ПМТФ, № 6, 1969

О ГИДРОДИНАМИКЕ ОДНОРОДНЫХ СУСПЕНЗИЙ

Ю. А. Буевич

(*Москва*)

Получена система динамических уравнений, определяющих среднее движение фаз монодисперсной суспензии, рассматриваемых как две взаимодействующие взаимопроникающие сплошные среды. Записаны соотношения, позволяющие определять средние величины и корреляционные функции, характеризующие локальную структуру движущейся суспензии.

Общие принципы построения физико-механической теории дисперсных систем на основе статистического анализа их внутренней структуры (хаотических скоростей частиц и жидкой фазы, пульсаций давления и концентрации суспензии) изложены в работе [1]. Применение развитой теории к исследованию структуры и механического поведения газовзвесей, когда вычисления значительно упрощаются за счет пренебрежения импульсом и вязкостью газа, позволило добиться удовлетворительного согласия с доступными экспериментальными данными и объяснить ряд важных наблюдаемых явлений. Газовзвеси характеризуются весьма высоким уровнем развития пульсационных («псевдотурбулентных») движений фаз, а их течения часто локально-неоднородны в том смысле, что в них образуются агрегаты, содержащие большое число частиц, пузыри, заполненные только газом, и т. п. [2].

Напротив, течения суспензий достаточно мелких частиц в капельных жидкостях обычно локально-однородны, причем скорости случайных пульсаций фаз относительно невелики. Однако в этом случае нельзя уже пренебрегать инерционными силами, возникающими при ускорении жидкости, и вязкими напряжениями в ней. Поэтому анализ таких суспензий несколько отличается от проведенного в [1,2]. В частности, необходимо более тщательное рассмотрение сил взаимодействия между двумя фазами, связанных с ускорением присоединенных масс жидкости при относительном движении частиц, и вызываемое этим некоторое уточнение полученных ранее динамических и стохастических уравнений. Такое уточнение и проведено в этой работе; при этом логическая схема работ [1, 2] полностью сохраняется.

1. Динамические уравнения. В соответствии с методом [1] представим скорость некоторой частицы $\mathbf{w}$, скорость жидкой фазы в ее удельном объеме $\mathbf{v}$ и локальные значения объемной концентрации суспензии ρ и давления p в виде

$$\langle \mathbf{v}' \rangle = \langle \mathbf{w}' \rangle = \langle \rho' \rangle = \langle p' \rangle = 0$$

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{v} \rangle + \mathbf{v}', \qquad \mathbf{w} = \langle \mathbf{w} \rangle + \mathbf{w}', \qquad \rho = \langle \rho \rangle + \rho', \qquad p = \langle p \rangle + p' \quad (1.1)$$

Здесь первые члены в правых частях представляют собой усредненные по ансамблю значения соответствующих величин (динамические переменные), а вторые — их случайные пульсации (псевдотурбулентные переменные). Усреднение по ансамблю в (1.1) можно представить как последовательное усреднение по введенным в [1] условным распределениям $f(p;\, t,\, \mathbf{r} \mid \rho,\, \mathbf{v},\, \mathbf{w})$, $f(\rho;\, t,\, \mathbf{r} \mid \mathbf{v},\, \mathbf{w})$, $f(\mathbf{v};\, t,\, \mathbf{r} \mid \mathbf{w})$, нормированным на единицу, и далее, по распределению частиц по скоростям $f(\mathbf{w};\, t,\, \mathbf{r})$, которое удобно считать нормированным на счетную концентрацию частиц $n(t,\mathbf{r})$. Если произвести усреднение только по условным распределениям (отмечаемое ниже градусом сверху), то можно записать

$$\begin{gathered} \mathbf{v}^\circ = \langle \mathbf{v} \rangle + \mathbf{v}'', \quad \mathbf{w}^\circ = \langle \mathbf{w} \rangle + \mathbf{w}'', \quad \rho^\circ = \langle \rho \rangle + \rho'', \quad p^\circ = \langle p \rangle + p'' \\ \langle \mathbf{v}'' \rangle_f = \langle \mathbf{w}'' \rangle_f = \langle \rho'' \rangle_f = \langle p'' \rangle_f = 0, \qquad \mathbf{w}'' \equiv \mathbf{w}'^\circ \end{gathered} \quad (1.2)$$

где $\langle\ \rangle_f$ означает усреднение по распределению $f(\mathbf{w};\ t,\ \mathbf{r})$. Для последних членов в правых частях (1.2) примем

$$\mathbf{v}'' = \mathbf{s}_v\mathbf{w}', \quad \mathbf{w}'' = \mathbf{I}\mathbf{w}', \quad \rho'' = \mathbf{s}_\rho\mathbf{w}', \quad p'' = \mathbf{s}_p\mathbf{w}', \quad \mathbf{I} = \|\delta_{ij}\| \qquad (1.3)$$

Здесь $\mathbf{s}_v$, $\mathbf{s}_\rho$ и $\mathbf{s}_p$ — некоторые неизвестные тензор и векторы, которые могут, конечно, зависеть от динамических переменных. Отметим, что предположения (1.3) несущественны для формулировки динамических и стохастических уравнений, но важны при определении функции $f(\mathbf{w};t,\mathbf{r})$. Отметим, что аналогичные соотношения можно записать и для других случайных величин с двумя штрихами.

Чтобы получить динамические уравнения, определяющие среднее движение диспергированной фазы, нужно располагать кинетическим уравнением для унарной функции распределения f $(\mathbf{w};\ t,\ \mathbf{r})$. Как отмечено в [1], такое уравнение в обычном смысле (не содержащее высших многочастичных функций распределения) не существует даже для частиц, взвешенных в газе. Поэтому в [1] использовалось приближенное уравнение, в котором полная сила $\mathbf{F}_p$, действующая на частицу, заменялась фактически ее средним значением. Здесь также используем величину $\mathbf{F}_p{}^\circ$, полученную усреднением по условным распределениям, имея в виду получить уравнение для f $(\mathbf{w};\ t,\ \mathbf{r})$, играющее роль кинетического уравнения «в среднем».

Предположим сначала, что прямые столкновения в системе взвешенных частиц отсутствуют, и введем вероятность $W(\Delta\mathbf{r},\ \Delta\mathbf{w},\ \Delta t \mid \mathbf{r}_0,\ \mathbf{w}_0, t_0)$ перехода частицы из элемента фазового обема $(\mathbf{r}_0,\ \mathbf{r}_0 + d\mathbf{r};\ \mathbf{w}_0,\ \mathbf{w}_0 + d\mathbf{w})$, в котором она находилась в момент t_0, в элемент $(\mathbf{r},\ \mathbf{r} + d\mathbf{r};\ \mathbf{w},\ \mathbf{w} + d\mathbf{w})$ за время Δt, причем

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}, \qquad \mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + \Delta\mathbf{w}, \qquad t = t_0 + \Delta t$$

Ясно, что $f(\mathbf{w};\ t,\ \mathbf{r})$ может быть записана в виде интеграла

$$f(\mathbf{w};\ t,\ \mathbf{r}) = \iint W(\Delta\mathbf{r},\ \Delta\mathbf{w},\ \Delta t \mid \mathbf{r}_0,\ \mathbf{w}_0,\ t_0)\, f(\mathbf{w}_0;\ t_0,\ \mathbf{r}_0)\, d\mathbf{r}_0\, d\mathbf{w}_0$$

Обычным методом [3] получим отсюда уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\left(\frac{f\{\Delta\mathbf{r}\}}{\Delta t}\right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}}\left(\frac{f\{\Delta\mathbf{w}\}}{\Delta t}\right) - \frac{1}{2\Delta t}\left[\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} * \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) : \{\Delta\mathbf{r}*\Delta\mathbf{r}\} f + \right.$$

$$\left. + 2\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} * \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}}\right) : \{\Delta\mathbf{w}*\Delta\mathbf{r}\} f + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} * \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}}\right) : \{\Delta\mathbf{w}*\Delta\mathbf{w}\} f\right] \qquad (1.4)$$

$$\mathbf{a}*\mathbf{b} = \|a_i b_j\|, \qquad \mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij}B_{ji}$$

где символ $\{\}$ обозначает усреднение по вероятности перехода, например

$$\{\Delta\mathbf{r}\} = \iint \Delta\mathbf{r}\, W(\Delta\mathbf{r},\ \Delta\mathbf{w},\ \Delta t \mid \mathbf{r},\ \mathbf{w},\ t_0)\, d\mathbf{r}_0\, d\mathbf{w}_0$$

Рассмотрим (1.4) в частных случаях. Для газа упругих частиц вероятность перехода представляет собой δ-функцию, и с точностью до $O((\Delta t^2))$ имеем

$$\{\Delta\mathbf{r}\} = \Delta\mathbf{r} = \mathbf{w}\Delta t, \qquad \{\Delta\mathbf{w}\} = \Delta\mathbf{w} = (\mathbf{F}_p/m)\,\Delta t$$

где m — масса частицы, $\mathbf{F}_p$ не зависит от $\mathbf{w}$, а все остальные величины в фигурных скобках в (1.4) имеют порядок $(\Delta t)^2$. При малых Δt получаем из (1.4) уравнение Больцмана без столкновительного члена.

Для системы броуновских частиц имеем с прежней точностью

$$\{\Delta\mathbf{r}\} = \mathbf{w}\Delta t, \qquad \{\Delta\mathbf{w}\} = (\mathbf{F}_p/m)\,\Delta t = -\alpha\mathbf{w}\Delta t, \qquad \{\Delta\mathbf{w}*\Delta\mathbf{w}\} \sim \mathbf{A}\Delta t$$

где $\mathbf{A}$ — некоторый («диффузионный») тензор. Используя эти соотношения, приходим к уравнению Фоккера — Планка.

Как следует из экспериментов [4], в рассматриваемой системе имеются как крупномасштабные пульсации, так и мелкомасштабные «дрожания» частиц и жидкости в пределах их удельных объемов, причем эти компоненты псевдотурбулентности можно считать статистически независимыми. Характерное время этих компонент совпадает соответственно с «внешним» T и «внутренним» τ временными масштабами псевдотурбулентности (см. [1,2] и некоторые ссылки в этих работах), причем $T \gg \tau$. Выбирая Δt в (1.4) так, что $\tau \ll \Delta t \ll T$, видим, что получающееся уравнение будет содержать в общем случае члены, типичные как для уравнения Больцмана, так и для уравнения Фоккера — Планка.

В частности, в нем появляется член, описывающий диффузию в пространстве скоростей. Впервые, по-видимому, кинетическое уравнение для взвешенных частиц, учитывающее диффузию в пространстве скоростей, исследовалось в работах Хотона [5] и В. Г. Левича и В. П. Мясникова [6]. Последний член не влияет на уравнения сохранения массы и импульса диспергированной фазы, в связи с чем он не вводился в [1]. Здесь, имея в виду некоторые дальнейшие приложения, этот член учитываем.

Переходя обычным образом от набора независимых переменных t, $\mathbf{r}$, $\mathbf{w}$ к набору t, $\mathbf{r}$, $\mathbf{w}' = \mathbf{w} - \langle \mathbf{w} \rangle$ и вводя столкновительный член, получаем из (1.4) следующее кинетическое уравнение [7]:

$$\frac{Df}{Dt} + \mathbf{w}' \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}'}\left[\left(\frac{\mathbf{F}_p^\circ}{m} - \frac{D\langle \mathbf{w}\rangle}{Dt}\right) f\right] - \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}'} * \mathbf{w}'\right) : \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} * \langle \mathbf{w}\rangle\right) =$$
$$= \frac{1}{m}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}'} * \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}'}\right) : (\mathbf{A} f) + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c, \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \langle \mathbf{w}\rangle \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \tag{1.5}$$

Последний член в (1.5) описывает изменение $f(\mathbf{w};\ t,\ \mathbf{r})$ за счет прямых столкновений между частицами. Если мелкомасштабные движения изотропны (некоторые свидетельства в пользу такой гипотезы содержатся в [4]), то $\mathbf{A} = A\mathbf{I}$.

Если столкновения не приводят к изменению полных массы и импульса сталкивающихся частиц, то при помощи стандартных приемов [7] получим следующие уравнения сохранения:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \langle\rho\rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(\langle\rho\rangle \langle \mathbf{w}\rangle) = \frac{D\langle\rho\rangle}{Dt} + \langle\rho\rangle \frac{\partial \langle \mathbf{w}\rangle}{\partial \mathbf{r}} = 0 \\
d_2 \langle\rho\rangle \frac{D\langle \mathbf{w}\rangle}{Dt} = -\frac{\partial \mathbf{P}^{(p)}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\langle\rho\rangle}{\sigma_0}\langle \mathbf{F}_p\rangle, \quad \mathbf{P}^{(p)} = d_2 \langle\rho\rangle \langle \mathbf{w}' * \mathbf{w}'\rangle
\end{gathered} \tag{1.6}$$

Здесь d_2 — плотность материала частиц, а $\mathbf{P}^{(p)}$ — тензор внутренних напряжений в диспергированной фазе. Выражение (1.6) для $\mathbf{P}^{(p)}$ получено в пренебрежении мгновенностью переноса импульса внутри самих частиц. Учет этого эффекта, играющего значительную роль в концентрированных системах, приводит к следующему выражению $\mathbf{P}^{(p)}$:

$$\mathbf{P}^{(p)} \approx \varphi d_2 \langle\rho\rangle \langle \mathbf{w}' * \mathbf{w}'\rangle, \quad \varphi = [1 - (\langle\rho\rangle / \rho_*)^{1/3}]^{-1} \tag{1.7}$$

Здесь ρ_* — объемная концентрация суспензии в состоянии плотной упаковки.

Рассмотрим теперь силы, действующие на частицу. Со стороны внешнего массового поля на частицу действует сила $m\mathbf{g}$, где $\mathbf{g}$ — ускорение этого поля. Силу взаимодействия частицы с окружающей жидкостью представим в форме [1,8]

$$\mathbf{F}_i = -\sigma_0 \frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}} + \varkappa m\left[\beta K(\rho)\mathbf{u} + \xi(\rho)\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \gamma \int\limits_{-\infty}^{t} \eta(\rho) \frac{d\mathbf{u}}{dt}\bigg|_{t=t'} \frac{dt'}{\sqrt{t-t'}}\right] \tag{1.8}$$

$$\sigma_0 = \frac{4}{3}\pi a^3, \quad \beta = \frac{9\nu_0}{2a^2}, \quad \gamma = \frac{9}{2a}\left(\frac{\nu_0}{\pi}\right)^{1/2}, \quad \nu_0 = \frac{\mu_0}{d_1}, \quad \varkappa = \frac{d_1}{d_2}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$$

Дифференцирование по времени производится здесь вдоль траектории частицы, a — радиус частицы, μ_0 и d_1 — вязкость и плотность жидкости, а K, ξ и η — некоторые функции ρ, конкретная форма которых несущественна для целей этой работы. Для изолированной стоксовой частицы имеем

$$K = 1, \quad \xi = 1/2, \quad \eta = 1$$

В (1.8) не учитывается поперечная сила, действующая даже на стоксову частицу в сдвиговом потоке [9], и возможное вращение частиц. Кроме того, сила вязкого межфазового взаимодействия считается линейной по относительной скорости $\mathbf{u}$. Эти приближения вполне оправданы при достаточно малых числах Рейнольдса для обтекания частиц, характерных для рассматриваемых здесь суспензий.

С точностью до членов второго порядка по псевдотурбулентным переменным получим из (1.8) соотношения

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{F}_i\rangle \approx &-\sigma_0\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial\mathbf{r}}+\varkappa m\Big\{\beta\Big[K\langle\mathbf{u}\rangle+\frac{dK}{d\langle\rho\rangle}\langle\rho'\mathbf{u}'\rangle+\frac{1}{2}\frac{d^2K}{d\langle\rho\rangle^2}\langle\mathbf{u}\rangle\langle\rho'^2\rangle\Big]+\\ &+\xi\frac{D\langle\mathbf{u}\rangle}{Dt}+\frac{d\xi}{d\langle\rho\rangle}\Big\langle\rho'\Big(\frac{d\mathbf{u}'}{dt}+\Big(\mathbf{w}'\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\Big)\langle\mathbf{u}\rangle\Big)\Big\rangle+\frac{1}{2}\frac{d^2\xi}{d\langle\rho\rangle^2}\frac{D\langle\mathbf{u}\rangle}{Dt}\langle\rho'^2\rangle+\\ &+\gamma\int\limits_{-\infty}^{t}\Big[\eta\frac{D\langle\mathbf{u}\rangle}{Dt}+\frac{d\eta}{d\langle\rho\rangle}\Big\langle\rho'\Big(\frac{d\mathbf{u}'}{dt}+\Big(\mathbf{w}'\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\Big)\langle\mathbf{u}\rangle\Big)\Big\rangle+\\ &+\frac{1}{2}\frac{d^2\eta}{d\langle\rho\rangle^2}\frac{D\langle\mathbf{u}\rangle}{Dt}\langle\rho'^2\rangle\Big]_{t=t'}\frac{dt'}{\sqrt{t-t'}}\Big\}\end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_i'\approx &-\sigma_0\frac{\partial p'}{\partial\mathbf{r}}+\varkappa m\Big\{\beta\Big(K\mathbf{u}'+\frac{dK}{d\langle\rho\rangle}\langle\mathbf{u}\rangle\rho'\Big)+\xi\Big[\frac{d\mathbf{u}'}{dt}+\Big(\mathbf{w}'\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\Big)\langle\mathbf{u}\rangle\Big]+\\ &+\frac{d\xi}{d\langle\rho\rangle}\frac{D\langle\mathbf{u}\rangle}{Dt}\rho'+\gamma\int\limits_{-\infty}^{t}\Big[\eta\Big(\frac{d\mathbf{u}'}{dt}+\Big(\mathbf{w}'\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\Big)\langle\mathbf{u}\rangle\Big)+\frac{d\eta}{d\langle\rho\rangle}\frac{D\langle\mathbf{u}\rangle}{Dt}\rho'\Big]_{t=t'}\frac{dt'}{\sqrt{t-t'}}\Big\}\end{aligned}$$

$$K\equiv K(\langle\rho\rangle),\quad \xi\equiv\xi(\langle\rho\rangle),\quad \eta\equiv\eta(\langle\rho\rangle)$$

Дополнительно в выражение для $\mathbf{F}_i'$ должна входить сумма членов вида $a'b'-\langle a'b'\rangle$, где a', b' — произвольные псевдотурбулентные переменные. Однако здесь и ниже в стохастических уравнениях используются фактически величины, полученные усреднением по введенному выше промежутку времени $\Delta t\gg\tau$. Характерное время изменения указанных членов с нулевым средним есть τ, поэтому они выпадают при таком усреднении (см. также обсуждение в [1]).

Для входящего в (1.5) вектора $\mathbf{F}_i^\circ$ имеем представление

$$\mathbf{F}_i^\circ=\langle\mathbf{F}_i\rangle+\mathbf{F}_i'\{\mathbf{u}',\rho',p'\to\mathbf{s}_u\mathbf{w}',\ \mathbf{s}_\rho\mathbf{w}',\mathbf{s}_p\mathbf{w}'\},\qquad \mathbf{s}_u=\mathbf{s}_v-\mathbf{I} \tag{1.10}$$

Во втором члене в правой части (1.10) производится замена аргументов согласно (1.1) — (1.3).

При выводе (1.6) из (1.5) предполагается, что импульс сталкивающихся частиц инвариантен относительно столкновений. В действительности скорости обеих упругих частиц, участвующих в столкновении, скачкообразно изменяются в результате столкновения, что влечет за собой скачкообразное же ускорение присоединенных масс жидкости. Очевидно, что сила, обусловленная этими скачками, не учитывается в выражении (1.8). Для изолированной стоксовой частицы такая сила подсчитана в [10]; если скорость частицы меняется скачком на величину Δw в момент $t=0$, то

$$F_\delta=\varkappa m\Big(\frac{1}{2}\delta(t)+\frac{\gamma}{\sqrt{t}}\Big)\Delta w \tag{1.11}$$

Если среднее время между двумя последовательными скачками скорости частицы равно τ_c, то полная потеря ее импульса в результате одного скачка записывается в форме

$$\Delta M=\int\limits_{-0}^{\tau_c}F_\delta\,dt=\varkappa m\Big(\frac{1}{2}+2\gamma\sqrt{\tau_c}\Big) \tag{1.12}$$

Указанный эффект проще всего учесть, «размазывая» эту потерю импульса во времени, т. е. вводя в выражение для $\mathbf{F}_p$ дополнительную «диссипативную» силу $\mathbf{F}_d$. Сила $\mathbf{F}_d$ имеет в точности тот же смысл, что и, например, «диффузионная» сила, вводимая при анализе процессов диффузии методами термодинамики необратимых процессов. Для определения $\mathbf{F}_d$ оценим полную диссипацию энергии частицы в суспензии за счет мгновенного ускорения жидкой фазы при столкновениях. Рассматривая столкновение пары упругих частиц в системе координат, где одна из них покоится, а вторая движется с относительной скоростью $\mathbf{V}$, образующей угол ψ с линией центров в момент столкновения, видим, что скачок скорости подвижной частицы равен $2\,V\sin\psi$ [7]. Учитывая стесненность движения путем замены $^1/_2$ в (1.12) на коэффициент ξ, а γ — на $\gamma\eta$, имеем из (1.12)

$$\Delta M(V,\ \psi) = \chi m(\xi + 4\gamma\eta\sqrt{\tau_c})\,V\sin\psi \tag{1.13}$$

Отсюда получим также выражение для работы ΔA, произведенной над жидкостью в результате столкновения

$$\Delta A(V,\ \psi) = \varkappa m(\xi + 4\gamma\eta\sqrt{\tau_c})V^2\sin^2\psi \tag{1.14}$$

Удельную диссипацию энергии частиц в единицу времени W_d, обусловленную рассматриваемым явлением, получим после усреднения (1.14) по V и параметру столкновения ψ и умножения результата на $^1/_2\,N$ (где $N/n = \tau^{-1}{}_c$ — частота столкновений), т. е. имеем из (1.14)

$$W_d = \frac{N}{2}\left\langle 2\int_0^1 \Delta A\cos\psi\, d(\cos\psi)\right\rangle = \frac{c}{4}\varkappa m N\left(\xi + \frac{4\gamma\eta\sqrt{n}}{\sqrt{N}}\right)\langle w'^2\rangle \tag{1.15}$$

Здесь принято $\langle V^2\rangle = c\,\langle w'^2\rangle$. Представляя W_d в виде суммы по частицам в единице объема, имеем из (1.15)

$$W_d = -\sum_{j=1}^{n}\mathbf{F}_d^{(j)}\mathbf{w}'^{(j)},\qquad \mathbf{F}_d = -\varkappa m\zeta\mathbf{w}',\qquad \zeta = \frac{c}{4}\,\frac{N}{n}\left(\xi + 4\gamma\eta\sqrt{\frac{n}{N}}\right) \tag{1.16}$$

Введенные выше c и N можно оценить приближенно, используя соответствующие выражения, верные для плотного газа с изотропным распределением по скоростям [7]

$$c = 2,\qquad N = 16a^2n^2\left(\frac{\pi}{3}\langle w'^2\rangle\right)^{1/2}\chi,\qquad n = \frac{\langle\rho\rangle}{\sigma_0} \tag{1.17}$$

Здесь коэффициент χ показывает, во сколько раз увеличивается частота бинарных столкновений в системе частиц объема $\sigma_0 \neq 0$ по сравнению с системой точечных частиц. При малых и больших $\langle\rho\rangle$ получим, используя результаты Энскога [7,11] для плотного газа упругих сфер, следующие представления для χ:

$$\chi \approx \frac{1 - {}^{11}/_2\langle\rho\rangle}{1 - 8\langle\rho\rangle},\quad \langle\rho\rangle \ll \rho_*,\qquad \chi \approx \frac{1}{4\langle\rho\rangle^{2/3}(\rho_*^{1/3} - \langle\rho\rangle^{1/3})},\quad \langle\rho\rangle \sim \rho_* \tag{1.18}$$

Из (1.16) и (1.17) получим также оценку для ζ

$$\zeta \approx \left(\frac{3}{\pi}\langle w'^2\rangle\right)^{1/4}\left(\frac{\langle\rho\rangle\chi}{a}\right)^{1/2}\left[\xi\left(\frac{3}{\pi}\langle w'^2\rangle\right)^{1/4}\left(\frac{\langle\rho\rangle\chi}{a}\right)^{1/2} + 2\gamma\eta\right] \tag{1.19}$$

Заметим, что полученные здесь выражения можно считать верными лишь для локально-однородных дисперсных систем, когда допустимо рассматривать частицы независимо одна от другой. Однако локальная неоднородность характерна в основном для течений газовзвесей, когда в рамках использованного в [1, 2] приближения $\varkappa = 0$ (но $\beta\varkappa \neq 0$) силой $\mathbf{F}_d$ из (1.16) можно вообще пренебречь.

При выводе динамических уравнений для жидкой фазы записываем уравнения движения жидкости через решетку пульсирующих частиц в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\rho-(1-\rho)\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}}=0, \quad d_1(1-\rho)\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\mathbf{v}=-\frac{\partial p}{dr}+$$

$$+\frac{\partial(\mu\mathbf{e})}{\partial \mathbf{r}}+d_1(1-\langle\rho\rangle)\mathbf{g}-\frac{\langle\rho\rangle}{\sigma_0}\mathbf{F}_i, \quad \mathbf{e}=\left\|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right\| \tag{1.20}$$

$$\mu=\mu_0 S(\rho)$$

Здесь μ — эффективная вязкость жидкой фазы, протекающей через решетку частиц [1]. Вязкий член введен в (1.20) так, чтобы «сжимаемость» жидкой фазы, обусловленная изменениями концентрации суспензии, не влекла за собой какой-либо диссипации энергии. Член с вязкими напряжениями в (1.20) не умножается на $1-\rho$, так как по смыслу своего определения вязкость μ описывает напряжения, отнесенные к объему смеси, а не к объему одной только жидкости [10,12].

Усредняя уравнение (1.20), получаем, как и в [1], следующие динамические уравнения для жидкой фазы:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\langle\mathbf{v}\rangle\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\langle\rho\rangle-(1-\langle\rho\rangle)\frac{\partial\langle\mathbf{v}\rangle}{\partial \mathbf{r}}-\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{r}}=0, \quad \mathbf{q}=-\langle\rho'\mathbf{v}'\rangle$$

$$d_1\left[\frac{\partial}{\partial t}((1-\langle\rho\rangle)\langle\mathbf{v}\rangle)+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}((1-\langle\rho\rangle)\langle\mathbf{v}\rangle*\langle\mathbf{v}\rangle)+\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}\right]=$$

$$=-\frac{\partial \mathbf{P}^{(f)}}{\partial \mathbf{r}}-\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial \mathbf{r}}+\mu_0\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\left(S\langle\mathbf{e}\rangle+\frac{dS}{d\langle\rho\rangle}\langle\rho'\mathbf{e}'\rangle+\frac{1}{2}\frac{d^2S}{d\langle\rho\rangle^2}\langle\mathbf{e}\rangle\langle\rho'^2\rangle\right)+$$

$$+d_1(1-\langle\rho\rangle)\mathbf{g}-\langle\rho\rangle\frac{\langle\mathbf{F}_i\rangle}{\sigma_0}, \quad S\equiv S(\langle\rho\rangle) \tag{1.21}$$

$$\mathbf{P}^{(f)}=d_1[(1-\langle\rho\rangle)\langle\mathbf{v}'*\mathbf{v}'\rangle+\mathbf{q}*\langle\mathbf{v}\rangle+\langle\mathbf{v}\rangle*\mathbf{q}]$$

Обсуждение смысла различных членов в (1.21) содержится в [1].

Различные псевдотурбулентные средние, входящие в (1.6) и (1.21), должны быть, конечно, выражены через динамические переменные. Обычно для этой цели используют решения уравнений типа (1.5), однако в рассматриваемом случае этого сделать нельзя, ибо, во-первых, (1.5) не содержит информации относительно $\mathbf{v}'$, ρ', p', а во-вторых, оно зависит от неизвестного тензора $\mathbf{A}$. Поэтому здесь, как и в [1,2], для определения псевдотурбулентных характеристик используем корреляционную теорию стационарных случайных процессов.

2. **Стохастические уравнения.** Согласно методу [1] стохастические уравнения для псевдотурбулентных пульсаций получаются из уравнения движения некоторой частицы и уравнений (1.20) после вычитания из них соответствующих усредненных уравнений и усреднения результатов по промежутку времени $\Delta t > \tau$. При этом в [1] производные по времени вдоль траекторий частиц преобразовывались по формуле

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{w}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$$

хотя, например, $(\mathbf{w}\,\partial/\partial r)\,\mathbf{w}$ не имеет ясного физического смысла. Здесь выделяем в производных по времени различного типа именно производ-

---

[1] Функция $S(\rho)$ была подсчитана в [12] на основе ячеечной модели стесненного обтекания частиц. В. М. Сафрай, используя видоизмененные варианты этой модели, получил недавно также несколько иные представления для $S(\rho)$.

ную $d\,/\,dt$, например

$$\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}=\frac{d}{dt}+\mathbf{u}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$$

Из (1.20) получим тогда следующие стохастические уравнения:

$$\left(\frac{d}{dt}+\langle\mathbf{u}\rangle\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\rho'+\frac{\partial\langle\mathbf{v}\rangle}{\partial\mathbf{r}}\rho'-(1-\langle\rho\rangle)\frac{\partial\mathbf{v}'}{\partial\mathbf{r}}+\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial\mathbf{r}}\mathbf{u}'=0$$

$$d_1(1-\langle\rho\rangle)\left(\frac{d}{dt}+\langle\mathbf{u}\rangle\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\mathbf{v}'+d_1(1-\langle\rho\rangle)\left(\mathbf{u}'\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\langle\mathbf{v}\rangle- \qquad (2.1)$$

$$-d_1\rho'\left(\frac{\partial}{\partial t}+\langle\mathbf{v}\rangle\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\langle\mathbf{v}\rangle=-\frac{\partial p'}{\partial\mathbf{r}}+\mu_0\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\left(S\mathbf{e}'+\frac{dS}{d\langle\rho\rangle}\langle\mathbf{e}\rangle\rho'\right)-\frac{\langle\rho\rangle}{\sigma_0}\mathbf{F}_i'$$

Далее, уравнение движения частицы имеет вид

$$m\frac{d\mathbf{w}}{dt}=\mathbf{F}_i+\mathbf{F}_d+\mathbf{F}_c+m\mathbf{g}=\mathbf{F}_p \qquad (2.2)$$

где $\mathbf{F}_c$ — случайная сила, действующая при столкновении выделенной частицы с соседними и исчезающая при усреднении по Δt. Из (2.2) после простого преобразования получим еще одно стохастическое уравнение

$$m\frac{d\mathbf{w}'}{dt}=\mathbf{F}_i'+\mathbf{F}_d', \qquad \mathbf{F}_d'\equiv\mathbf{F}_d \qquad (2.3)$$

Таким образом, все случайные функции рассматриваются в системе координат, движущейся вместе с частицей. В нулевом приближении по производным от динамических величин подход в этой работе оказывается идентичным подходу в [1], где рассмотрение велось в системе координат, движущейся вместе со средним потоком диспергированной фазы.

Представим все случайные функции в виде интегралов Фурье — Стильтьеса, например

$$\rho'=\int e^{i(\omega t+\mathbf{kr})}dZ_\rho, \qquad \mathbf{v}'=\int e^{i(\omega t+\mathbf{kr})}d\mathbf{Z}_v \qquad (2.4)$$

Подставляя соотношения типа (2.4) в уравнения (2.1) и (2.3), получаем следующие уравнения для спектральных мер в интегралах Фурье — Стильтьеса:

$$\left[i(\omega+\langle\mathbf{u}\rangle\mathbf{k})+\frac{\partial\langle\mathbf{v}\rangle}{\partial\mathbf{r}}\right]dZ_\rho-i(1-\langle\rho\rangle)\mathbf{k}\,d\mathbf{Z}_v+\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial\mathbf{r}}(d\mathbf{Z}_v-d\mathbf{Z}_w)=0$$

$$d_1(1-\langle\rho\rangle)\left[i(\omega+\langle\mathbf{u}\rangle\mathbf{k})\,d\mathbf{Z}_v+\left((d\mathbf{Z}_v-d\mathbf{Z}_w)\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\langle\mathbf{v}\rangle\right]-$$

$$-d_1\left(\frac{\partial\langle\mathbf{v}\rangle}{\partial t}+\left(\langle\mathbf{v}\rangle\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\langle\mathbf{v}\rangle\right)dZ_\rho=-i\mathbf{k}\,dZ_p+$$

$$+\mu_0\left\{-S\left[k^2d\mathbf{Z}_v+\frac{1}{3}\mathbf{k}\,(\mathbf{k}d\mathbf{Z}_v)\right]+\frac{dS}{d\langle\rho\rangle}\left[\left(i\langle\mathbf{e}\rangle\mathbf{k}+\frac{\partial\langle\mathbf{e}\rangle}{\partial\mathbf{r}}\right)dZ_\rho+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\,i\left(\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial\mathbf{r}}\left(\mathbf{k}*d\mathbf{Z}_v+d\mathbf{Z}_v*\mathbf{k}-\frac{2}{3}(\mathbf{k}\,d\mathbf{Z}_v)\,\mathbf{I}\right)\right)\right]+\frac{d^2S}{d\langle\rho\rangle^2}\frac{\partial\rho}{\partial\mathbf{r}}\langle\mathbf{e}\rangle\,dZ_\rho\right\}-$$

$$-\frac{\langle\rho\rangle}{\sigma_0}d\mathbf{Z}_F^{(i)}-id_2\omega\,d\mathbf{Z}_w=\sigma_0^{-1}(d\mathbf{Z}_F^{(i)}+d\mathbf{Z}_F^{(d)})$$

Для $d\mathbf{Z}_F^{(i)}$ и $d\mathbf{Z}_F^{(d)}$ из (1.9) и (1.16) получим соотношения

$$d\mathbf{Z}_F^{(i)}=-i\sigma_0\mathbf{k}dZ_p+d_1\sigma_0\left\{\beta\left[K(d\mathbf{Z}_v-d\mathbf{Z}_w)+\frac{dK}{d\langle\rho\rangle}\langle\mathbf{u}\rangle\,dZ_\rho\right]+\right.$$

$$+\,\xi\left[i\omega(d\mathbf{Z}_v-d\mathbf{Z}_w)+\left(d\mathbf{Z}_w\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\langle\mathbf{u}\rangle\right]+\frac{d\xi}{d\langle\rho\rangle}\frac{D\langle\mathbf{u}\rangle}{Dt}dZ_\rho+$$

$$\left.+\,\gamma\left[r_1(\omega)(d\mathbf{Z}_v-d\mathbf{Z}_w)+\left(d\mathbf{Z}_w\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\mathbf{r}_2(\omega)+\mathbf{r}_3(\omega)\,dZ_\rho\right]\right\} \qquad (2.6)$$

$$d\mathbf{Z}_F^{(d)}=-d_1\sigma_0\zeta\,d\mathbf{Z}_w$$

Величины $\mathbf{r}_1(\omega)$, $\mathbf{r}_2(\omega)$ и $r_3(\omega)$ представляются в виде

$$r_1(\omega) = i\omega\int\limits_0^\infty \eta\,|_{t-\tau}\, e^{-i\omega\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}, \quad \mathbf{r}_2(\omega) = \int\limits_0^\infty \eta\,\langle\mathbf{u}\rangle\,|_{t-\tau} e^{-i\omega\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}$$

$$\mathbf{r}_3(\omega) = \int\limits_0^\infty \frac{d\eta}{d\langle\rho\rangle}\frac{D\langle\mathbf{u}\rangle}{Dt}\Big|_{t-\tau} e^{-i\omega\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \tag{2.7}$$

Уравнения (2.5) с учетом (2.6), (2.7) позволяют выразить семь спектральных мер dZ_{vi}, dZ_{wi}, $dZ_p\,(i = 1,2,3)$ через спектральную меру dZ_ρ и определить тем самым статистические характеристики всех случайных процессов через спектральную плотность процесса ρ'. Выражение для последней получается при помощи обобщенного уравнения диффузии, выведенного в [1]. Оставляя в этом уравнении также члены, зависящие от производных динамических величин, которыми в [1] пренебрегали, получаем аналогично [1] соотношение

$$\Psi_{\rho,\rho}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\langle dZ_\rho^*\, dZ_\rho\rangle}{d\omega\, d\mathbf{k}} = \frac{\Phi_{\rho,\rho}(\mathbf{k})}{M(\omega,\mathbf{k})}\left(\int\frac{d\omega}{M(\omega,\mathbf{k})}\right)^{-1}$$

$$M(\omega,\mathbf{k}) = \left(\omega - \mathbf{k}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial\mathbf{r}}\right)^2 + \left(\mathbf{D}\mathbf{k}\mathbf{k} - \frac{\operatorname{tr}\mathbf{D}}{\langle w'^2\rangle}\omega^2\right), \quad \operatorname{tr}\mathbf{D} = D_{ii} \tag{2.8}$$

Здесь $\mathbf{D}$ — тензор коэффициентов диффузии частиц, а для частичной спектральной плотности $\Phi_{\rho,\rho}(\mathbf{k})$ в системе статистически независимых частиц имеем приближенные выражения [1]

$$\Phi_{\rho,\rho}(\mathbf{k}) \approx \frac{3\sigma_0}{8\pi^3}\langle\rho\rangle\left(1 - \frac{\langle\rho\rangle}{\rho_*}\right)\frac{\sin kb_0 - kb_0\cos kb_0}{(kb_0)^3}$$

$$\Phi_{\rho,\rho}(\mathbf{k}) \approx \frac{3}{4\pi}\frac{\langle\rho\rangle^2}{k_0^3}\left(1 - \frac{\langle\rho\rangle}{\rho_*}\right)Y(k_0 - k), \quad Y(x) = \begin{cases}1, & x > 0\\ 0, & x < 0\end{cases} \tag{2.9}$$

$$b_0 = \frac{a}{\langle\rho\rangle^{1/3}}\left(1 - \frac{\langle\rho\rangle}{\rho_*}\right)^{1/3}, \quad k_0 = \left(\frac{3\pi}{2}\right)^{1/3}\frac{1}{b_0}$$

Соотношения (2.8), (2.9) вместе с упомянутыми представлениями всех случайных мер через dZ_ρ позволяют найти псевдотурбулентные средние, представляющие интерес в теории. Определяемые таким путем средние будут, разумеется, зависеть не только от динамических переменных и физических характеристик обеих фаз, но и от всех псевдотурбулентных средних, встречающихся в стохастических уравнениях и в (2.8). Для выражения таких средних через динамические переменные используются очевидные уравнения

$$\langle a'b'\rangle = \iint \Psi_{a,b}(\omega,\mathbf{k})\, d\omega\, d\mathbf{k} = \int\langle dZ_a^*\, dZ_b\rangle \tag{2.10}$$

где a', b' — любые псевдотурбулентные переменные. Кроме того, в (2.8) входят априори неизвестные компоненты тензора диффузии $\mathbf{D}$. Представляя их известным образом через интегралы от соответствующих лагранжевых корреляционных функций для скорости частицы, получаем в результате уравнения

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty d\tau\iint e^{i\omega\tau}\left(\Psi_{wi,wj}(\omega,\mathbf{k}) + \Psi_{wj,wi}(\omega,\mathbf{k})\right)d\omega\, d\mathbf{k} \tag{2.11}$$

Пример вычисления $\langle w'^2 \rangle$ и D_{ij} из уравнений (2.10) и (2.11) и дальнейшего исследования динамических уравнений можно найти в [2].

Далее, для величин $\mathbf{s}_r$, $\mathbf{s}_\rho$, $\mathbf{s}_p$, входящих в кинетическое уравнение (1.5), имеем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} &\langle \rho' w_i' \rangle = s_{\rho j} \langle w_j' w_i' \rangle, \quad \langle p' w_i' \rangle = s_{pj} \langle w_j' w_i' \rangle \\ &\langle v_i' w_j' \rangle = s_{vil} \langle w_l' w_j' \rangle, \qquad \mathbf{s}_u = \mathbf{s}_v - \mathbf{I} \end{aligned} \tag{2.12}$$

Предполагая, что тензор $\mathbf{A}$ в (1.5) не зависит от $\mathbf{w}'$, можно в принципе найти решение (1.5), зависящее от $\mathbf{A}$ как от параметра. Приравнивая уже известные выражения для $\langle w_i' w_j' \rangle$ соответствующим выражениям, получаемым непосредственно из функции распределения, получим тогда систему уравнений для определения компонент тензора $\mathbf{A}$. Таким образом, функция распределения также может быть выражена только через динамические переменные и физические параметры фаз. Ее можно использовать, в частности, для уточнения параметров c и N в (1.16).

Отметим, что вся предлагаемая теория имеет смысл, конечно, лишь при $T \ll T_0$, $L \ll L_0$, где T, L — временной и пространственный масштабы псевдотурбулентности, а T_0, L_0 — соответствующие масштабы среднего течения. Аналогичное обстоятельство имеет место и в кинетической теории газов. Именно выполнение этих неравенств позволяет, в частности, считать, что введенные выше спектральные меры зависят от t и $\mathbf{r}$ (неявно, через динамические переменные) настолько слабо, что допустимо использование математического аппарата стационарных случайных процессов.

Конкретные вычисления по схеме, предложенной в п. 2, оказываются в большинстве случаев весьма громоздкими и трудоемкими. Поэтому в дальнейшем целесообразно рассматривать последовательные приближения по малым отношениям T/T_0, L/L_0. Такие приближения нулевого, первого и второго порядков соответственно имеют тот же смысл, что и гидродинамические приближения Эйлера, Навье — Стокса и Барнетта.

Поступила 19 VIII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Буевич Ю. А. Гидродинамическая модель дисперсных систем. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.
2. Буевич Ю. А., Марков В. Г. Структура равновесной псевдотурбулентности в газовзвесях в условиях локальной неоднородности. ПМТФ, 1969, № 5.
3. Чандрасекар С. Стохастические проблемы в физике и астрономии. М., Изд-во иностр. лит., 1947.
4. Тодес О. М., Бондарева А. К., Гринбаум М. Б. Движение и перемешивание частиц твердой фазы в псевдоожиженном слое. Хим. пром-сть, 1966, № 6.
5. Houghton G. Particle and fluid diffusion in homogeneous fluidisation. Ind. Engng Chemistry Fundamentals, 1966, vol. 5, No. 2.
6. Левич В. Г., Мясников В. П. Кинетическая модель кипящего слоя. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
7. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
8. Corrsin S., Lumley J. On the equation of motion for a particle in turbulent fluid. Appl. Sci. Res. A, 1956, vol. 6, No. 2—3.
9. Saffman P. G. The lift of small sphere in a slow shear flow. J. Fluid Mech., 1965, vol. 22, No. 2. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1966, № 2.)
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
11. Гиршфельдер Д., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
12. Буевич Ю. А., Сафрай В. М. Вязкость жидкой фазы в дисперсных системах. ПМТФ, 1967, № 2.