

УДК 519.6

## ПРЯМОЕ ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЕРХЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ В ДОННОЙ ОБЛАСТИ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА

А. М. Липанов, С. А. Карсканов, А. И. Карпов

Институт механики УрО РАН, 426067 Ижевск, Россия

E-mails: lipanov@udman.ru, ser@udman.ru, karpov@udman.ru

Рассматривается сверхзвуковое течение в ближнем следе за цилиндром. С использованием прямого численного моделирования, основанного на алгоритмах высокого порядка аппроксимации, получены и анализируются распределения давления в донной области за круговым цилиндром при различных значениях числа Маха  $M_\infty$ . При  $M_\infty = 2,46$  полученные результаты сравниваются с известными экспериментальными и расчетными данными. Также при различных значениях числа Маха рассчитывается генерация кинетической энергии турбулентности.

Ключевые слова: сверхзвуковой поток, уравнения Навье — Стокса, высокий порядок аппроксимации, прямое численное моделирование, донное сопротивление.

DOI: 10.15372/PMTF20180103

**Введение.** Численное моделирование процессов, имеющих место при полете летательных аппаратов и аэродинамических тел, таких как снаряды, пули, ракеты, является достаточно сложной задачей. Это обусловлено сложностью нестационарного течения и тем фактом, что данная форма движения сплошной среды в большинстве случаев реализуется при взаимодействии технических устройств с окружающей средой. Поиск приемлемых для практического применения способов математического описания высокоскоростных течений ведется более 100 лет, начиная с работ О. Рейнольдса. Согласно современным представлениям течения вязкой среды описываются уравнениями Навье — Стокса. Однако, несмотря на значительный прогресс вычислительной техники, ее возможности недостаточны для решения этих уравнений при больших значениях числа Рейнольдса (представляющих наибольший интерес) и, по-видимому, не изменятся до конца XXI в [1]. Поэтому процедуры и алгоритмы вычислительной аэродинамики должны постоянно совершенствоваться и переоцениваться. Теория и методы, недавно позволявшие получать приемлемые результаты, на современном этапе разработки летательных аппаратов могут оказаться несостоятельными. Постоянно существует необходимость поиска компромисса между адекватностью модели и возможностью ее практического применения, определяемой в первую очередь потенциалом вычислительной техники.

В последнее время часто используется прямое численное моделирование (direct numerical simulation (DNS)), основанное на первых принципах аэродинамики. Однако

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 16-41-180168, 16-08-00110).

вследствие вычислительной трудоемкости на современном этапе широкое использование метода DNS при решении аэродинамических задач не представляется возможным. Применение данного метода ограничивается либо малыми значениями числа Рейнольдса, либо упрощенной геометрией задачи, поэтому он используется в основном в фундаментальных исследованиях. Тем не менее результаты, полученные с помощью метода DNS и не содержащие эмпирических параметров, имеют большое значение для аэродинамики, так как наряду с экспериментальными данными являются основой для тестирования многочисленных полуэмпирических моделей турбулентности. Кроме того, метод DNS позволяет получить полную картину течения без какого-либо осреднения, что может использоваться при исследовании структуры потока и закономерностей нестационарного распределения параметров.

Основной задачей вычислительной аэродинамики является определение аэродинамических характеристик обтекаемого объекта на основе математического моделирования. Важной составной частью данной задачи является точный расчет отрывного течения в донной области тела. За обтекаемым телом возникает вихревой след с большими рециркуляционными зонами и областью пониженного давления, представляющей собой источник донного сопротивления, которое может достигать 50 % общего аэродинамического сопротивления [2–5] (на ранних этапах исследований полагалось, что донное сопротивление составляет до 80 % общего сопротивления [6]). Трудности, возникающие при численном моделировании отрывных течений, обусловлены разнонаправленностью векторов скоростей в исследуемой области.

В последние десятилетия достаточно полно исследовано течение за круговым цилиндром, образующееся при его обтекании сверхзвуковым потоком. Большая часть исследований выполнена на основе решения осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье — Стокса (RANS) с использованием различных моделей турбулентности (см., например, [7]) либо на основе гибридных моделей, таких как DES, DDES, ZDES [8]. Как правило, в работах проводилось сравнение численных результатов, полученных с помощью различных вариантов моделей турбулентности, между собой и с результатами физического эксперимента [9]. Поскольку работа [9] является единственной, очевидно, что экспериментальных данных для валидации численных моделей в широком диапазоне параметров недостаточно. Исследований, проведенных с помощью метода DNS, как и адекватных результатов, полученных на основе LES-моделей, очень мало. Как указывалось выше, это обусловлено большими значениями числа Рейнольдса, характерными для сверхзвуковых течений, и невозможностью построить сетку, достаточную для разрешения наименьших масштабов. С этой точки зрения представляют интерес работы [4, 5, 10], в которых с использованием прямого численного моделирования (на основе спектрального алгоритма в азимутальном направлении) выполнены расчеты коэффициентов давления в донной области за круговым цилиндром, а также работа [11], в которой проведено моделирование сверхзвукового осесимметричного следа за цилиндром. Однако в этих работах вычисления проводились при значении числа Рейнольдса  $Re \leq 10^5$ .

Целью настоящей работы является параметрическое исследование на основе прямого численного моделирования осесимметричного отрывного течения с характерными для реальных течений значениями числа Рейнольдса порядка  $Re = 10^6$  в донной области. При этом реальный турбулентный процесс не моделируется, однако представляет интерес исследование поведения решения уравнений Навье — Стокса в зависимости от чисел Маха и Рейнольдса.

Использование алгоритмов высокого порядка аппроксимации и осесимметричной постановки (предполагающей, что расчет проводится в одной плоскости, но с учетом трехмерности потока) позволяет построить сетку для расчета диссипативных слагаемых. Дис-

сипативные члены уравнений Навье — Стокса оказывают влияние на решение вблизи стенок или обтекаемых поверхностей, где действует условие прилипания, и на формирование течения в данных областях. Таким образом, распределение моделируемых параметров течения формируется под действием естественной физической вязкости, а не численной.

**1. Постановка задачи и метод решения.** Для исследования течения сверхзвукового сжимаемого газа в донной области цилиндра решались уравнения Навье — Стокса в осесимметричной постановке (при этом дополнительные модели и константы не использовались):

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{D}{r} = 0, \quad (1)$$

где

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_x \\ \rho u_r \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \rho u_x \\ \rho u_x^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho u_x u_r - \tau_{rx} \\ u_x(\rho E + P) + q_x - u_x \tau_{xx} - u_r \tau_{rx} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \rho u_r \\ \rho u_x u_r - \tau_{xr} \\ \rho u_r^2 - \tau_{rr} \\ u_r(\rho E + P) + q_r - u_x \tau_{xr} - u_r \tau_{rr} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \rho u_r \\ \rho u_x u_r - \tau_{xr} \\ \rho u_r^2 - \tau_{rr} + \tau_{\theta\theta} \\ u_r(\rho E + P) + q_r - u_x \tau_{xr} - u_r \tau_{rr} \end{pmatrix},$$

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad \tau_{rx} = \tau_{xr} = \mu \left( \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right),$$

$$\tau_{rr} = 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad \tau_{\theta\theta} = 2\mu \frac{u_r}{r} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \mathbf{u},$$

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_r = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r}.$$

В расчетах вязкость изменялась по закону Сазерленда, теплопроводность полагалась постоянной величиной, равной  $\lambda = 0,03$  Вт/(м · К).

Система (1) замыкалась уравнением состояния Менделеева — Клапейрона и дополнялась начальными и граничными условиями. На входной границе ( $x = -0,4$ ) задавался постоянный профиль течения  $W = W(r)$ , эволюционирующий вдоль горизонтальной поверхности. На свободной выходной границе ставились условия “сноса”  $\partial W / \partial x = 0$ . На оси симметрии, совпадающей с осью  $r$ , задавались условия симметрии

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial r} = 0, \quad u_r = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial r} = 0.$$

Расчетные точки на оси симметрии ( $r = 0$ ) отсутствуют. Первая расчетная точка находится на расстоянии  $\Delta r / 2$  от оси симметрии. Поэтому условие симметрии можно записать в виде  $w_{-1} = w_1$ , где  $w_{-1}$  — параметр в мнимой точке, симметричной относительно оси точки с индексом “1”.

Для того чтобы минимизировать не имеющие физического смысла отражения от границы расчетной области, на верхней свободной границе задавалось условие [12]

$$\frac{\partial W}{\partial t} + (c + u_r) \frac{\partial W}{\partial r} = 0$$

( $c$  — скорость звука). Поскольку вблизи границы расчеты проводились на более грубой сетке, вследствие наличия численной вязкости ложные пульсации подавлялись. На непроницаемых твердых стенках задавались условия непротекания и прилипания. Поверхность цилиндра полагалась адиабатической.

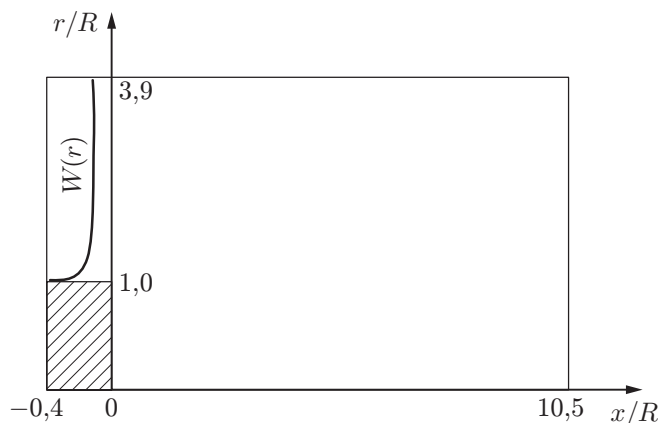


Рис. 1. Расчетная область задачи

Предварительные расчеты обтекания оживального тела проводились с помощью приложения ANSYS Fluent с использованием метода RANS, SST ( $k-\omega$ )-модели турбулентности. На основе данных расчетов получены профили входных параметров и начальное поле течения. Форма оживального тела близка к форме снаряда.

Вычислительная область (рис. 1) покрывалась прямоугольной пространственной сеткой, состоящей из 25 600 000 ( $6400 \times 4000$ ) узлов и сгущающейся вблизи обтекаемых стенок. Процесс расчета однонаправленно распараллеливался с помощью технологии MPI. Расчеты проводились на суперкомпьютере “Уран” Института математики и механики им. Н. Н. Красовского (Екатеринбург).

Для решения задачи, описывающей сложное взаимодействие ударных волн между собой, а также с вязкими слоями, вихрями, волнами гидродинамической неустойчивости, необходимы алгоритмы, позволяющие с высокой точностью рассчитывать как газодинамические разрывы, так и области гладкого решения, например схемы реконструкции точного решения (WENO-схемы). Таким образом, система уравнений (1) интегрировалась по пространству с высоким (пятым) порядком точности с помощью алгоритма WENO на семиточечном шаблоне.

Переход на следующий временной слой проводился с помощью двухшаговой TVD-схемы Рунге — Кутты второго порядка точности [13].

Использование аппроксимационных схем высокого порядка и мощной разностной сетки позволяет параметрически исследовать систему уравнений Навье — Стокса, так как численная вязкость минимизируется до физической вязкости. Тем не менее наличие в расчетах численной вязкости обеспечивает устойчивость решения, которое сходится с точностью до 1 %. При этом высокочастотные физические пульсации гидромеханических параметров сопоставимы с численными осцилляциями, генерируемыми разностными схемами, и составляют не более 1 % общего решения.

**2. Результаты параметрического исследования и их обсуждение.** Прямое численное моделирование сверхзвукового течения в донной области проводилось в диапазоне значений числа Маха  $M_\infty = 1,2 \div 4,0$ . Распределения значений коэффициента  $C_P$  донного давления позволяют оценить равномерность нагрузки на вертикальную стенку, коэффициент  $C_B$  определяет величину донного сопротивления. Коэффициент донного давления определяется по формуле

$$C_P = \frac{2(P_B/P_\infty - 1)}{\gamma M_\infty^2}$$

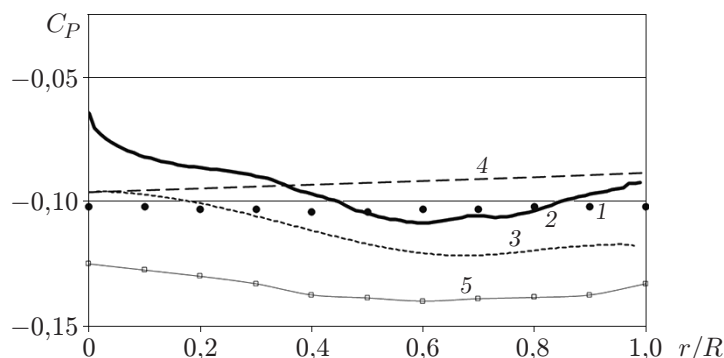


Рис. 2. Распределения коэффициента донного давления при  $M_\infty = 2,46$ , полученные экспериментально [9] (1) и с помощью различных моделей: 2 — DNS, 3 — RANS ( $k-\omega$ )-модель, 4 — DES [7], 5 — LES [7]

( $P_B$  — давление на вертикальной стенке), коэффициент аэродинамического донного сопротивления, являющийся интегральной величиной, — по формуле

$$C_B = \frac{1}{S_B} \iint_S C_P(r) dS.$$

Как указывалось выше, в работе [9] проведено экспериментальное исследование донного течения при обтекании цилиндра сверхзвуковым потоком с числом Маха  $M_\infty = 2,46$ . На рис. 2 показаны распределения коэффициента давления  $C_P$ , полученные с помощью различных численных методов. Коэффициент  $C_B$ , полученный экспериментально и с помощью различных вариантов моделирования течения с числом Маха  $M_\infty = 2,46$ , имеет следующие значения:  $C_B = 0,103$  (эксперимент [9]),  $C_B = 0,100$  (DNS-модель),  $C_B = 0,117$  (RANS ( $k-\omega$ )-модель),  $C_B = 0,092$  (DES-модель [7]),  $C_B = 0,137$  (LES-модель [7]).

Результаты прямого численного моделирования хорошо согласуются с данными физического эксперимента и результатами, полученными на основе моделей турбулентности. Однако при осесимметричном DNS-расчете значения коэффициента  $C_P$  вблизи оси симметрии оказываются завышенными, при использовании методов RANS и LES — заниженными; значения коэффициента  $C_B$ , полученные с помощью методов RANS и LES, завышены.

На рис. 3 приведены распределения коэффициентов донного давления при различных значениях числа Маха (скорости набегающего потока), в таблице — значения коэффициентов аэродинамического донного сопротивления при тех же значениях числа Маха.

С увеличением числа Маха (скорости) коэффициент давления более равномерно распределяется вдоль вертикальной стенки, уменьшаясь по абсолютному значению. Следовательно, донное сопротивление как интегральная величина также уменьшается.

На рис. 4 представлены мгновенное и осредненное поля давления для течения с числом Маха  $M_\infty = 2,46$ . Характерное число Рейнольдса при этом равно  $1,65 \cdot 10^6$ . Мгновенная

Значения коэффициента донного сопротивления при различных значениях чисел Маха и Рейнольдса

$M_\infty$	$Re_\infty$	$C_B$
1,20	$0,80 \cdot 10^6$	0,222
1,50	$10^6$	0,180
2,00	$1,34 \cdot 10^6$	0,130
2,46	$1,65 \cdot 10^6$	0,100
4,00	$2,68 \cdot 10^6$	0,046

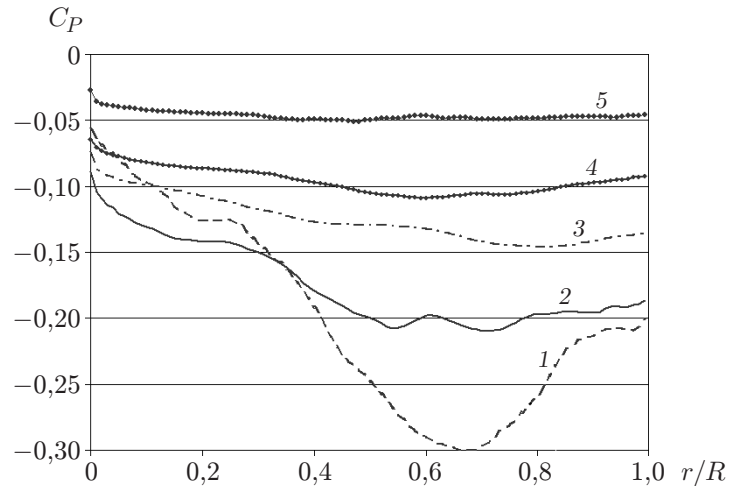


Рис. 3. Распределения коэффициента донного давления при различных значениях числа Маха:

1 —  $M_\infty = 1,20$ , 2 —  $M_\infty = 1,50$ , 3 —  $M_\infty = 2,00$ , 4 —  $M_\infty = 2,46$ , 5 —  $M_\infty = 4,00$

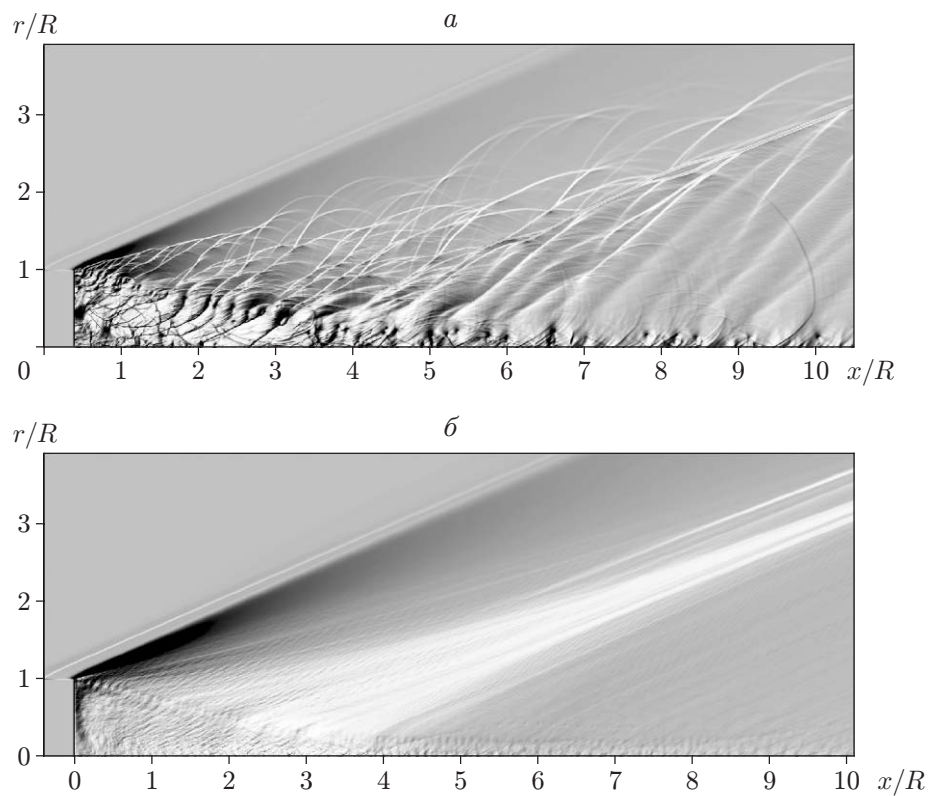


Рис. 4. Мгновенное (а) и осредненное (б) поля давления при  $M_\infty = 2,46$

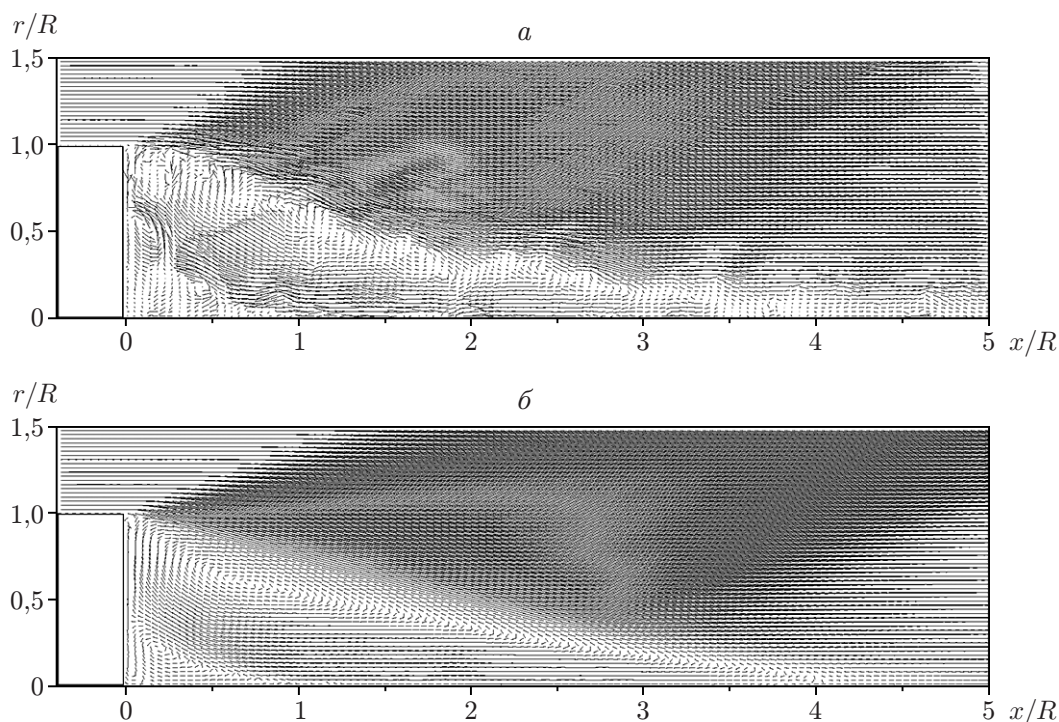


Рис. 5. Мгновенные (а) и осредненные (б) поля векторов скорости при  $M_\infty = 2,46$

картина течения характеризуется наличием множественных ударных волн, взаимодействующих друг с другом. Волна разрежения, отходящая от кромки угла, практически стационарна, в отличие от волн сжатия, которые периодически образуются при эволюции сорвавшихся вниз по потоку свободных сдвиговых слоев. Таким образом, над зоной отрыва формируется область увеличивающегося давления, замыкаемая присоединенной ударной волной.

Мгновенные и осредненные поля векторов скорости при  $M_\infty = 2,46$  показаны на рис. 5. На осредненной картине течения отчетливо визуализируется отрывная зона с возвратным движением вдоль оси симметрии. Между вертикальной стенкой, осью симметрии и отрывной зоной формируется еще несколько вихрей. С увеличением числа Маха размер углового вихря также увеличивается, т. е. уменьшается высота отрывной зоны, при этом ее длина увеличивается, а точка присоединения удаляется от вертикальной стенки. Таким образом, с увеличением скорости отрывная зона сужается вдоль оси  $r$  и вытягивается в направлении  $x$ . На мгновенной картине векторов скоростей видно, что отрывную зону формируют множественные дробящиеся и сливающиеся вихри, движущиеся от кромки угла к оси симметрии.

Помимо кинетической энергии турбулентности  $k = \langle u_i'^2 \rangle / 2$ , описывающей суммарные турбулентные пульсации, важной характеристикой турбулентности является генерация кинетической энергии, обусловленная взаимодействием напряжений Рейнольдса и средней скорости [14]:

$$P_k = -\langle u_i' u_j' \rangle \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

Эта величина представляет собой удельную кинетическую энергию турбулентности на единицу объема, обусловленную действием сил трения в потоке, и описывает потери энергии для осредненного потока на поддержание турбулентных пульсаций. В случае осесим-

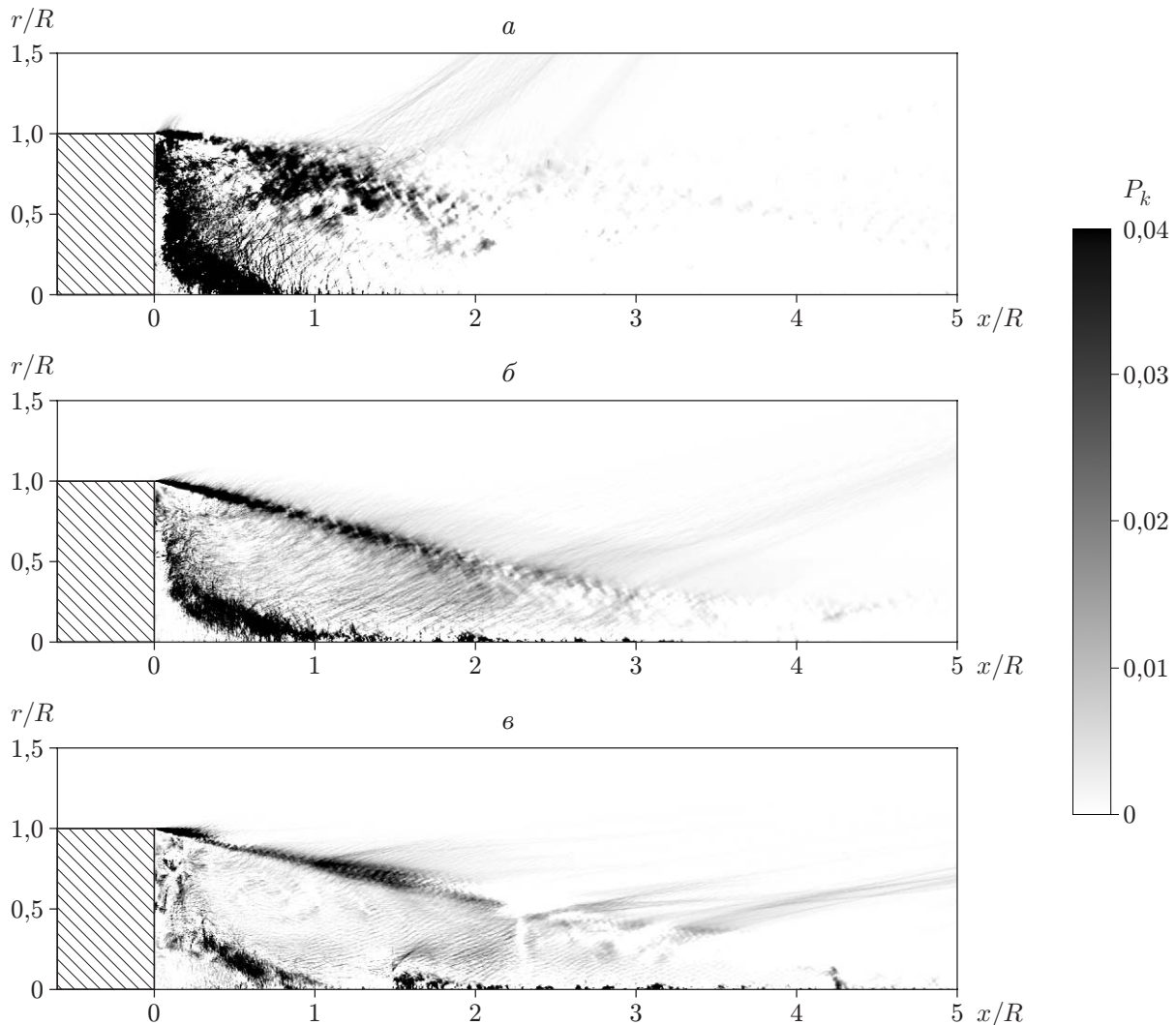


Рис. 6. Поля генерации кинетической энергии турбулентности при различных значениях числа Маха:

*a* —  $M_\infty = 1,20$ , *б* —  $M_\infty = 2,46$ , *в* —  $M_\infty = 4,00$

метричной постановки в выражении для  $P_k$  остается только четыре ненулевых члена:

$$P_k = -\langle u_x'^2 \rangle \frac{\partial u_x}{\partial x} - \langle u_x' u_r' \rangle \left( \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial x} \right) - \langle u_r'^2 \rangle \frac{\partial u_r}{\partial r}.$$

Распределения  $P_k$  при различных значениях числа Маха показаны на рис. 6. Видно, что значительная генерация турбулентности имеет место непосредственно за точкой отрыва потока от внутренней границы сдвигового слоя. Это обусловлено максимальными градиентами средней скорости в указанной области. По мере эволюционирования сдвиговых слоев вниз по потоку градиенты скорости уменьшаются, однако напряжения Рейнольдса увеличиваются таким образом, что суммарная генерация остается существенной во всей области вплоть до точки присоединения потока. Ниже точки присоединения оба параметра быстро уменьшаются, вследствие чего генерация турбулентности мала. Также на рис. 6 видно, что при увеличении числа Маха области больших значений генерации кинетической энергии турбулентности уменьшаются, причем наиболее существенно — на участке, примыкающем к оси симметрии.



**Заключение.** С использованием прямого численного моделирования исследовано осесимметричное течение в донной области цилиндра, обтекаемого сверхзвуковым потоком вязкого газа. При интегрировании уравнений Навье — Стокса модели и константы турбулентности не использовались. Получены распределения осредненных и пульсационных аэродинамических характеристик потока. С использованием современных алгоритмов высокого порядка точности получены результаты численных расчетов, хорошо согласующиеся с данными физического эксперимента. Следует отметить, что при осесимметричной постановке задачи коэффициенты донного сопротивления в окрестности оси симметрии цилиндра незначительно завышаются.

С увеличением числа Маха интенсивность колебаний давления на дне цилиндра увеличивается. Турбулентные пульсации скорости в ближнем следе распределены в соответствии с положением рециркуляционной зоны. С увеличением скорости (числа Маха) пульсации и кинетическая энергия уменьшаются. Существенный вклад в распределения генерации кинетической энергии турбулентности вносят флуктуации продольной компоненты скорости.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Гарбарук А. В.** Моделирование турбулентности в расчетах сложных течений: Учеб. пособие / А. В. Гарбарук, М. Х. Стрелец, М. Л. Шур. СПб.: Изд-во политехн. ун-та, 2012.
2. **Sahu J., Nietubicz C. J., Steger J. L.** Navier — Stokes computations of projectile base flow with and without mass injection // AIAA J. 1985. V. 23, N 9. P. 1348–1355.
3. **Rollstin L.** Measurement of in-flight base pressure on an artillery-fired projectile // J. Spacecraft Rockets. 1990. V. 27, N 1. P. 5–6.
4. **Fasel H. F., Sandberg R. D.** Simulation of supersonic base flows: numerical investigations using DNS, LES and URANS: Rep. / Univ. of Arizona; N DAAD190210361. Tucson, 2006.
5. **Sandberg R. D., Fasel H. F.** Direct numerical simulations of transitional supersonic base flows // AIAA J. 2006. V. 44, N 4. P. 848–858.
6. **Chapman D. R.** An analysis of base pressure at supersonic velocities and comparison with experiment: Tech. Note / Nat. Advisory Committee for Aeronaut.; N 2137. Washington, 1950.
7. **Simon F., Deck S., Guillen P., Sagaut P.** Reynolds-averaged Navier — Stokes / large-eddy simulations of supersonic base flow // AIAA J. 2006. V. 44, N 11. P. 2578–2590.
8. **Forsythe J. R., Hoffmann K. A., Squires K. D.** Detached-eddy simulation with compressibility corrections applied to a supersonic axisymmetric base flow // J. Fluids Engng. 2002. V. 124. P. 911–923.
9. **Herrin J. L., Dutton J. C.** Supersonic base flow experiments in the near wake of a cylindrical afterbody // AIAA J. 1994. V. 32, N 1. P. 77–83.
10. **Sandberg R. D.** Stability analysis of axisymmetric supersonic wakes using various basic states // J. Phys.: Conf. Ser. 2011. V. 318. 032017.
11. **Sanderberg R. D., Fasel H. F.** Numerical investigation of transitional supersonic axisymmetric wakes // J. Fluid Mech. 2006. V. 563. P. 1–41.
12. **Дородницын Л. В.** Неотражающие граничные условия и численное моделирование задач обтекания // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2011. Т. 51, № 1. С. 152–169.
13. **Gottlieb S., Shu C.-W.** Total variation diminishing Runge — Kutta schemes // Math. Comput. 1998. V. 67, N 221. P. 73–85.
14. **Молчанов А. М.** Математическое моделирование задач газодинамики и тепломассообмена. М.: Моск. авиац. ин-т, 2013.

*Поступила в редакцию 22/VIII 2016 г.,  
в окончательном варианте — 20/II 2017 г.*