



**НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ АНИЗОТРОПНОГО МАССИВА ПОРОД
В ОКРЕСТНОСТИ ВЫРАБОТКИ НЕКРУГОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ**

П. В. Деев, К. С. Бабков

*Тульский государственный университет, E-mail: dodysya@yandex.ru, sb2763@yandex.ru,
просп. Ленина 92, г. Тула 300012, Россия*

Предложена методика оценки напряженного состояния анизотропного массива пород в окрестности выработки произвольного поперечного сечения. Методика основана на новом решении плоской задачи анизотропной теории упругости, полученном с использованием комплексных потенциалов С. Г. Лехницкого. Для ряда анизотропных пород установлены зависимости максимальных напряжений на контуре поперечного сечения сводчатой выработки от угла наклона плоскости изотропии. Выполнено сравнение распределения напряжений вокруг выработок, пройденных в изотропном и анизотропном массивах пород.

Массив пород, анизотропия, выработка, напряженное состояние, теория упругости

**STRESS STATE OF ANISOTROPIC ROCK MASS AROUND EXCAVATION
OF NON-CIRCULAR CROSS SECTION**

P. V. Deev and K. S. Babkov

*Tula State University, E-mail: dodysya@yandex.ru, sb2763@yandex.ru,
pr. Lenina 92, Tula 300012, Russia*

A method estimating the stress state of anisotropic rock mass around an excavation of an arbitrary cross section is proposed. The technique is based on a new solution of the plane problem of anisotropic elasticity theory obtained using Lekhnitsky complex potentials. For a number of anisotropic rocks, the dependences of maximum compressive and tensile stresses in rock mass around the arched excavation on the inclination angle of an isotropic plane have been found. Comparison of stress distribution around excavations driven in isotropic and anisotropic rock masses is performed.

Rock mass, anisotropy, excavation, stress state, theory of elasticity

Практически все массивы горных пород в той или иной степени являются анизотропными. Особенности ориентации минеральных частиц, наличие систем трещин и плоскостей ослабления приводят к зависимости деформационных свойства массива от направления. Деформационная анизотропия оказывает влияние на напряженное состояние массива пород в окрестности выработок, и, следовательно, влияет на их устойчивость, а также на величину и распределение нагрузки на крепь. Для оценки напряженного состояния анизотропного массива пород в окрестности выработок, помимо методов численного моделирования, может использоваться математическая теория упругости анизотропного тела, предложенная С. Г. Лехницким [1] и получившая дальнейшее развитие в работах [2, 3].

При решении плоской задачи анизотропной теории упругости необходимо отыскать решение дифференциального уравнения четвертого порядка относительно функции напряжений $F(x, y)$, характеризующей напряженное состояние тела. Для решения уравнения используются

две комплексные функции (комплексных потенциала), которые, в отличие от теории изотропного тела [4], определены не в рассматриваемой комплексной области $z_0 = x + iy$, а в двух вспомогательных областях, связанных с областью переменного z_0 аффинными преобразованиями.

Определение напряженного состояния областей, ограниченных окружностями или эллипсами, не вызывает существенных затруднений и широко распространено при оценке устойчивости скважин [5, 6] и расчете обделок тоннелей кругового сечения, расположенных в анизотропном массиве [7, 8]. Задачи о напряженном состоянии анизотропных тел, ограниченных кривыми высших порядков, являются более сложными [2, 3], что затрудняет их использование при решении практических задач горного дела и подземного строительства.

В настоящей работе предложено новое решение плоской задачи анизотропной теории упругости, которое обладает рядом преимуществ перед существующим и может применяться для определения напряженного состояния анизотропного массива пород в окрестности выработки произвольного поперечного сечения.

Постановка и решение задачи теории упругости. Рассматривается плоская задача анизотропной теории упругости, схема которой представлена на рис. 1. В качестве модели массива пород используется трансверсально-изотропная среда, деформационные свойства которой характеризуются параметрами $E_{0,1}$, $E_{0,2}$, $G_{0,2}$, $\nu_{0,1}$, $\nu_{0,2}$. Плоскость изотропии перпендикулярна плоскости чертежа и наклонена к плоскости симметрии выработки под углом α . В среде S имеется начальное поле напряжений, характеризуемое величинами N , ξ , β . Выработка моделируется отверстием L_0 , контур которого свободен от внешних сил.

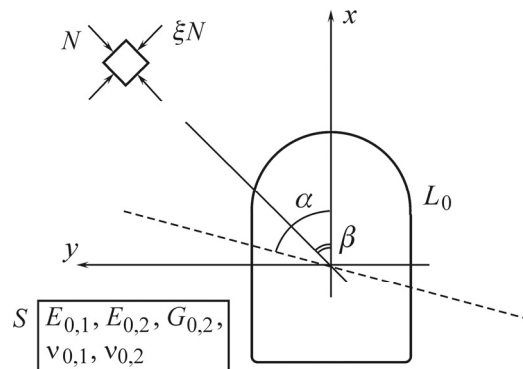


Рис. 1. Схема к определению напряженного состояния анизотропного массива пород в окрестности выработки произвольного поперечного сечения

Согласно методу С. Г. Лехницкого [1] для определения напряженно-деформированного состояния среды S необходимо найти комплексные функции $\Phi_j(z_j)$ ($j = 1, 2$), вводимые в областях, связанных с исходной областью комплексного переменного z_0 соотношениями

$$z_j = \text{Re } z_0 + \mu_j \text{Im } z_0, \quad (1)$$

где μ_j — параметры анизотропии, вычисляемые через деформационные характеристики среды S .

Искомые функции $\Phi_j(t_j)$ должны удовлетворять краевым условиям на контуре L_0 :

$$2 \text{Re}[\mu_1 \Phi_1(t_1) + \mu_2 \Phi_2(t_2)] = \int_0^{t_0} X_n^{(0)} dt_0; \quad 2 \text{Re}[\Phi_1(t_1) + \Phi_2(t_2)] = - \int_0^{t_0} Y_n^{(0)} dt_0, \quad (2)$$

где $X_n^{(0)}$, $Y_n^{(0)}$ — проекции усилия, приложенного к элементу контура L_0 ; t_0 — аффикс точки контура L_0 ; t_j — аффиксы контуров L_j , полученных из контура L_0 с помощью преобразований (1).

С использованием функций вида

$$z_m = \omega_m(\zeta_m) = \sum_{k=0}^{n+1} b_{m,k} \zeta_m^{1-k} \quad (m = 0, 1, 2), \quad (3)$$

осуществляющих конформное отображение внешности единичной окружности на внешность контуров L_m , поставим в соответствие каждой из рассматриваемых областей z_m некоторую область ζ_m . Коэффициенты рядов (3) $b_{m,k}$ могут быть определены любым из известных методов.

Преобразования (3) позволяют вместо комплексных потенциалов $\Phi_j(z_j)$ отыскивать некоторые функции $\Phi_j^*(\zeta_j)$, значения которых в соответствующих точках отображаемых областей равны значениям искомым функций. Тогда, используя подход, предложенный в работе [3], можно получить следующие выражения для искомым функций ($j, k = 1, 2; k \neq j$):

$$\Phi_j^*(\zeta_j) = \frac{1}{\mu_j - \mu_k} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j}^{\iota_0} \frac{(X_n^{(0)} + \mu_k Y_n^{(0)}) ds}{\sigma_j - \zeta_j} d\sigma_j - \frac{(\overline{\mu_k} - \mu_k)}{\mu_j - \mu_k} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j}^{\overline{\sigma_k}} \frac{\Phi_k^*(\sigma_k)}{\sigma_j - \zeta_j} d\sigma_j, \quad (4)$$

где $\sigma_j = e^{i\theta_j}$ ($\sigma_k = e^{i\theta_k}$) — аффиксы точек единичных окружностей γ_j (γ_k) в областях ζ_j (ζ_k).

Для определения потенциалов $\Phi_j^*(\zeta_j)$ необходимо представить подынтегральные выражения в формулах (4) в виде некоторых функций переменной интегрирования σ_j . Для этого, следуя работе [4], представим интеграл, стоящий в числителе первой дроби формулы (4), в виде некоторой функции переменной σ_0 . Затем с помощью преобразований (1) численно установим соответствие некоторого достаточно большого числа точек единичных окружностей σ_m ($m = 0, 1, 2$), принадлежащих областям ζ_m и, используя установленное соответствие, представим указанный интеграл в виде ряда по степеням переменного σ_j :

$$\int_0^s (X_n^{(0)} + \mu_k Y_n^{(0)}) ds = \sum_{s=-N}^N a_s^{(j)} \sigma_j^s, \quad (5)$$

где $a_s^{(j)}$ — коэффициенты, рассчитываемые с помощью метода наименьших квадратов.

После представления подынтегрального выражения в виде ряда (5) можно вычислить первое слагаемое в формуле (4), что позволит определить потенциалы С. Г. Лехницкого в первом приближении. Для уточнения искомым потенциалов каждая из функций $\Phi_k^*(\sigma_k)$ представляется в виде ряда по степеням переменного σ_j , при этом коэффициенты ряда определяются численно. Это дает возможность взять второй интеграл типа Коши в формуле (4).

Поскольку искомые потенциалы С. Г. Лехницкого $\Phi_j^*(\zeta_j)$ являются функциями, регулярными вне единичной окружности, они могут быть представлены в виде рядов по отрицательным степеням соответствующих комплексных переменных. Коэффициенты рядов определяются итерационно, при этом в каждом приближении каждый из потенциалов $\Phi_j^*(\sigma_j)$ ($j = 1, 2$) вычисляется через другой потенциал $\Phi_k^*(\sigma_k)$ ($k = 1, 2; k \neq j$), найденный на предыдущей итерации. Правильность решения подтверждается высокой точностью удовлетворения граничных условий и хорошим согласованием с данными, полученными другим методом в работе [3].

Пример расчета. В качестве иллюстрации возможностей предлагаемой методики приводятся результаты определения напряжений на контуре сводчатой выработки. Деформационные характеристики анизотропных пород, используемые в расчетах, указаны в таблице.

В соответствии с расчетной схемой (рис. 1) полагается, что плоскость изотропии проходит параллельно продольной оси выработки. Теория упругости анизотропного тела [1] позволяет рассматривать и другие случаи, однако при принятом положении плоскости изотропии влияние анизотропии пород на напряженное состояние массива является максимальным.

Деформационные характеристики анизотропных горных пород

Номер	Порода	$E_{0,1}$, МПа	$E_{0,2}$, МПа	$G_{0,2}$, МПа	$\nu_{0,1}$	$\nu_{0,2}$
1	Алевролит анизотропный	10000	5000	1200	0,40	0,20
2	Алевролит трещиноватый	10740	2140	560	0,41	0,10
3	Сланец	68400	19200	12100	0,19	0,13
4	Песчаник	15200	9000	4900	0,21	0,14

Рассматривается выработка, форма поперечного сечения которой приведена на рис. 2а. С помощью предложенной методики получено распределение нормальных тангенциальных напряжений на контуре выработки, пройденной в массиве анизотропного алевролита при разном положении плоскости изотропии и разных параметрах начального поля напряжений (рис. 2б–д). Пунктирной линией показаны напряжения, соответствующие случаю, когда выработка пройдена в изотропном массиве, значения напряжений даны в скобках.

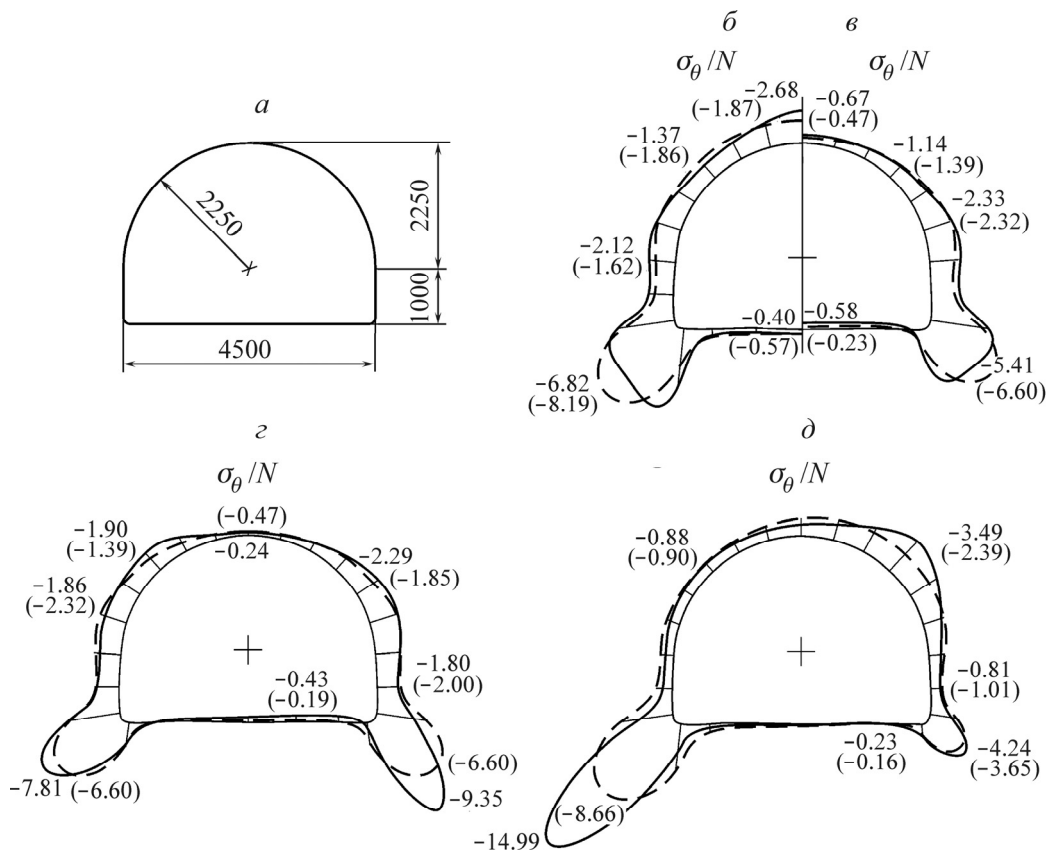


Рис. 2. Эпюры напряжений на контуре поперечного сечения выработки (а), полученные при следующих исходных данных: б — $\alpha = 90^\circ$, $\xi = 1.0$; в — $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 0$, $\xi = 0.5$; г — $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 0$, $\xi = 0.5$; д — $\alpha = -45^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\xi = 0.5$

Выполненные расчеты показали, что положение плоскости изотропии оказывает существенное влияние на величину и распределение напряжений на контуре поперечного сечения выработки. В случае, когда плоскость изотропии расположена горизонтально (рис. 2б, в), максимальные сжимающие напряжения, которые возникают в угловых точках контура, не превышают аналогичных напряжений, соответствующих случаю изотропного массива пород. При наклонной плоскости изотропии (рис. 2г, д) максимальные сжимающие напряжения, которые появляются в анизотропном массиве пород, значительно выше аналогичных напряжений в изотропном массиве.

С целью исследования влияния положения плоскости изотропии на напряженное состояние массива получены зависимости максимальных сжимающих и растягивающих напряжений на контуре выработки от угла α (рис. 3). Параметры начальных напряжений принимались равными $\beta = 0$, $\xi = 0.5$. Зависимости обозначены цифрами, соответствующими номеру породы в таблице, значение максимального сжимающего напряжения на контуре выработки в изотропном массиве показано пунктирной прямой.

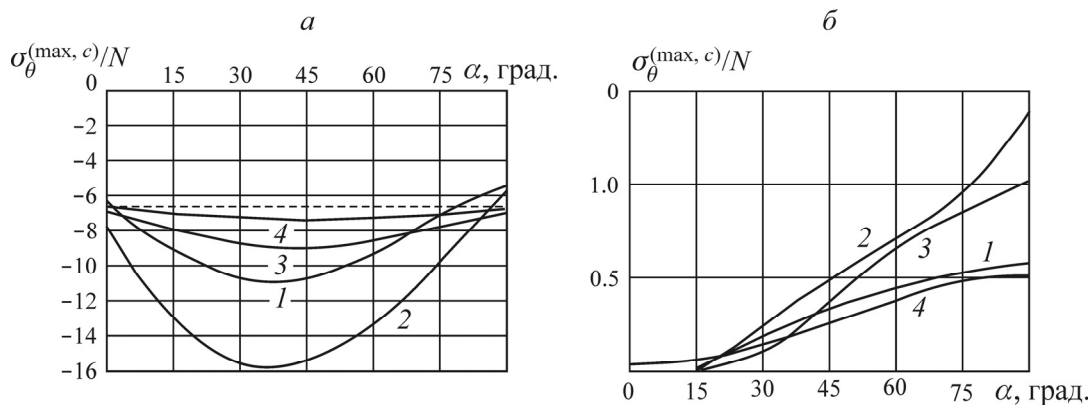


Рис. 3. Зависимости максимальных сжимающих (а) и растягивающих (б) напряжений на контуре выработки от положения плоскости изотропии

Видно, что анизотропия горных пород приводит к появлению растягивающих напряжений и в большинстве рассмотренных случаев — к увеличению максимальных сжимающих напряжений на контуре поперечного сечения выработки. Зависимости максимальных сжимающих напряжений от угла наклона плоскости изотропии к вертикали (рис. 3а) имеют максимумы при $\alpha = 35 - 45^\circ$. Максимальные растягивающие напряжения на контуре выработки с увеличением угла α монотонно возрастают (рис. 3б).

Для оценки устойчивости горной выработки недостаточно знать распределение напряжений на ее поверхности [9]. К сожалению, в большинстве работ, посвященных вопросам оценки напряженного состояния анизотропных сред с отверстиями, распределение напряжений в самой среде не приводится. Для определения напряжений в точках массива пород, не лежащих на контуре выработки, необходимо установить соответствие между точками областей ζ_m ($m = 0, 1, 2$), которые связаны с исходной областью z_0 и вспомогательными областями z_1, z_2 отображающими функциями (3). В данной работе для каждой рассматриваемой точки исходной области эта задача решается численно с помощью метода Ньютона.

В результате расчетов получено распределение нормальных и касательных напряжений в окрестности выработки, пройденной в анизотропном алевролите, при следующих исходных данных: $\beta = 0$, $\xi = 0.5$, $\alpha = 60^\circ$ (рис 4а). Для сравнения на рис. 4б показаны изолинии напряжений в окрестности выработки, пройденной в изотропном массиве пород.

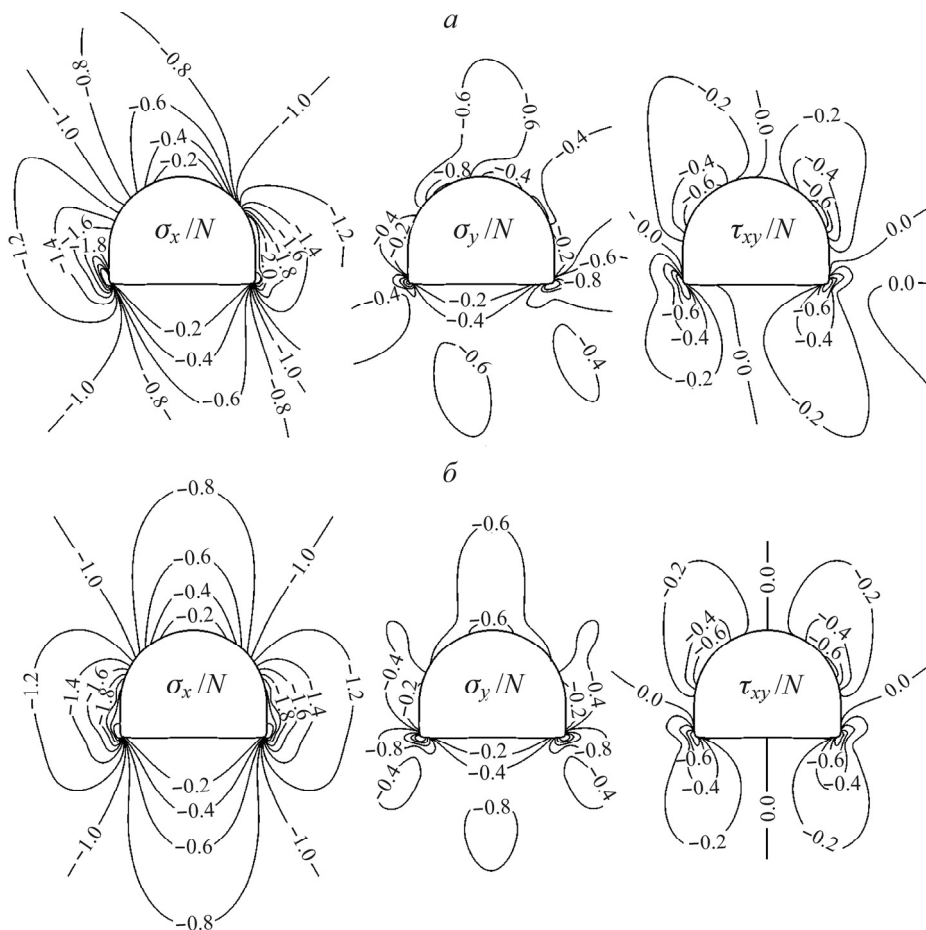


Рис. 4. Изолинии напряжений в окрестности выработок, пройденных в массиве анизотропных (а) и изотропных (б) пород

Из сравнения изолиний напряжений, представленных на рис. 4а, б, видно, что напряженное состояние анизотропного и изотропного массивов пород в окрестности одинаковых выработок существенно отличается. Таким образом, использование изотропной модели при оценке напряженного состояния массива, обладающего выраженной анизотропией, может привести к значительной погрешности получаемых результатов.

ВЫВОДЫ

Получено новое решение плоской задачи теории упругости о напряженном состоянии трансверсально-изотропной среды, ослабленной отверстием произвольной формы. Решение может быть использовано для определения напряжений в окрестности горных выработок, пройденных в анизотропных породах.

Анизотропия пород оказывает существенное влияние на распределение напряжений в горном массиве и должна учитываться при решении практических задач геомеханики. Величина максимальных напряжений, возникающих в массиве в окрестности выработки, зависит не только от деформационных характеристик анизотропных пород, но и от положения плоскости изотропии. Установлено, что максимальным сжимающим напряжениям на контуре сводчатой выработки соответствует угол наклона плоскости изотропии к вертикали $\alpha = 35 - 45^\circ$, а максимальным растягивающим напряжениям — горизонтальное положение плоскости изотропии ($\alpha = 90^\circ$). В целом в большинстве рассмотренных случаев анизотропия пород приводит к росту напряжений в окрестности горных выработок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. **Lehknitskii S. G., Tsai S.W., and Cheron T.** Anisotropic plates, New York, London, Paris, Montreux, Tokyo, Melbourne, Gordon and Breach, 1968, 534 pp.
2. **Savin G. N.** Stress concentration around holes. Oxford, London, New York, Pergamon Press, 1961, 430 pp.
3. **Kosmodamiansky A. S.** Stress state of anisotropic media with holes or cavities, Kiev, Donetsk, Vishcha shkola, 1976, 200 pp. [**Космодамианский А. С.** Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. — Киев, Донецк: Вища школа, 1976. — 200 с.]
4. **Muskhelishvili N. I.** Some basic problems of the mathematical theory of elasticity, Netherlands, Springer, 1977, 732 pp.
5. **Ashikhmin S., Kashnikov A., Shustov D., and Kukhtinsky A.** Influence of anisotropy of elastic and strength properties of rocks on the stability of directional wells, Oil industry, 2018, no. 2, pp. 54–57. [**Ашихмин С. Г.** Влияние анизотропии упругих и прочностных свойств пород на устойчивость ствола наклонно-направленных скважин // Нефтяное хозяйство. — 2018. — № 2. — С. 54–57.]
6. **Jiao Y., Fan M., Li L., and Cai Z.** The effect of anisotropic of medium on the stress state around a borehole, Advanced material research 2011, vols. 291–294, Transtech publication Switzerland, pp. 2139–2144.
7. **Fotieva N. N., Kireeva G. B., and Zalesskiy K. E.** Design of multilayer lining of tunnels in rock mass modeled by transversely isotropic medium, Proc. of XI Russian conf. on rock mechanics, St. Petersburg, 1997, pp. 473–478. [**Фотиева Н. Н., Киреева Г. Б., Залесский К. Е.** Расчет многослойных обделок тоннелей в массиве пород, моделируемом трансверсально-изотропной средой // Труды XI Рос. конф. по механике горных пород. — СПб., 1997. — С. 473–478.]
8. **Bobet A. and Yu H.** Full stress and displacement fields for steel-lined deep pressure tunnels in transversely anisotropic rock, Tunnelling and underground space technology, 2016, vol. 56, pp. 125–135.
9. **Bulychev N. S.** Mechanics of underground structures. Moscow, Nedra, 1994, 382 pp. [**Булычев Н. С.** Механика подземных сооружений: учебник для вузов. — М.: Недра, 1994. — 382 с.]