

УДК 532.5

ОСОБЕННОСТИ УСТАНОВЛЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ ХЕЛЕ — ШОУ

В. П. Житников, О. Р. Зиннатуллина,
С. С. Поречный, Н. М. Шерыхалина

Уфимский государственный авиационный технический университет, 450000 Уфа
E-mail: zhitnik@mail.ru

Численное решение задачи Хеле — Шоу сводится к решению трех краевых задач определения аналитических функций комплексной переменной на каждом временном шаге: конформного отображения области параметрической переменной на физическую плоскость, задачи Дирихле для определения напряженности электрического поля и задачи Римана — Гильберта по вычислению частных производных по времени координат точек межэлектродного пространства (образы точек на границе параметрической плоскости фиксируются). В отличие от плоской задачи для определения напряженности используются интегральные преобразования аналитической функции. Проводится аппроксимация сплайн-функциями, описываются более точные и устойчивые по сравнению с известными алгоритмы общего решения нестационарных осесимметричных задач. Представлены результаты численного исследования процесса установления стационарных и автомодельных конфигураций.

Ключевые слова: осесимметричная задача Хеле — Шоу, нестационарность, численное исследование.

Введение. Задачи для уравнения Лапласа с подвижными границами, когда скорость движения границы пропорциональна градиенту потенциала Φ , называются задачами Хеле — Шоу со свободными границами. Решения этих задач могут интерпретироваться как течения вязкой жидкости [1–3], процессы растворения металлов при электрохимической обработке [4, 5] и другие процессы [6–8]. В данной работе постановка задачи осуществляется применительно к электрохимической обработке.

Исследование формообразования свободной поверхности существенно затруднено вследствие необходимости проведения сложных расчетов процесса установления предельных конфигураций. Например, при расчете координат поверхности с точностью до 12–14 десятичных знаков параметр λ экспоненциальной зависимости кривизны поверхности в данной точке от времени $e^{-\lambda t}$ может иметь лишь 1–2 точных десятичных знака.

Известны решения задач Хеле — Шоу, полученные на основе методов конечных разностей и конечных элементов [9, 10], граничных элементов [11–14]. Тем не менее разработанные ранее методы не обладают достаточной устойчивостью к накоплению погрешности при расчете длительных переходных процессов.

Целью данной работы является разработка численно-аналитических методов и исследование временных характеристик процессов установления стационарной, автомодельной и “финальной” конфигураций.

1. Общая постановка задачи. При электрохимической обработке в качестве обрабатываемой поверхности используется один из электродов (анод), в качестве электрода-

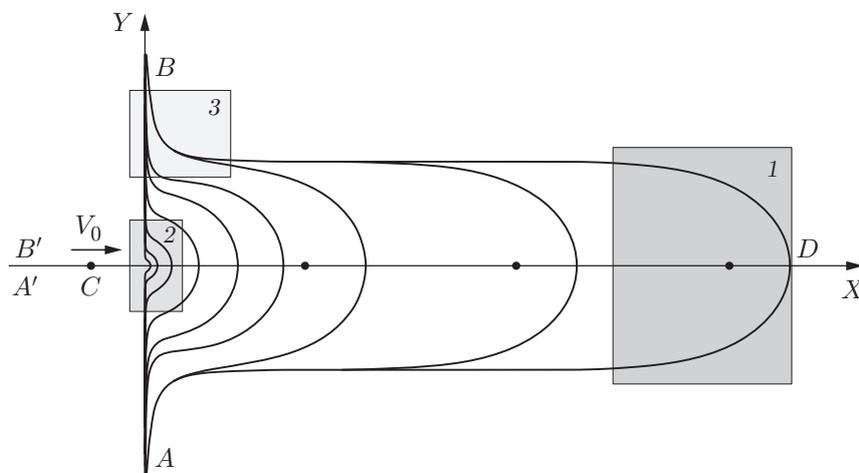


Рис. 1. Меридиональное сечение межэлектродного пространства:

1 — зона стационарного процесса; 2 — зона автомодельности (сингулярности); 3 — “финальная” зона; ADB — свободная граница; точка C — точечный источник, движущийся со скоростью V_0 к свободной поверхности

инструмента — катод. При заполнении межэлектродного пространства электролитом и подключении источника тока к электродам происходит растворение материала анода. Скорость растворения V — скорость движения каждой точки границы (по нормали) — определяется законом Фарадея (записанным с учетом закона Ома)

$$V = kE_n, \quad (1)$$

где k — электрохимическая постоянная; E_n — нормальная к границе составляющая напряженности электрического поля.

Выбирая форму электрода-инструмента и траекторию его движения, можно получить требуемую форму обрабатываемой поверхности.

Рассмотрим задачу формообразования свободной (обрабатываемой) поверхности движущимся точечным источником — точечным электродом (ТЭ). Меридиональное сечение межэлектродного пространства (МЭП) показано на рис. 1.

Идеальная модель процесса предполагает постоянство электропроводности электролита во времени и в пространстве. Поскольку скорость растворения весьма мала (обычно несколько миллиметров в минуту), электрическое поле считается квазистатическим. В этом случае векторное поле электрической напряженности является потенциальным и соленоидальным. Потенциал Φ и функция тока Ψ осесимметричного поля удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} = \frac{1}{Y} \frac{\partial \Psi}{\partial Y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial Y} = -\frac{1}{Y} \frac{\partial \Psi}{\partial X}. \quad (2)$$

Решение нестационарной задачи сводится к поиску функций $\Phi(X, Y, t)$, $\Psi(X, Y, t)$, удовлетворяющих уравнениям (2) в области МЭП (форма которой зависит от времени t) при определенных краевых условиях. В случае идеального процесса краевыми условиями являются условия равенства константе функции $\Phi(X, Y, t)$ на границах, соответствующих поверхностям электродов, и функции $\Psi(X, Y, t)$ на изолированных (непроницаемых) границах. Изменение формы границы определяется законом Фарадея (1), где $E_n = \partial \Phi / \partial n$. Начальная форма обрабатываемой поверхности, форма и скорость (траектория) движения электрода-инструмента заданы.

Разность потенциалов анода и катода равна значению подведенного к ним напряжения U . Если размеры катода малы по сравнению с характерным расстоянием до анода, то электрод-инструмент можно считать точечным. Тогда потенциал электрода-инструмента равен $-\infty$, а разность значений функции тока на оси слева и справа от источника равна отношению силы тока I к величине электропроводности электролита κ .

Представляет интерес исследование закономерностей изменения формы границы во времени. На рис. 1 показаны три зоны, формируемые различными способами: 1 — зона формирования стационарного процесса, при котором форма поверхности в окрестности ТЭ перестает меняться несмотря на растворение и происходит только сдвиг вместе с ТЭ; 2 — зона образования “финальной” формы, не меняющейся после прекращения растворения; 3 — зона сингулярности, которая формируется только в том случае, если в начальный момент времени ТЭ касается обрабатываемой поверхности. Тогда в ее окрестности мгновенно формируется автомодельный процесс, при котором сохраняется геометрическое подобие МЭП.

2. Преобразования Г. Н. Положего. Потенциал и функция тока осесимметричного поля могут быть выражены через аналитическую функцию $f(Z)$ комплексной переменной $Z = X + iY$ в области, форма границ которой совпадает с формой границ межэлектродного пространства в меридиональном сечении, с помощью формул (интегральных преобразований Г. Н. Положего [15])

$$\Phi(X_0, Y_0) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_{\infty}^{Z_0} f(Z) \frac{dZ}{\sqrt{(Z - Z_0)(Z - \bar{Z}_0)}}; \quad (3)$$

$$\Psi(X_0, Y_0) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_{\infty}^{Z_0} f(Z) \frac{(Z - X_0) dZ}{\sqrt{(Z - Z_0)(Z - \bar{Z}_0)}}, \quad (4)$$

где $Z_0 = X_0 + iY_0$; $\bar{Z}_0 = X_0 - iY_0$.

Таким образом, решение осесимметричной задачи сводится к решению некоторой плоской задачи определения аналитической функции $W(Z)$, представляющей собой комплексный потенциал некоторого вспомогательного плоского поля. Потенциал и функция тока осесимметричного течения получаются путем интегральных преобразований (3), (4) функции $f(Z) = dW/dZ$ [16]. В частности, для точечного источника, расположенного в точке $X_C + i0$, имеем

$$\Phi(X_0, Y_0) = -\frac{1}{4\pi\sqrt{(X_0 - X_C)^2 + Y_0^2}}, \quad \Psi(X_0, Y_0) = \frac{1}{4\pi} - \frac{X_0 - X_C}{4\pi\sqrt{(X_0 - X_C)^2 + Y_0^2}},$$

$$W(Z) = \frac{1}{2\pi} \ln(Z - X_C), \quad f(Z) = \frac{1}{2\pi(Z - X_C)}.$$

Согласно [16] на участке действительной оси (CD)

$$\Phi(X_0, 0) = -f(X_0 + i0)/2, \quad \Psi(X_0, 0) = 0.$$

Краевые условия вспомогательной плоской задачи записываются в виде интегральных уравнений, которые получаются приравниванием к константе правых частей (3) для эквипотенциальных границ или (4) для непроницаемых границ. Равенство нулю мнимой или действительной части $f(Z)$ в общем случае не приводит к равенству нулю или константе соответствующих интегралов.

Из формул (3), (4) определяются значения продольной и радиальной составляющих напряженности [16]

$$E_x = \frac{\partial \Phi}{\partial X_0} = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_{X_1+i0}^{X_0+iY_0} \frac{df}{dZ} \frac{dZ}{\sqrt{(Z-Z_0)(Z-\bar{Z}_0)}}; \quad (5)$$

$$E_y = \frac{\partial \Phi}{\partial Y_0} = -\frac{1}{\pi Y_0} \operatorname{Im} \int_{X_1+i0}^{X_0+iY_0} \frac{df}{dZ} \frac{(Z-X_0)dZ}{\sqrt{(Z-Z_0)(Z-\bar{Z}_0)}}, \quad (6)$$

где $X_1 + i0$ — некоторая точка на оси симметрии X .

3. Математическая постановка задачи. Отобразим конформно области, соответствующие МЭП на плоскостях Z и W , на полосу (рис. 2). На действительную ось отображается обрабатываемая поверхность ADB , на верхний берег полосы — разрез $A'CB'$. При этом решение задачи определения функции $W(Z)$, аналитической в области МЭП, можно представить в параметрическом виде $Z(\chi)$, $W(\chi)$. Границы области МЭП определяются с использованием частной производной $(\partial Z/\partial t)(\chi, t)$ численным методом путем дискретизации времени.

Таким образом, в каждый момент времени t решаются три краевые задачи: найти три аналитические внутри полосы χ функции $W(\chi, t)$, $Z(\chi, t)$ и $(\partial Z/\partial t)(\chi, t)$, удовлетворяющие определенным краевым условиям.

Краевым условием для функции $W(\chi, t)$ является условие эквипотенциальности анода (и в более общем случае катода), указанное выше. На границе $A'CB'$ для точечного катода $\Psi(X_0, 0) = I/\varkappa$.

Краевым условием для функции $Z(\chi, t)$ является равенство мнимой (или действительной) части $Z(\chi, t)$ на нижней границе полосы $\chi = \sigma$ ($-\infty < \sigma < \infty$) и известной при каждом фиксированном значении t функции $g_1(\sigma, t)$. Эта краевая задача решается аналитически (с помощью формулы Шварца). При $t = 0$ функция $g_1(\sigma, 0)$ известна из начального условия, остальные значения получаются интегрированием по времени мнимой (или действительной) части $(\partial Z/\partial t)(\sigma + i0, t)$. На границе $A'CB'$ для точечного катода $\operatorname{Im} Z(\sigma + i/2, t) = 0$, $\operatorname{Im} (\partial Z/\partial t)(\sigma + i/2, t) = 0$.

Для функции $(\partial Z/\partial t)(\chi, t)$ краевые условия на границе ADB определяются законом Фарадея (1). Пусть касательная к обрабатываемой поверхности составляет угол θ с осью x . Тогда проекции векторов смещения точки dZ и напряженности E на нормаль к поверхности можно вычислить по формулам $\Delta n = \operatorname{Im} (e^{-i\theta} dZ)$, $E_n = \operatorname{Im} (e^{-i\theta} E)$. Поскольку на

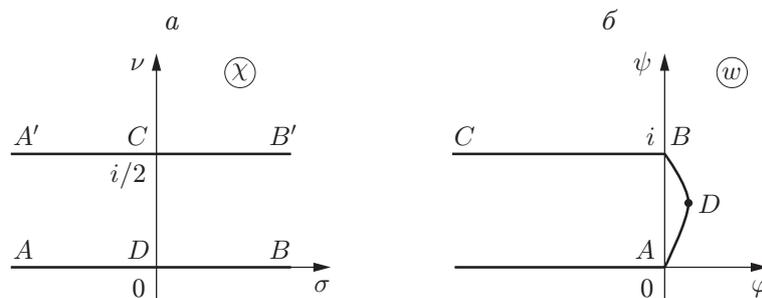


Рис. 2. Образ МЭП на плоскостях:

a — параметрической переменной χ ; b — комплексного потенциала w

границе

$$\frac{\partial Z}{\partial \sigma}(\sigma + i0, t) = \pm \left| \frac{\partial Z}{\partial \sigma} \right| e^{i\theta},$$

из закона Фарадея (1) получаем равенство

$$\operatorname{Im} \left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \sigma} \frac{dZ}{dt}(\sigma + i0, t) \right) = k \operatorname{Im} \left(E \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \sigma} \right),$$

откуда следует

$$\operatorname{Im} \left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{dt} \right) = k \operatorname{Im} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial X} + i \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right) \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \sigma}.$$

Согласно (2) условие (1) можно записать в окончательном виде [17]

$$\operatorname{Im} \left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial t} \right) = -k \frac{1}{Y} \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma}. \quad (7)$$

Введем безразмерные координаты и время:

$$z = \frac{Z}{l}, \quad x = \frac{X}{l}, \quad y = \frac{Y}{l}, \quad \tau = \lambda \frac{kI}{\varkappa l^3} t. \quad (8)$$

Здесь l — характерный размер (не зависящий от времени); I — значение тока, протекающего в электрохимической ячейке; \varkappa — электропроводность электролита. Потенциал и функцию тока представим в виде $\Phi = \varphi I / (\varkappa l)$, $\Psi = \psi I / (\varkappa l^2)$. В безразмерных переменных равенство (7) принимает вид

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{\partial y}{\partial \sigma} - \frac{\partial y}{\partial \tau} \frac{\partial x}{\partial \sigma} = \frac{\lambda}{y} \frac{d\psi}{d\sigma}. \quad (9)$$

Равенство (9) является краевым условием для определения аналитической функции $(\partial z / \partial \tau)(\chi, \tau)$ на части границы, соответствующей поверхности анода. В качестве характерного размера l удобно выбрать диаметр паза D , который образуется при достаточно большом заглублении электрода-инструмента в тело детали (в соответствии с законом Фарадея $k / (\varkappa I) = V_0 \pi D^2 / 4$, где V_0 — скорость движения ТЭ). Безразмерное время τ выберем таким образом, чтобы безразмерная скорость движения источника была равна $dx_C / d\tau = 1$. Тогда

$$\lambda = \frac{\pi}{4}, \quad l = D = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{kI}{\varkappa V_{et}}}, \quad \tau = \frac{4}{\pi} \frac{kI}{\varkappa l^3} t.$$

4. Метод решения задачи. С учетом сказанного выше решение нестационарных осесимметричных задач включает три основных этапа: нахождение конформного отображения области параметрической переменной на физическую плоскость, определение составляющих напряженности с помощью интегральных преобразований аналитической функции и вычисление частных производных координат поверхности по времени.

Задача конформного отображения решается следующим образом. В качестве области изменения параметрической переменной $\chi = \sigma + i\nu$ удобно выбрать полосу шириной $1/2$ с соответствием точек, указанным на рис. 2.

Функцию, отображающую плоскость χ на физическую плоскость, будем искать в виде суммы

$$z(\chi) = z_0(\chi) + z_\Delta(\chi).$$

При $\chi \rightarrow \infty$ величина $\operatorname{Re} z_\Delta(\chi) \rightarrow 0$. При $g > 0$ функция $z_0(\chi) = ig \operatorname{sh} \pi \chi$ конформно отображает полосу плоскости χ на левую полуплоскость с разрезом. При этом граница

$\chi = \sigma$ отображается на поверхность ADB , граница $\chi = \sigma + i/2$ — на разрез $A'CB'$. Точечный источник находится в точке $z_0(i/2) = -g$.

Функция $z_\Delta(\chi)$ определяется следующим образом. Решение задачи будем искать на границе $\chi = \sigma$ в узловых точках σ_m ($m = 0, \dots, n$). Искомыми являются значения $\operatorname{Re} z_\Delta(\sigma_m) = x_m$. Будем полагать, что при $\sigma = \sigma_n$ $\operatorname{Re} z_\Delta(\sigma_n) = 0$, поскольку при $\sigma \rightarrow \infty$ функция $z_\Delta(\sigma)$ убывает по экспоненциальному закону. Значения $\operatorname{Re} z_\Delta(\sigma)$ в точках, находящихся между узловыми точками, найдем аналогично тому, как это сделано в работах [18, 19], с помощью кубического сплайна $P(\sigma)$, имеющего две непрерывные производные.

Для восстановления функции $z_\Delta(\chi)$ используем формулу Шварца [20] с учетом того, что $z_\Delta(\chi)$ — аналитическая функция, имеющая (как и $z_0(\chi)$) действительные значения на прямой $\operatorname{Im} \chi = 1/2$. Аналитически продолжая функцию $z_\Delta(\chi)$ на полосу единичной ширины, получим

$$z_\Delta(\chi) = -i2 \operatorname{sh} \pi \chi \int_0^\infty P(\sigma) \frac{\operatorname{ch} \pi \sigma}{\operatorname{ch}^2 \pi \sigma - \operatorname{ch}^2 \pi \chi} d\sigma. \quad (10)$$

Производная $(dz_\Delta/d\chi)(\chi)$ определяется дифференцированием (10):

$$\frac{dz_\Delta}{d\chi}(\chi) = -i2 \operatorname{ch} \pi \chi \int_0^\infty \frac{dP}{d\sigma}(\sigma) \frac{\operatorname{sh} \pi \sigma}{\operatorname{ch}^2 \pi \sigma - \operatorname{ch}^2 \pi \chi} d\sigma.$$

Задав условие $\operatorname{Re} [z_0(i/2) + z_\Delta(i/2)] = x_C$, найдем из него параметр g :

$$z(i/2) = -g + 2 \int_0^\infty P(\sigma) \frac{d\sigma}{\operatorname{ch} \pi \sigma} = x_C.$$

Осесимметричная задача определения напряженности решается путем сведения ее к вспомогательной плоской задаче, для решения которой область, соответствующая МЭП на плоскости комплексного потенциала (см. рис. 2, б), конформно отображается на плоскость параметрической переменной χ (см. рис. 2, а).

В плоской задаче областью изменения комплексного потенциала является полуполоса единичной ширины

$$w_0(\chi) = \frac{1}{\pi} \ln \left(\operatorname{th} \frac{\pi}{2} \left(\chi - \frac{i}{2} \right) \right). \quad (11)$$

Производные определяются по формулам

$$\frac{dw_0}{d\chi}(\chi) = \frac{i}{\operatorname{ch} \pi \chi}, \quad \frac{dw_0}{dz_0} = -\frac{1}{g\pi \operatorname{ch}^2 \pi \chi}, \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial z_0 \partial \chi}(\chi) = \frac{2\pi \operatorname{sh} \pi \chi}{\operatorname{ch}^3 \pi \chi}. \quad (12)$$

Во вспомогательной плоской задаче областью изменения комплексного потенциала является криволинейная полуполоса (см. рис. 2, б), так как в этой задаче границы, соответствующие обрабатываемой поверхности, неэквипотенциальны. Закон изменения потенциала на границе области решения плоской задачи определяется краевым условием (3), где $f(z) = (dw/dz)(\chi)$ [16], $\Phi = \operatorname{const}$, т. е. условием эквипотенциальности границы в осесимметричной задаче.

Безразмерный потенциал можно искать в виде суммы

$$\varphi(x, y) = \varphi_0(x, y) + \varphi_1(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(x+l)^2 + y^2}} - \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_0^{\sigma_0} \frac{\partial w}{\partial \sigma}(\sigma) \frac{d\sigma}{\sqrt{(z-z_0)(z-\bar{z}_0)}},$$

где $\varphi_0(x, y)$ — потенциал точечного источника, расположенного на расстоянии l слева от начала координат.

Составляющие напряженности вычисляются по формулам (5), (6) с использованием замены переменной интегрирования на σ и путем изменения контура интегрирования (так как подынтегральная функция является аналитической по z):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, y) &= -\frac{1}{4\pi} \frac{x+l}{[(x+l)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_0^{\sigma_0} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \sigma}(\sigma) \frac{d\sigma}{\sqrt{(z-z_0)(z-\bar{z}_0)}}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x, y) &= \frac{1}{4\pi} \frac{y^2}{[(x+l)^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{1}{\pi y} \operatorname{Im} \int_0^{\sigma_0} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \sigma}(\sigma) \frac{(z-x_0) d\sigma}{\sqrt{(z-z_0)(z-\bar{z}_0)}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Решение будем искать в виде функции

$$f_1(\chi) = \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \chi}(\chi).$$

Эта функция должна обладать свойствами, аналогичными свойствам функции (12), т. е. при $\chi = \sigma + i0$ ее действительная часть должна представлять собой нечетную функцию σ , а при $\chi = \sigma + i/2$ функция $f_1(\sigma + i/2)$ должна быть действительной. Тогда ее можно аналитически продолжить на полосу единичной ширины. При этом $\operatorname{Re} f_1(\sigma + i) = \operatorname{Re} f_1(\sigma + i0)$.

Искомые параметрами являются значения действительной части функции $\operatorname{Re} f_1(\sigma_m) = f_m$ в узловых точках σ_m ($m = 1, \dots, n$). При $\sigma = \sigma_0 = 0$ $\operatorname{Re} f_1(\sigma_0) = 0$, поскольку действительная часть f_1 — нечетная функция σ , как и функция $w_0(\chi)$ в (11). Будем полагать, что при $\sigma = \sigma_n$ $\operatorname{Re} f_1(\sigma_n) = 0$, поскольку при $\sigma \rightarrow \infty$ функция $f_1(\sigma)$ убывает по экспоненциальному закону. Значения $\operatorname{Re} f_1(\sigma)$ в точках, расположенных между узловыми точками, найдем с помощью кубического сплайна.

Для восстановления функции $f_1(\chi)$ используем формулу Шварца

$$f_1(\chi) = -i2 \operatorname{ch} \pi \chi \int_0^{\infty} S(\sigma) \frac{\operatorname{sh} \pi \sigma d\sigma}{\operatorname{ch}^2 \pi \sigma - \operatorname{ch}^2 \pi \chi}.$$

Условие эквипотенциальности обрабатываемой поверхности при решении методом коллокаций приводит к системе уравнений

$$F_m = \operatorname{Re} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \overline{\frac{\partial z}{\partial \sigma}}(\sigma_m) \right] = 0, \quad m = 0, \dots, n-1, \quad (14)$$

которая представляет собой равенство нулю тангенциальной составляющей напряженности. Подставив в (13) выражение $f_1(\sigma)$, записанное через сплайн и формулу Шварца, а полученные выражения — в (14), имеем систему линейных (относительно переменных f_m) уравнений.

После решения системы линейных алгебраических уравнений значения f_m подставляются в (13) для вычисления $\partial \varphi / \partial x$, $\partial \varphi / \partial y$.

Нестационарная задача решается с помощью дискретных шагов по времени Δ_τ . При этом на каждом временном шаге τ_j решаются задачи конформного отображения полосы параметрической плоскости χ на физическую плоскость z и определения составляющих напряженности $\partial \varphi / \partial x$, $\partial \varphi / \partial y$. При этом задача конформного отображения решается полностью только при $\tau = 0$, так как после каждого шага по времени значения переменных $x_m(\tau_j)$ подставляются в используемый сплайн и интегралы Шварца.

Определив $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$, необходимо решить третью краевую задачу: найти частную производную

$$\frac{\partial z_{\Delta}}{\partial \tau}(\chi, \tau_j) = \frac{\partial x_{\Delta}}{\partial \tau}(\chi, \tau_j) + i \frac{\partial y_{\Delta}}{\partial \tau}(\chi, \tau_j)$$

как аналитическую функцию комплексного параметра χ . Эта задача имеет единственное решение, как и задача Римана — Гильберта [17].

Производная $(\partial z_{\Delta}/\partial \tau)(\chi, \tau_j)$ вычисляется аналогично тому, как определялось конформное отображение $z_{\Delta}(\chi, \tau_j)$. На каждом временном шаге $\tau_j = j\Delta\tau$ искомыми параметрами являются значения $\operatorname{Re}(\partial z_{\Delta}/\partial \tau)(\sigma_m, \tau_j) = q_m$. Значения $\operatorname{Re}(\partial z_{\Delta}/\partial \tau)(\sigma, \tau_j)$ в точках, расположенных между узловыми точками, найдем с помощью кубического сплайна $R(\sigma, \tau)$.

Для восстановления функции $(\partial z_{\Delta}/\partial \tau)(\chi, \tau_j)$ используем формулу Шварца, аналогичную (10). При $\chi = i/2$ та же формула используется для определения $dg/d\tau$ по заданным значениям $(dx_C/d\tau)(\tau) = 1$:

$$-\frac{dg}{d\tau}(\tau) + \frac{\partial x_{\Delta}}{\partial \tau}(i/2, \tau) = -\frac{dg}{d\tau} + 2 \int_0^{\infty} R(\sigma, \tau) \frac{d\sigma}{\operatorname{ch} \pi \sigma} = \frac{dx_C}{d\tau} = 1.$$

Значения q_m определяются методом коллокаций [18, 19], так чтобы в узловых точках σ_m , $m = 1, \dots, N$ выполнялось краевое условие (9).

После решения системы линейных алгебраических уравнений и определения частных производных $\partial x_{\Delta}/\partial \tau = q_m$ делается шаг по времени в соответствии со схемой предиктор-корректор второго порядка точности.

Далее вычисляются $\partial z_{\Delta}/\partial \sigma$, $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$ и т. д.

5. Результаты численного решения. Рассмотрим процесс обработки неподвижным ТЭ, расположенным на расстоянии l от изначально плоской обрабатываемой поверхности. В данном случае величина l является масштабной единицей, значение λ в (8), (9) принимается равным единице. На рис. 3,а показана форма поверхности на начальной стадии процесса (шаг по времени равномерный), на рис. 3,б — выход на стационарный режим (шаг пропорционален глубине выемки). Видно, что форма выемки приближается к форме, соответствующей автомодельному решению [21]. Масштаб рисунка выбран таким, чтобы глубина выемки всегда была равна единице.

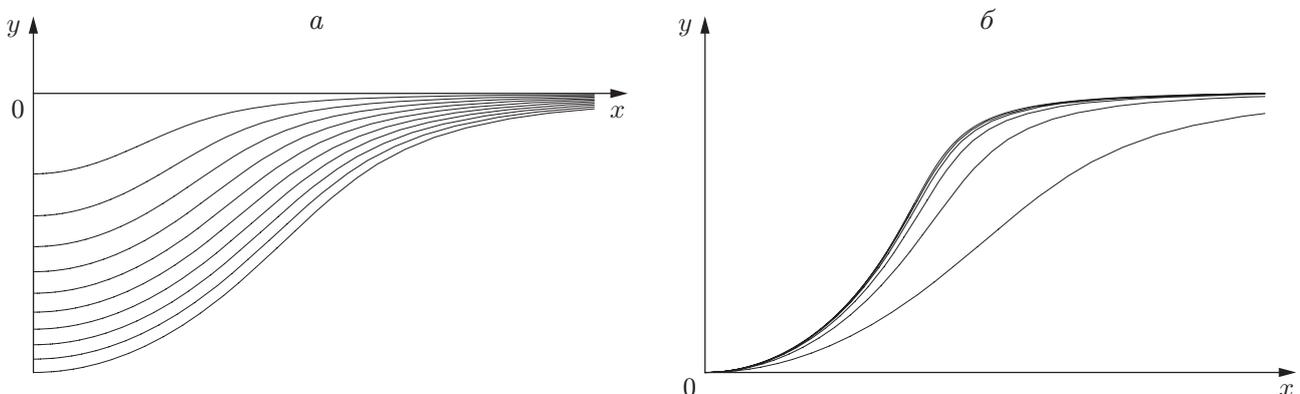


Рис. 3. Форма поверхности, образующейся в результате обработки неподвижным электродом:

а — начальная стадия процесса; б — выход на стационарный режим (в качестве масштабной единицы выбрана величина заглупления)

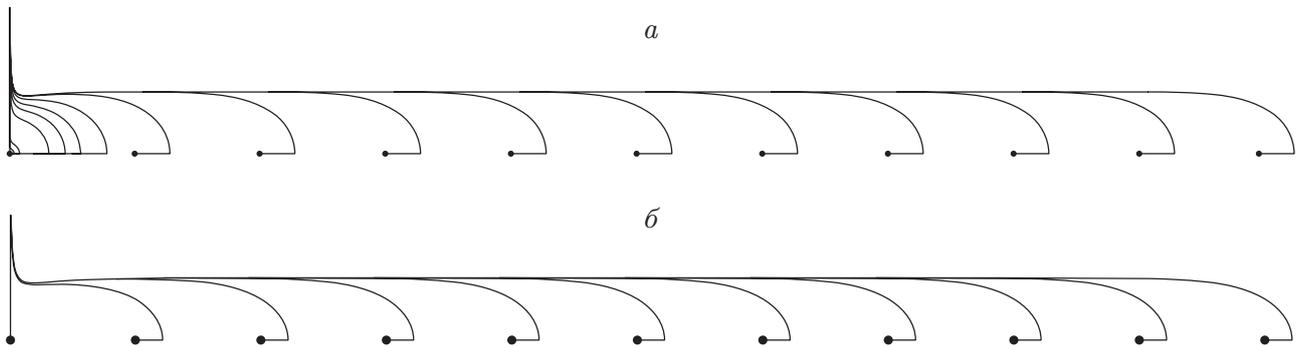


Рис. 4. Форма поверхности, образующейся в результате обработки движущимся электродом (в начале процесса зазор между электродом и обрабатываемой поверхностью равен нулю):

a — осесимметричная задача; *b* — плоская задача [19]

Таким образом, при обработке неподвижным ТЭ поверхность любой формы с течением времени приобретает автомодельную форму, как и в плоском случае [18, 19]. Следовательно, автомодельное решение является аттрактором.

Результаты расчета процесса обработки при движении электрода при нулевом зазоре приведены на рис. 4. Предполагается, что сначала имеет место автомодельный процесс. Это предположение основано на следующих фактах: на начальной стадии процесса скорость растворения значительно больше скорости движения ТЭ; автомодельная форма является аттрактором (согласно результатам расчетов, приведенным на рис. 3).

Вблизи ТЭ формируется стационарный режим. Таким образом, в случае подвижного ТЭ в его окрестности аттрактором является стационарное решение. В то же время на участке обрабатываемой поверхности, находящейся вблизи начала паза, образуется некоторая форма, далее называемая финальной, что обусловлено удалением ТЭ от этого участка и прекращением процесса растворения. Результаты сравнения решений осесимметричной (см. рис. 4, *a*) и плоской (см. рис. 4, *b*) задач показывают, что качественно они хорошо согласуются.

6. Определение параметров переходных процессов. Ниже исследуется закон установления автомодельной, стационарной и “финальной” форм при увеличении безразмерного времени. На рис. 5, *a* показана зависимость произведения кривизны K и глубины l впадины на обрабатываемой поверхности (см. рис. 3) от логарифма безразмерного времени τ при неподвижном ТЭ. На рис. 5, *b* (кривая 1) приведена зависимость десятичного логарифма относительной разности $-\lg \delta = -\lg |K(\tau)l(\tau)/Kl^* - 1|$ от $\lg \tau$ ($Kl^* = 0,948\,474\,795 \pm 10^{-8}$ — предельное (при $\tau \rightarrow \infty$) значение, полученное независимо из решения автомодельной задачи [21]). Видно, что эта зависимость близка к линейной. В результате фильтрации [22] данных нестационарной задачи полученные значения соответствуют предельному значению с точностью до 8–9 знаков.

Для оценки углового коэффициента линейной зависимости использовался метод фильтрации [22]. В результате расчетов получено значение углового коэффициента логарифмической зависимости $k_\tau = 1/3$ (относительная погрешность вычисления $\delta_k = 10^{-5}$). После подавления методом фильтрации основной составляющей зависимости обнаружено наличие составляющей с удвоенным значением углового коэффициента (кривая 2 на рис. 5, *b*).

Таким образом, из численного эксперимента следует, что зависимость величины Kl^* от времени аппроксимируется функцией

$$K(\tau)l(\tau) = Kl^*(1 - c\tau^{-1/3}).$$

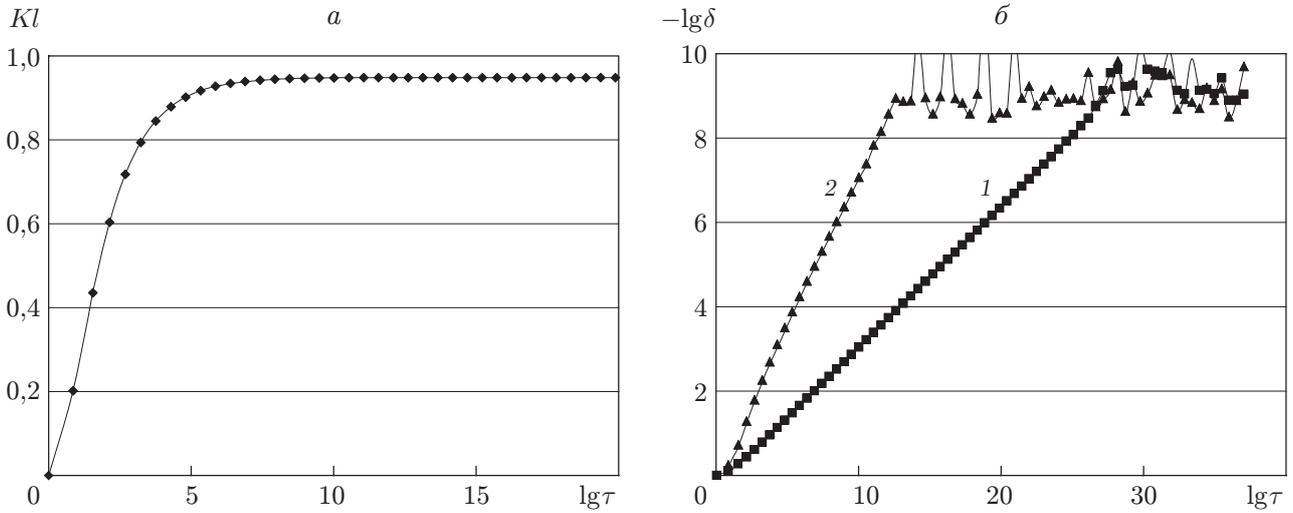


Рис. 5. Зависимости величин Kl (а) и $-\lg \delta$ (б) от $\lg \tau$ в процессе установления автомодельной формы поверхности:
 1 — основная составляющая зависимости; 2 — вторая составляющая зависимости

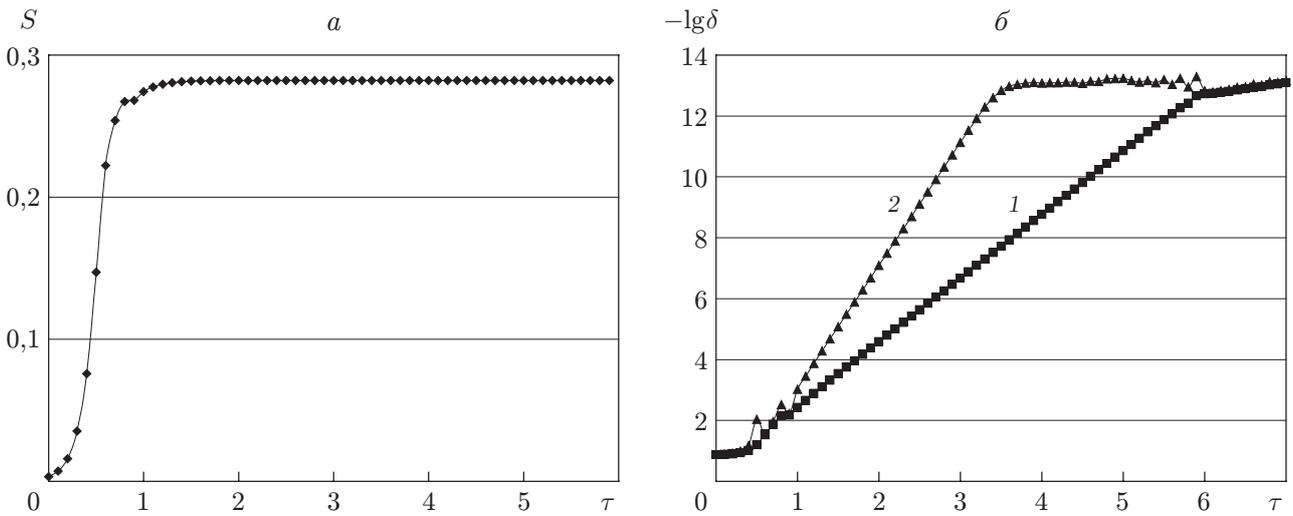


Рис. 6. Зависимости размера зазора (а) и величины $-\lg \delta$ (б) от времени в процессе установления стационарного зазора:
 1 — основная составляющая зависимости; 2 — вторая составляющая зависимости

Отметим, что для автомодельного решения характерна степенная зависимость $l(\tau) = l_0 \tau^{1/3}$.

На рис. 6,а показана зависимость размера зазора между движущимся ТЭ (см. рис. 4,а) и ближайшей точкой обрабатываемой поверхности от безразмерного времени τ . На рис. 6,б приведена зависимость величины $-\lg \delta = -\lg |S(\tau)/S^* - 1|$ от безразмерного времени τ (S — размер зазора; $S^* = 0,282186858398 \pm 10^{-12}$ — размер стационарного зазора, полученный при решении стационарной задачи [21]). Видно, что эта зависимость близка к линейной, т. е. закон установления близок к экспоненциальному:

$$S(\tau) = S^*(1 - c \cdot 10^{-k\tau}).$$

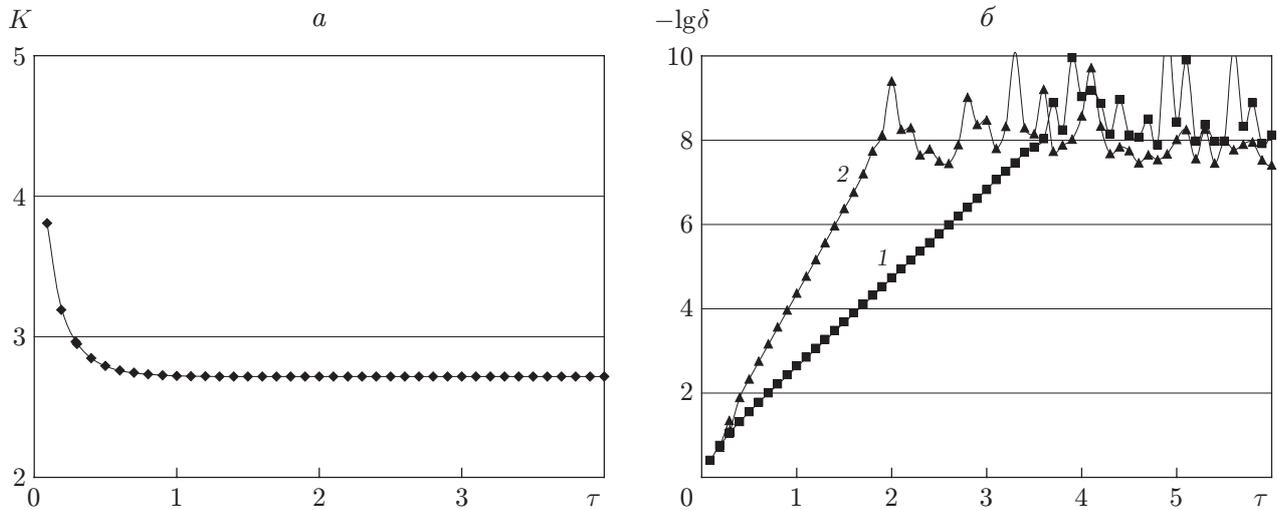


Рис. 7. Зависимости кривизны (а) и величины $-\lg \delta$ (б) от времени при установлении стационарной формы поверхности:
 1 — основная составляющая зависимости; 2 — вторая составляющая зависимости

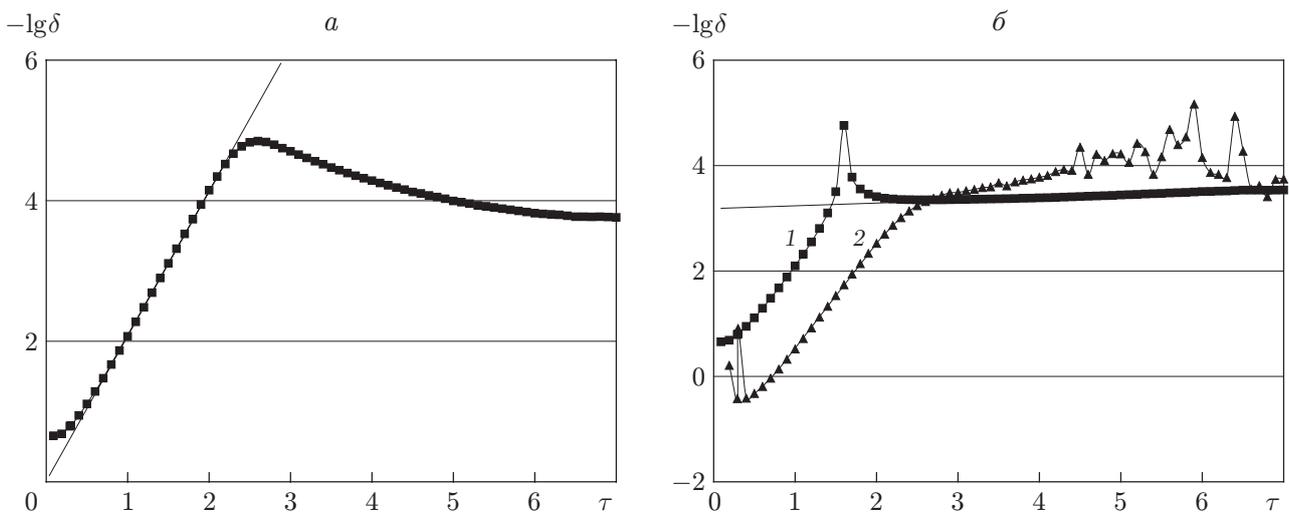


Рис. 8. Зависимость величины $-\lg \delta = -\lg |K(\tau)/K^* - 1|$ от времени (а) и медленная составляющая этой зависимости (б) при установлении максимального значения кривизны “финальной” формы поверхности:
 1 — основная составляющая зависимости; 2 — вторая составляющая зависимости

В результате расчетов получено значение углового коэффициента логарифмической зависимости $k_\tau = 2,088\ 805 \pm 10^{-6}$. Значение углового коэффициента для второй составляющей (кривая 2 на рис. 6,б) приблизительно в два раза больше.

На рис. 7,а показана зависимость кривизны обрабатываемой поверхности в точке, ближайшей к ТЭ, от безразмерного времени τ , на рис. 7,б — зависимость $-\lg \delta = -\lg |K(\tau)/K^* - 1|$ от τ (K — кривизна; $K^* = 2,716\ 660 \pm 10^{-6}$ — стационарная кривизна). В результате расчетов получено значение углового коэффициента $k_\tau = 2,0888 \pm 2 \cdot 10^{-4}$.

На рис. 8 приведена зависимость $-\lg \delta = -\lg |K(\tau)/K^* - 1|$ от τ при $K^* = -15,065 \pm 5 \cdot 10^{-3}$ при установлении “финальной” формы поверхности. В результате расчетов получено значение углового коэффициента $k_\tau = 2,08 \pm 2 \cdot 10^{-2}$. Увеличение точности расчета

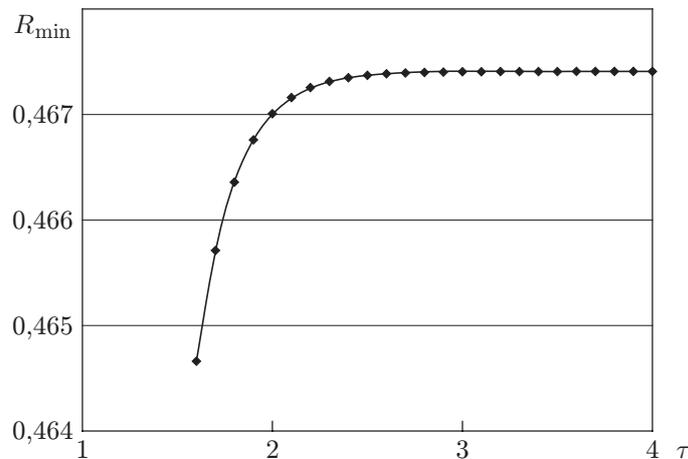


Рис. 9. Зависимость минимального радиуса отверстия от времени

позволило обнаружить новый эффект, который ранее не был замечен из-за погрешности: модуль кривизны сначала растет до значения $-K \approx 15,073$, а затем уменьшается до значения $-K \approx 15,065$ (рис. 8, *a*). Характерная скорость уменьшения значений $-K$ существенно меньше характерной скорости их увеличения. При этом угловой коэффициент $k_\tau \approx 0,07$ (на рис. 8, *a* $k_\tau \approx 2,08$). После подавления этой составляющей зависимости $-\lg \delta(\tau)$ видно, что имеется вторая составляющая (кривая 2 на рис. 8, *b*).

При нулевом начальном зазоре наблюдалось сужение отверстия в “финальной” зоне обрабатываемой поверхности (см. рис. 4, *a*). Зависимость минимального радиуса отверстия в обрабатываемом материале от времени приведена на рис. 9. Получено значение углового коэффициента $k_\tau = 2,089 \pm 2 \cdot 10^{-3}$.

Заключение. В данной работе предложен метод численного решения нестационарных осесимметричных задач Хеле — Шоу, основанный на интегральных преобразованиях аналитической функции. Результаты численных расчетов подтвердили высокую эффективность предложенного метода.

В результате исследований временных характеристик процессов установления параметров форм в стационарной и “финальной” зонах показано, что для всех рассмотренных зависимостей значения постоянной времени k_τ одинаковы в пределах достигнутой точности. Точность расчета “финальной” формы несколько меньше точности расчета стационарной формы, поэтому разброс значений k_τ больше. Тем не менее можно утверждать, что при переходе к стационарной и “финальной” формам поверхности различия значений k_τ не обнаружено. Инвариантность этой величины для различных условий установления стационарного процесса бесспорна. Однако то, что эта величина определяет скорость установления “финальной” формы, заранее предсказать трудно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Нестационарное движение в теории фильтрации // Прикл. математика и механика. 1945. Т. 9. С. 79–90.
2. Polubarinova-Kochina P. Ya. Theory of groundwater movement. Princeton: Princeton Univ. Press, 1962.
3. Галин Л. А. Нестационарная фильтрация со свободными границами // Докл. АН СССР. 1945. Т. 47. С. 246–249.
4. McGeough J. A. Principles of electrochemical machining. L.: Chapman and Hall, 1974.

5. **McGeough J. A., Rasmussen H.** On the derivation of the quasi-steady model in electrochemical machining // *J. Inst. Math. Appl.* 1974. V. 13. P. 13–21.
6. **Howison S. D.** Complex variable methods in Hele — Shaw moving boundary problems // *Eur. J. Appl. Math.* 1992. V. 3. P. 209–224.
7. **Howison S. D., King J. R.** Explicit solutions to six free boundary problems in fluid flow and diffusion // *IMA J. Appl. Math.* 1989. V. 42. P. 155–175.
8. **Howison S. D., Ockendon J. R., Lacey A. A.** Singularity development in moving boundary problems // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1985. V. 38. P. 343–360.
9. **Novak P., Rousaz I., Kimla A., et al.** Mathematical simulation of electrochemical machining // *Proc. of the Intern. school ECMM-88. Lubnevitsy (Poland): Lubnevitsy Univ., 1988.* P. 100–115.
10. **Pandey J.** Finite element approach to the two dimensional analysis of ECM // *J. Precision Engng.* 1980. V. 1. P. 23–28.
11. **Christiansen S., Rasmussen H.** Numerical solutions for two-dimensional annular electrochemical machining problems // *J. Inst. Math. Appl.* 1976. V. 18. P. 295–307.
12. **West A., Madore C., Moltosz M., Landolt D.** Shape changes during through-mask electrochemical micromachining of thin metal films // *J. Electrochem. Soc.* 1992. V. 2, N 139. P. 499–506.
13. **Volgin V. M., Davydov A. D.** Modelling of multistage electrochemical shaping // *J. Materials Proc. Technol.* 2004. V. 149. P. 466–471.
14. **Purcar M., Bortels L., Van den Bossche B., Deconinck J.** 3D electrochemical machining computer simulations // *J. Materials Proc. Technol.* 2004. V. 149. P. 472–478.
15. **Положий Г. Н.** Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. Киев: Киев. гос. ун-т, 1965.
16. **Житников В. П.** Решение плоских и осесимметричных задач с помощью методов теории функций комплексного переменного. Уфа: Уфим. гос. авиац. техн. ун-т, 1994.
17. **Житников В. П., Зиннатуллина О. Р., Федорова Г. И.** Аналитическое решение задачи Римана — Гильберта с условиями, имеющими место в плоских и осесимметричных задачах Хеле — Шоу // *Вестн. Уфим. гос. авиац. техн. ун-та.* 2006. Т. 7, № 2. С. 149–154.
18. **Zhitnikov V. P., Fedorova G. I., Zinnatullina O. R., Kamashev A. V.** Simulation of non-stationary processes of electrochemical machining // *J. Materials Proc. Technol.* 2004. V. 149. P. 398–403.
19. **Zhitnikov V. P., Fedorova G. I., Sherykhalina N. M., Urakov A. R.** Numerical investigation of non-stationary electrochemical shaping based on an analytical solution of the Hele — Shaw problem // *J. Engng Math.* 2006. V. 55, N 1–4. P. 255–276.
20. **Лаврентьев М. А.** Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. М.: Наука, 1973.
21. **Zhitnikov V. P., Zinnatullina O. R., Fedorova G. I.** Self-similar Hele — Shaw problems // *Proc. of the workshop on computer science and information technologies CSIT'2007. Ufa (Russia): Ufa State Aviat. Tech. Univ., 2007.* V. 2. P. 192–198.
22. **Шерыхалина Н. М.** Методы обработки результатов численного эксперимента для увеличения их точности и надежности // *Вестн. Уфим. гос. авиац. техн. ун-та.* 2007. Т. 9, № 2. С. 127–137.