

Авторы выражают благодарность Б. Л. Рождественскому, Е. Е. Ловецкому и В. К. Сироткину за обсуждение и интерес к работе.

Поступила 12 VII 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян С. С. Некоторые вопросы математической теории деформирования и разрушения твердых горных пород. — ПММ, 1967, т. 31, № 4.
2. Багдасарян А. Б. Точные решения задачи о действии взрыва сосредоточенного заряда в хрупкой твердой среде. — Изв. АН АрмССР. Механика, 1968, т. 21, № 5.
3. Багдасарян А. Б. Расчет действия взрыва в хрупкой горной породе. — ПМТФ, 1970, № 5.
4. Николаевский В. Н. О связи объемных и сдвиговых пластических деформаций и ударных волн в мягких грунтах. — Докл. АН СССР, 1967, т. 175, № 5.
5. Андрианкин Э. И., Корявов В. П. Ударная волна в переменнo уплотняемой пластической среде. — Докл. АН СССР, 1959, т. 128, № 2.
6. Компанец А. С. Ударные волны в пластической уплотняющейся среде. — Докл. АН СССР, 1956, т. 109, № 1.
7. Фачиоли Э., Анг А. Х.— С. Дискретная эйлерова модель распространения сферической волны в сжимаемой среде. — В кн.: Действие ядерного взрыва. М., «Мир», 1971.

УДК 624.131 + 539.215.

### ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛНЫ В ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ С ПРЕГРАДОЙ

Г. М. Ляхов, К. С. Султанов

(Москва)

В работах [1, 2] предложена модель грунта как вязкопластической среды. Ниже на основе этой модели получено решение задачи о взаимодействии плоской одномерной волны с неподвижной и смещающейся преградой, проведенное с помощью ЭВМ методом характеристик. Задача о распространении волн на основе этой же модели решена в [2, 3]. Результаты измерения параметров взрывных волн, свидетельствующие о существенном влиянии на закономерности их распространения вязких и пластических свойств грунтов, приведены в работах [2, 4—6].

В соответствии с моделью [1] в плотных средах учитываются две предельные нелинейные диаграммы объемного сжатия  $\sigma_D(\epsilon)$  и  $\sigma_S(\epsilon)$ , соответствующие динамическому ( $\dot{\epsilon} \rightarrow \infty$ ) нагружению и равновесному состоянию среды ( $\dot{\epsilon} \rightarrow 0$ ) (статическому нагружению). Разгрузка протекает по другим уравнениям, чем нагрузка, что приводит к образованию остаточных деформаций. Общая деформация элемента  $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$ , где величина  $\epsilon_1$  связана с мгновенным сжатием, а  $\epsilon_2$  со сжатием, протекающим в конечное время (деформация переукладки).

При малых нагрузках предельные зависимости принимаются линейными и поведение среды [1, 2] определяется последовательностью уравнений:

при ударном нагружении (на скачке)

$$(1) \quad \sigma = E_D \epsilon;$$

при непрерывном нарастании напряжения (нагрузка по напряжению)

$$(2) \quad \dot{\varepsilon} + \mu\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E_D + \mu\dot{\sigma}/E_S;$$

при убывании напряжения, но при возрастании  $\varepsilon_2$  (разгрузка по напряжению, нагрузка по деформации переукладки)

$$(3) \quad \dot{\varepsilon} + \mu\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E_R + \mu\sigma(1/E_S - 1/E_D + 1/E_R) + \mu\sigma_m(1/E_D - 1/E_R);$$

при убывании напряжения и  $\varepsilon_2 = \text{const}$  (деформация переукладки принята необратимой)

$$(4) \quad \dot{\sigma} = E_R\dot{\varepsilon},$$

где  $\mu = E_D E_S / (E_D - E_S)\eta$  (параметр вязкости);  $E_D$  — динамический, а  $E_S$  — статический модули сжатия;  $E_R$  — модуль разгрузки;  $\eta$  — коэффициент вязкости;  $\sigma_m$  — максимальное напряжение в частице среды.

Волна в среде создается нагрузкой в начальном сечении  $r = 0$ , меняющейся по закону

$$(5) \quad \sigma = \sigma_{\max}(1 - t/\theta), 0 \leq t \leq \theta; \sigma = 0, t \geq \theta.$$

На расстоянии  $r^*$  находится ограниченная двумя параллельными плоскостями преграда из несжимаемого материала массой  $m$ , приходящейся на единицу площади. За преградой такая же среда, как перед преградой. Определяются параметры падающей и отраженной от преграды волн, проходящей волн за преградой, нагрузка на преграду и ее движение.

Если частица находилась в состоянии, определяемом (3), то при вторичном возрастании напряжения, вызванном приходом отраженной волны, это уравнение сохраняется до достижения  $\sigma_m$  (максимального напряжения в падающей волне), в дальнейшем выполняется уравнение (2). Если частица находилась в состоянии, определяемом (4), то это уравнение сохраняется до значения  $\sigma$ , от которого началась разгрузка по  $\varepsilon_2$ , в дальнейшем выполняется (3), а после достижения  $\sigma_m$  — (2).

Воспользуемся переменными Лагранжа:  $h$  — масса,  $t$  — время. Решение сводится к интегрированию системы основных уравнений движения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \sigma}{\partial h} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial h} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0, \quad h = \rho_0 r,$$

которая замыкается последовательно меняющимися уравнениями (1)–(4),  $\rho_0$  — начальная плотность среды.

Граничные условия: в начальном сечении задано (5), на фронте падающей и проходящей волн

$$\sigma = -Au, \quad h = At, \quad A = \sqrt{E_D \rho_0} = c_0 \rho_0,$$

$c_0$  — скорость звука, определяемая динамической диаграммой; на преграде

$$mdu/dt = \sigma_1 - \sigma_2, \quad h = h^* = \rho_0 r^*,$$

$\sigma_1$  — нагрузка на преграду со стороны падающей, а  $\sigma_2$  — проходящей волн (при  $m = \infty$  получим  $u = 0$ );

на фронте отраженной волны

$$\sigma_3 - \sigma_1 = A(u_3 - u_1), \quad h = -At + 2h^*,$$

Таблица 1

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mu\theta$	5	10	50	5	10	50	5	20	10
$m^0$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	10	10	10	10	20	10
$\gamma$	2	2	2	2	2	2	1,1	2	4

$\sigma_1, u_1$  — напряжение и скорость частиц в падающей, а  $\sigma_3, u_3$  — в отраженной волнах.

Перейдем к безразмерным переменным Лагранжа и безразмерным напряжениям, деформациям, скорости частиц и массе преграды

$$x = \mu r / c_0 = \mu h / A, \tau = \mu t, \sigma^0 = \sigma / \sigma_{\max},$$

$$u^0 = -Au / \sigma_{\max}, \varepsilon^0 = E_D \varepsilon / \sigma_{\max}, m^0 = \mu m / A.$$

Обозначим  $E_D / E_S = \gamma, E_D / E_R = \beta, x^* = \mu h^* / A = \mu r^* / c_0$ . В новых переменных определяющие параметры задачи —  $\gamma, \beta, \mu\theta, m^0$  и  $x^*$ .

Решение выполнено на БЭСМ-6 методом характеристик при  $x^* = 6$  для 9 вариантов, приведенных в табл. 1.

Во всех случаях, кроме варианта 9, нагрузка в начальном сечении соответствует (5), а  $\beta = 0,5$ , для варианта 9 принято  $\sigma = \sigma_{\max}(1 - t/\theta)^3$ , а  $\beta = 0,4$ .

Экспериментальные значения характеристик некоторых грунтов [2], позволяющие перейти к размерным величинам, приведены в табл. 2, где  $w$  — влажность грунта.

Общие закономерности взаимодействия волны с преградой рассмотрим на примере расчета варианта 6. На фиг. 1,  $a-v$  представлены зависимости  $\sigma^0(\tau), \varepsilon^0(\tau)$  и  $u^0(\tau)$  в различных сечениях среды при прохождении падающей, отраженной и проходящей волн. Не уменьшая общности, можно считать, что преграда бесконечно тонкая, но с конечной массой  $m^0$ . Волна за преградой возникает в момент прихода предвестника падающей волны. Кривые 0-3 относятся к расстояниям  $x^* = 0; 1,5; 3; 4,5$  (перед преградой), 4 и 5 — к расстоянию  $x^* = 6$  (на преграде с передней и задней сторон), 6-9 — к расстояниям  $x^* = 7,5; 9; 10,5$  и 15 (за преградой).

В падающей волне впереди движется предвестник со скачком всех параметров на фронте (скачки отмечены кружками). За скачком параметры нарастают и убывают непрерывно. С удалением от начального сечения волна постепенно размывается, величина скачка стремится к нулю, время нарастания параметров до максимума увеличивается. Развитие деформации и скорости частиц во времени отстает от напряжения.

При подходе скачка к преграде напряжение, как и в линейно-упругой среде, возрастает в 2 раза, так как на скачке вязкие свойства не проявляются. От преграды к начальному сечению движется отраженная волна, одновременно возрастает нагрузка на преграду, она вовлекается

Таблица 2

Грунт	$\rho_0 \cdot 10^{-3},$ кг/м <sup>3</sup>	$w, \%$	$E_D \cdot 10^{-5},$ Г/м <sup>2</sup>	$\gamma$	$\mu, c^{-1}$	$\eta, \text{Н} \cdot \text{с}/\text{м}^2$
Песчаный . . . . .	1,6	7,5	160	2	500	$3,2 \cdot 10^4$
Суглинистый . . .	1,8	12	500	2,5	220	$1,5 \cdot 10^5$
Глинистый . . . .	1,8	20	450	4,5	1000	$1,3 \cdot 10^4$

в движение, что создает за преградой проходящую непрерывную волну сжатия. В отраженной волне продолжается процесс размывания, скачок на ее фронте быстро иссякает. В частицах происходит вторичное нарастание напряжения и деформации, а затем их уменьшение. С приближением к начальному сечению отраженная волна ослабевает, величина вторичных максимумов уменьшается.

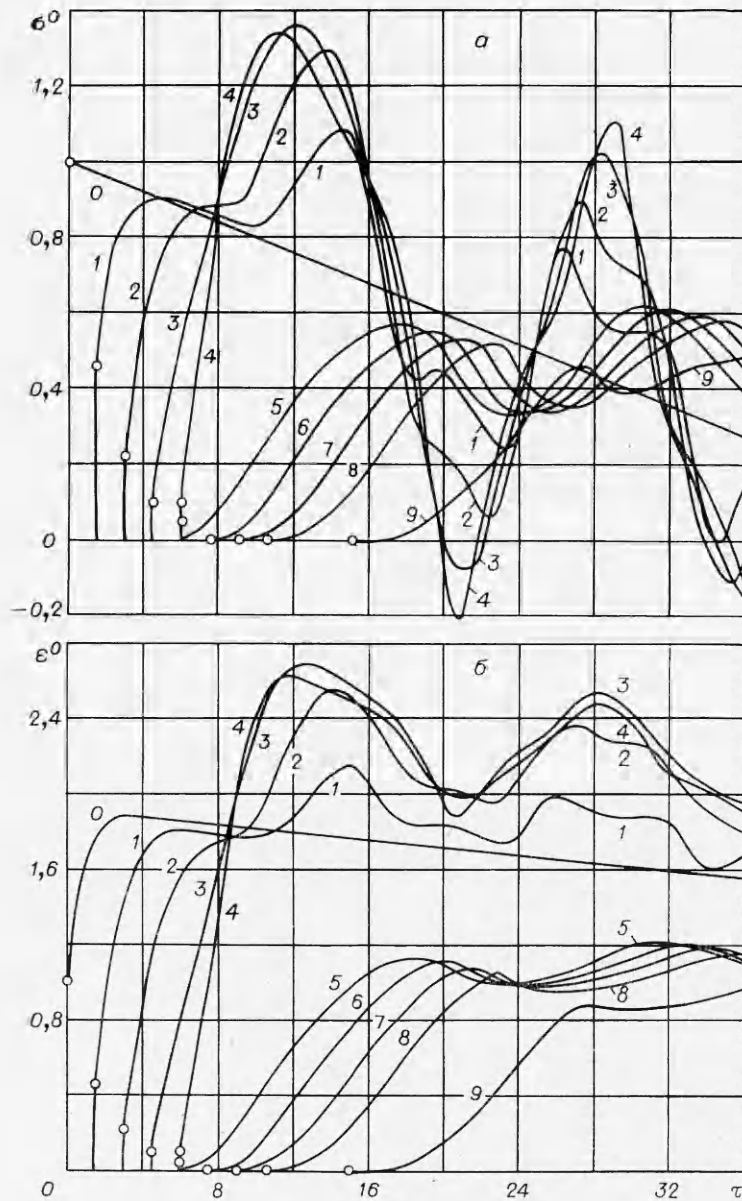
В начальном сечении нагрузка, создающая волну, ко времени прихода отраженной волны сохраняет еще большое значение. Волна, идущая от преграды, отражается от этого сечения, возникает третья волна, движущаяся к преграде и вызывающая новое нарастание напряжения и деформации. При взаимодействии третьей волны с преградой образуется четвертая волна, идущая к начальному сечению. Второй максимум нагрузки на преграду со стороны падающей волны меньше первого. Взаимодействие третьей волны с преградой приводит к возрастанию скорости преграды и к возникновению за преградой вторичной волны сжатия, вызывающей новое возрастание параметров. Максимальные значения  $\sigma^0$ ,  $\epsilon^0$  и  $u^0$  в этой волне выше, чем в первой — совершается постепенный переход энергии из области перед преградой в область за ней.

При малых  $\mu\theta$  вторичное возрастание нагрузки на преграду и вторичная волна за преградой не возникают, так как отраженная от преграды волна иссякает на пути к начальному сечению.

На фиг. 2 показано распространение волн при разных значениях параметров нагрузки и преграды. Кривые соответствуют:  $O$  — фронту падающей и проходящей волн,  $I^0—6^0$  — фронту отраженной от преграды волны,  $I^*—6^*$  — максимуму напряжения падающей,  $I—6$  — отраженной, а  $I^{**}—6^{**}$  — проходящей волн. Скорости фронтов падающей и проходящей волн не зависят от параметров нагрузки и массы преграды, а только от свойств среды. Скорость максимума падающей волны уменьшается с увеличением  $\mu\theta$ , но возрастает с удалением от начального сечения. Скорость фронта отраженной волны на участках первого нагружения среды равна скорости падающей волны, а на участках разгрузки по напряжению имеет большее значение, определяемое модулем разгрузки. Нагрузка на преграду достигает максимума в момент прихода максимума падающей волны. Скорость максимума отраженной волны с удалением от преграды возрастает. Она существенно больше скорости максимума падающей волны. С увеличением  $\mu\theta$  время достижения максимума нагрузки на переднюю грань преграды увеличивается. Максимум волны, отраженной от неподвижной преграды, движется быстрее, чем при отражении от смещающейся преграды.

На фиг. 2 показано также изменение нагрузки  $\sigma^0(\tau)$  в начальном сечении при трех значениях  $\mu\theta = 5; 10; 50$ , соответствующих случаям 1 и 4, 2 и 5, 3 и 6.

На фиг. 3 приведены кривые нагрузки на преграду в случае вязкопластической, упругой и пластической моделей. Кривые  $I—6$  определяют нагрузку на переднюю, а  $I^0—6^0$  тыльную грани преграды в вязкопластической среде. Нумерация кривых, как и раньше, соответствует приведенной выше последовательности вариантов. Кривые  $I^*—3^*$  относятся к нагрузке на неподвижную преграду, рассчитанной по модели линейноупругой среды, при  $\mu\theta$ , равных 5; 10; 50 соответственно. Модуль упругости принят равным модулю динамического сжатия вязкой среды. Кривые  $2^{**}$ ,  $3^{**}$  определяют нагрузку на неподвижную преграду, рассчитанную по модели пластической среды с модулем сжатия, равным динамическому модулю вязкой среды, и с разгрузкой, происходящей при постоянной деформации (величина  $\mu\theta$  равна 10 и 50 соответственно). Нагрузка



на преграду определяется в соответствии с [7] до падения скачком уравнениями:

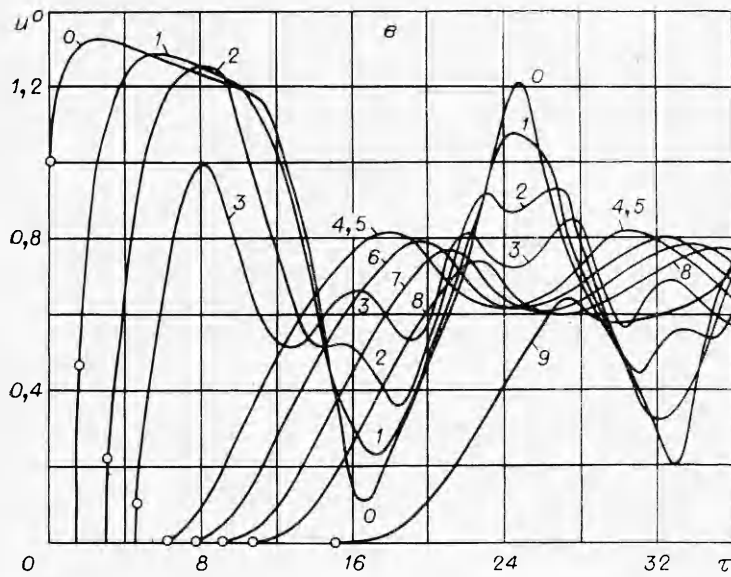
в пластической среде

$$p^0 = 2[1 + \tau/\mu\theta - 3\tau^*/2\mu\theta + \tau^* \ln(2 - \tau/\tau^*)/\mu\theta];$$

в линейно-упругой среде

$$p^0 = 2[1 + (\tau^* - \tau)/\mu\theta].$$

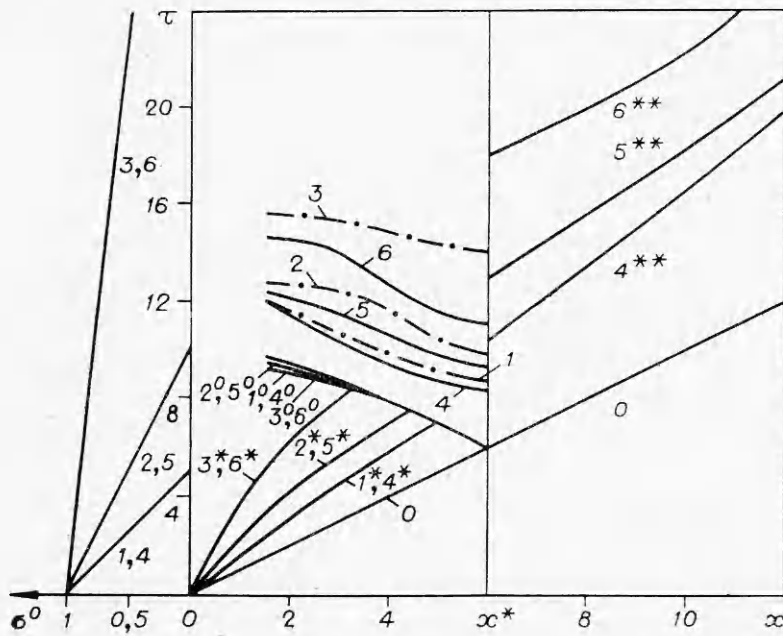
В пластической среде нагрузка падает до значения, соответствующего начальному сечению.



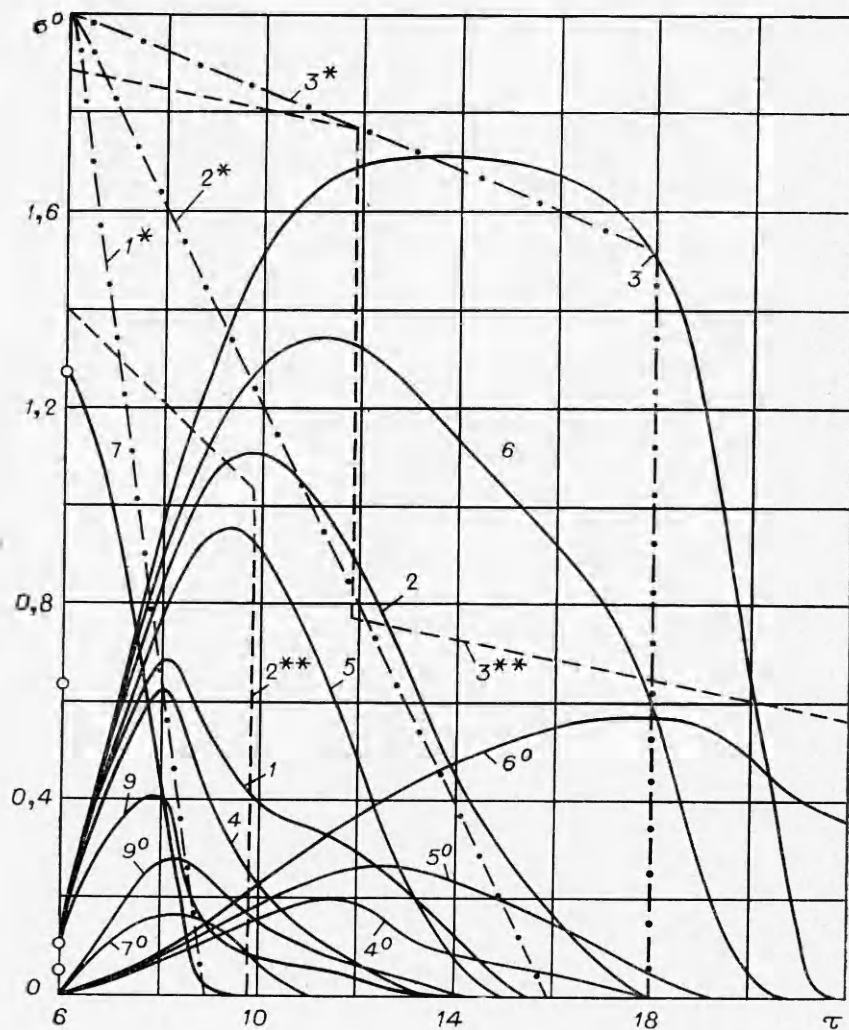
Фиг. 1

Из сопоставления кривых 1—3 и 4—6 следует, что возможность смещения преграды приводит к уменьшению нагрузки на переднюю грань.

В случае варианта 7 к преграде подходит волна, у которой максимальное напряжение достигается скачком на фронте (волна не размыта), поэтому нагрузка на переднюю грань имеет максимум в момент подхода фронта. Из сопоставления кривых 7 и 4 следует, что уменьшение  $\gamma$ , экви-



Фиг 2



Фиг. 3

валентное сближению диаграмм динамического и статического сжатия среды, приводит к возрастанию максимального значения нагрузки, изменяет ее характер (делает ударной), но уменьшает ее длительность. При  $\gamma \rightarrow 1$  вязкая среда превращается в линейно-упругую среду Гука. При  $\gamma = 1,1$  происходит еще заметное угасание волны на пути к преграде, но размывания, как и в среде Гука, уже нет. Величина  $\gamma = 1,0-1,5$  относится к горным породам. В грунтах  $\gamma$  имеет большие значения, равные 2—4,5 [2].

Увеличение  $\mu\theta$  (при постоянном  $\mu$  возрастает  $\theta$ ) приводит к возрастанию максимального значения нагрузки и к увеличению длительности ее действия.

Диаграмма динамического сжатия пластической среды принята линейной, волна поэтому не размывается, а остается ударной. Нагрузка на преграду при этом возрастает скачком.

Безразмерное ускорение преграды

$$du^0/d\tau = (\sigma_1^0 - \sigma_2^0) m^0,$$

где  $\sigma_1^0$  и  $\sigma_2^0$  — нагрузка на переднюю и заднюю грани соответственно.

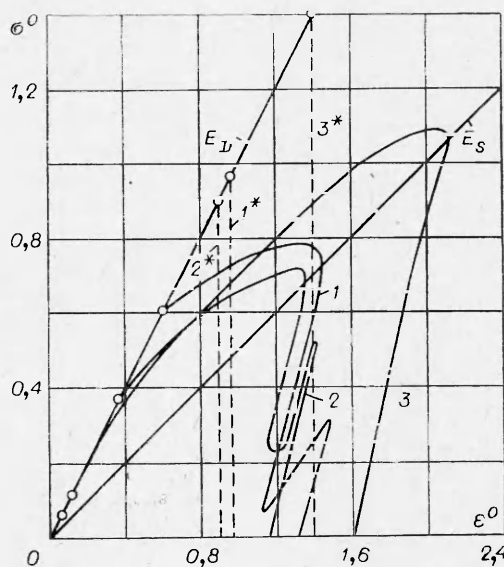
В рассмотренных упругой и пластической средах максимум  $\sigma_1^0$  достигается при подходе к преграде фронта ударной волны. Его величина не зависит от массы преграды. В этот момент времени  $\sigma_2^0 = 0$  при всех значениях  $m^0$ . С течением времени  $\sigma_1^0$  убывает, а  $\sigma_2^0$  возрастает до максимума и затем также убывает. Отсюда следует, что ускорение имеет максимум в момент подхода фронта волны. При  $m^0 = 10$  и  $\mu\theta = 50$  в соответствии с кривыми 3\* и 2\* на фиг. 3 максимальное ускорение в упругой и пластической средах составляет 0,2 и 0,188 соответственно.

В среде с вязкостью при  $\gamma = 2$  и 4 к преграде также подходит волна со скачком на фронте, но за ним следует дальнейшее нарастание напряжения. Нагрузка на переднюю грань некоторое время возрастает. Одновременно возрастает нагрузка и на заднюю грань. Максимум ускорения преграды достигается, когда разность  $\sigma_1^0 - \sigma_2^0$  станет максимальной. При  $m^0 = 10$  и  $\mu\theta = 50$  (см. кривые 6 и 6\* на фиг. 3) максимальное ускорение  $du^0/d\tau = 0,105$  имеет место при  $\tau = 11,1$ . Ускорение преграды в вязкой среде меньше, чем в упругой и пластической средах.

Учет объемной вязкости среды приводит к размыванию падающей, отраженной и проходящей волн, а также к размыванию нагрузки на преграду, снижению ее максимального значения и величины максимального ускорения.

На фиг. 4 приведены кривые сжатия среды  $\sigma^0(\epsilon^0)$ , реализуемые при прохождении падающей и отраженной волн в разных сечениях и на преграде, кривые 1—3 относятся к вязкой среде (вариант 2) и к расстояниям  $x^* = 0,96; 1,92; 6$  (на преграде) соответственно, 1\*—3\* — к пластической среде и к тем же расстояниям. В обоих случаях преграда неподвижна,  $\mu\theta = 10$ . После скачка на предвестнике состояние вязкой среды при дальнейшем непрерывном возрастании напряжения постепенно приближается от динамической к статической диаграмме сжатия и переходит за нее в область больших деформаций. Приход отраженной волны вызывает вторичное возрастание напряжения и деформации. В пластической среде после скачка происходит разгрузка среды при постоянной деформации и вторичная нагрузка по линии разгрузки. На фиг. 4 линии  $E_D$  и  $E_S$  означают диаграммы динамического и статического сжатия вязкой среды.

Из результатов расчета следует, что при взаимодействии волны с преградой могут возникать растягивающие напряжения (см. фиг. 1, а), которые приводят к разрыву сплошности среды. Максимальные нагрузки на преграду и максимальные ее ускорения достига-



Фиг. 4



ются, однако, до возникновения растягивающих напряжений. Расчеты при  $\tau \geq 20$  приведены для иллюстрации изменения параметров, если грунт выдерживает растягивающие напряжения  $\sigma^0 = -0,2$ . Разрыв сплошности не предусмотрен в постановке задачи.

Полученное решение показывает, что закономерности взаимодействия волны с преградой существенно зависят как от пластических, так и от вязких свойств среды. Вязкость приводит к размыванию и изменению профиля отраженной и проходящей волн и нагрузки на преграду, а также к снижению максимальных значений нагрузки и ускорения преграды.

Поступила 30 VI 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ляхов Г. М. Определения вязких свойств грунта. — ПМТФ, 1968, № 4.
2. Ляхов Г. М. Основы динамики взрывных волн в грунтах и горных породах. М., «Недра», 1974.
3. Ляхов Г. М., Пачепский Я. А. Об учете вязких и пластических свойств при решении волновых задач. — ПМТФ, 1973, № 2.
4. Васильев Ю. И., Иванова Л. А., Щербо М. Н. Измерение напряжений и деформаций в грунте при распространении взрывных волн. — Изв. АН СССР. Физика Земли, 1969, № 1.
5. Вовк А. А. Основы прикладной геодинамики взрыва. Киев, «Наукова думка», 1976.
6. Григорян С. С., Ляхов Г. М., Паршуков П. А. Сферические взрывные волны в грунтах по измерениям напряжений и деформаций. — ПМТФ, 1977, № 1.
7. Ляхов Г. М., Полякова Н. И. Волны в плотных средах и нагрузки на сооружения. М., «Недра», 1967.

УДК 532.68

### О НАПРЯЖЕНИЯХ В ЗОНЕ ЛИНИИ СМАЧИВАНИЯ И ДИНАМИЧЕСКОМ СОПРОТИВЛЕНИИ МЕНИСКА

Б. В. Железный, А. Г. Никифоров  
(Ленинград)

Использование обычного «условия прилипания» жидкости к твердой поверхности при анализе течения в зоне линии трехфазного контакта твердое тело/жидкость/газ (ЛТК) приводит к решению с математическими особенностями на ЛТК [1]. Устранить эти особенности (оставаясь в рамках континуальной механики жидкости) можно, либо отказавшись от условия прилипания для зоны ЛТК, либо приняв, что твердая поверхность вблизи мениска покрыта полимолекулярной (жидкой) пленкой, так что ЛТК, как таковая, отсутствует (имеется не «линия» смачивания, а конечной протяженности переходная область между мениском и пленкой однородной толщины). В последнем случае использование условия прилипания возможно.

Задача о движении мениска при наличии жидкой пленки на стенке сформулирована в работах [2, 3]. Различие между «отступающим» и «наступающим» мениском связано с тем, что в первом случае средняя толщина  $h_*$  пленки (оставляемой на стенке) определяется скоростью  $v$  мениска, тогда как во втором случае толщина  $h_*$  пленки впереди мениска может быть задана произвольной. В силу наличия дополнительной независимой переменной ( $h_*$ ) случай наступающего мениска математически более сложен.

Основной практической задачей, решаемой для отступающего мениска, является нахождение зависимости  $h_*(v)$ , тогда как для наступающего мениска — нахождение эффективного гидродинамического сопротивления мениска. Пер-