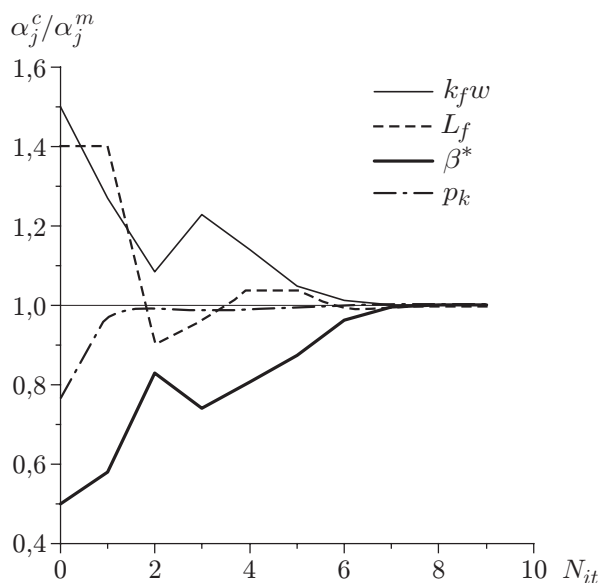


Рис. 4

Рис. 4. Сходимость итерационного процесса для модельной обратной задачи

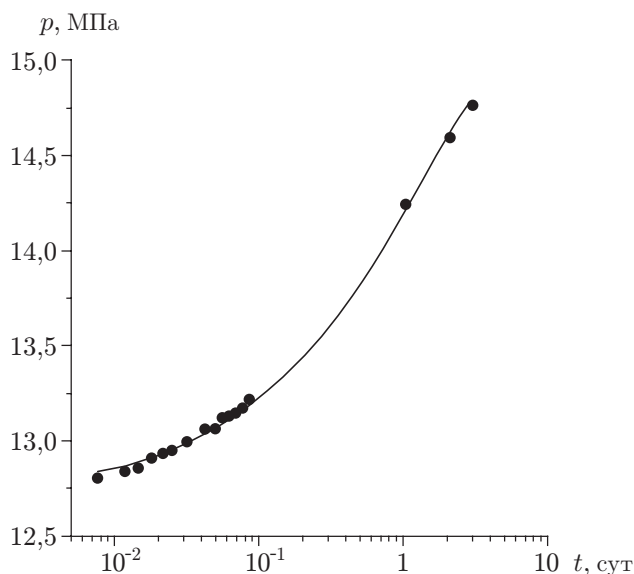


Рис. 5

Рис. 5. Экспериментальная (точки) и расчетная (сплошная линия) зависимости восстановленного давления от времени

На рис. 4 приведены результаты тестирования предложенного вычислительного алгоритма решения коэффициентной обратной задачи (α_j^c/α_j^m — отношение вычисленных значений искомых параметров к заданным на каждой итерации; N_{it} — число итераций). Итерационный процесс сходится за 8–10 шагов. Для проверки устойчивости предложенного алгоритма в исходные данные $\psi(t_n)$ случайным образом вводились погрешности в пределах $\pm 0,05$ МПа. Результаты расчетов показали, что вычислительный алгоритм устойчив к погрешностям исходной информации.

На рис. 5 приведены результаты гидродинамических исследований реальной скважины. В расчетах использовались следующие параметры пласта и скважины: $H = 2,8$ м, $R_k = 150$ м, $k_r = 0,012$ мкм², $r_c = 0,1$ м, $\mu = 3,9$ мПа·с, $Q = 8,3$ м³/сут. Получены следующие значения коэффициентов: $L_f = 43,36$ м, $k_{fw} = 3,87$ мкм²·м, $\beta^* = 5,47 \cdot 10^{-4}$ МПа⁻¹, $p_k = 16,36$ МПа. Значение проницаемости k_r получено из решения обратной задачи по результатам гидродинамических исследований скважины в отсутствие ГРП [5]. Экспериментальная и расчетная КВД хорошо согласуются.

Результаты расчетов показали, что предложенный в работе вычислительный алгоритм интерпретации данных гидродинамических исследований вертикальных скважин позволяет оценить фильтрационно-емкостные параметры пласта и трещины ГРП.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Economides M. J.** Reservoir stimulation. 3 ed. / M. J. Economides, K. G. Nolte. Chichester: John Wiley and Sons Ltd, 2000.
2. **Самарский А. А.** Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. М.: Наука, 1989.
3. **Басниев К. С.** Подземная гидромеханика / К. С. Басниев, Н. М. Дмитриев, Р. Д. Каневская, В. М. Максимов. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2006.

4. **Cinco-Ley H., Samaniego V. F., Dominguez A. N.** Transient pressure behavior for a well with a finite-conductivity vertical fracture // Soc. Petrol. Engrs J. 1978. V. 18, N 4. P. 253–264.
5. **Хайруллин М. Х.** Интерпретация результатов гидродинамических исследований скважин методами регуляризации / М. Х. Хайруллин, Р. С. Хисамов, М. Н. Шамсиев, Р. Г. Фархуллин. М.; Ижевск: Науч.-издат. центр “Регулярная и хаотическая динамика”: Ин-т компьютер. исслед., 2006.

*Поступила в редакцию 21/II 2011 г.,
в окончательном варианте — 21/VII 2011 г.*
