

УДК 533.6.011.72

ОСОБЫЕ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ТРОЙНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ СКАЧКОВ УПЛОТНЕНИЯ

В. Н. Усков, М. В. Чернышов

Балтийский государственный технический университет "Военмех",
190005 Санкт-Петербург
E-mail: uskov@peterlink.ru

Рассматриваются тройные конфигурации скачков уплотнения в стационарных сверхзвуковых потоках невязкого совершенного газа. Определены тройные конфигурации с особыми интенсивностями скачков и экстремальными соотношениями различных параметров течения в потоках за ними.

Ключевые слова: тройная конфигурация, скачок уплотнения, особые интенсивности, экстремальные соотношения параметров.

1. Предмет исследования. Постановка задачи. Тройной конфигурацией (ТК) скачков уплотнения называется структура газодинамических разрывов в сверхзвуковом потоке, состоящая из трех скачков (j_i , $i = 1, 2, 3$) и тангенциального разрыва τ , которые имеют общую (тройную) точку T (рис. 1). Линия тока исходного течения, проходящая в тройную точку, разделяет поток на две части, одна из которых проходит систему (последовательность) скачков j_1 и j_2 , а другая — только один (главный, или результирующий) скачок j_3 . Тангенциальный разрыв τ разделяет перемещающиеся вдоль него потоки за скачками j_2 и j_3 , поэтому его иногда называют линией скольжения.

Классификация Л. Г. Ландау [1] разрывов по отношению к точке T позволяет считать скачок j_1 проходящим в тройную точку. Течение за скачком j_1 является сверхзвуковым по условию реализации последующего скачка j_2 , который может быть как проходящим (рис. 1, *a*), так и исходящим (рис. 1, *b-d*) из точки T . При дозвуковом течении за скачками j_2 (число Маха $M_2 < 1$) или j_3 ($M_3 < 1$) направления этих скачков в окрестности точки T не позволяют установить, являются они причиной или следствием образования ТК.

Для расчета ТК в потоке с некоторым значением числа Маха обычно задаются параметры проходящего скачка j_1 (например, угол его наклона к набегающему потоку σ_1 или интенсивность J_1 — отношение статических давлений за скачком и перед ним). Образование ТК иногда называют "ветвлением" проходящего скачка уплотнения. Тройная конфигурация определяется с помощью следующих условий динамической совместности на разрыве: 1) равенство статических давлений ($p_2 = p_3$); 2) сонаправленность потоков, разделенных разрывом.

Таким образом, непрерывный сверхзвуковой поток в ТК преобразуется в разрывное течение, состоящее из двух разделенных разрывом потоков с различными газодинамическими параметрами f_2 и f_3 за ТК. Отношения $I_f = f_2/f_3$ и разности $\Delta \bar{f}_\tau = (f_2 - f_3)/f$ (f — параметры потока перед тройной точкой) характеризуют неоднородность течения,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04-01-00713).

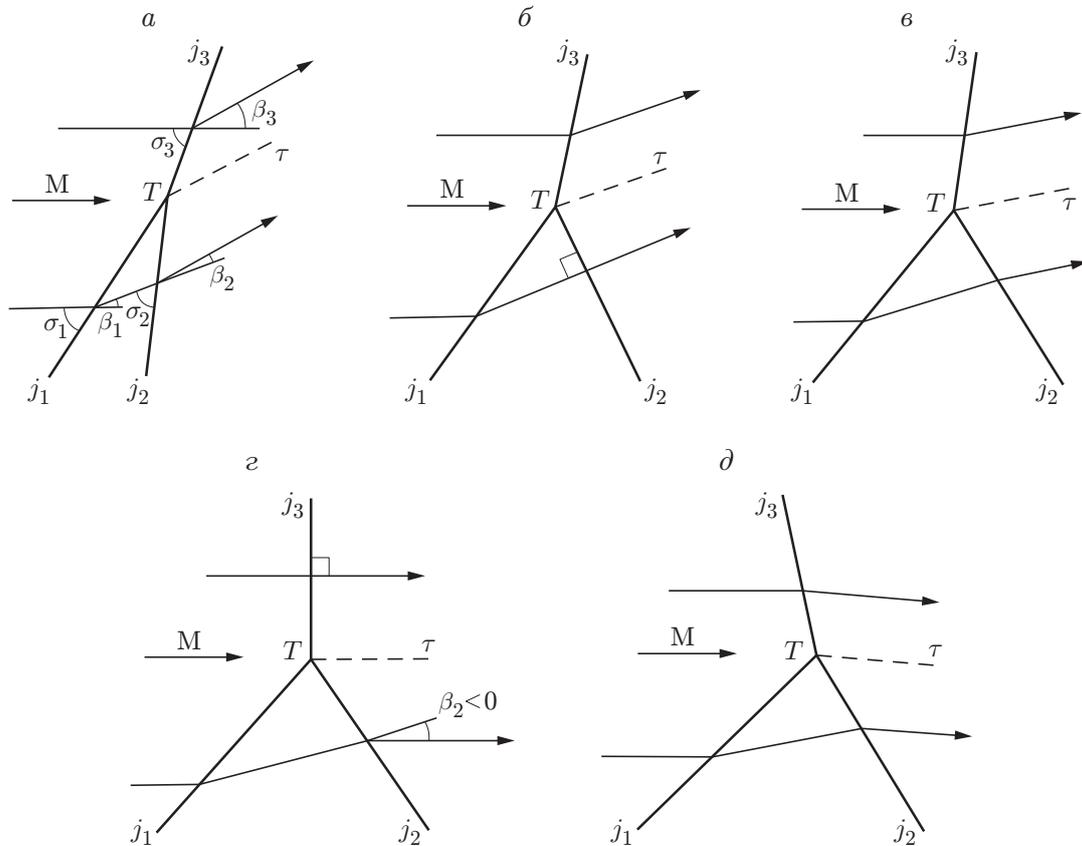


Рис. 1. Виды тройных конфигураций скачков уплотнения:

a — ТК третьего типа; *б* — ТКП; *в* — ТК второго типа; *г* — СМК; *д* — ТК первого типа

обусловленную различной степенью преобразования параметров исходного потока в системе из двух скачков уплотнения и на одиночном главном скачке. Если ТК образуется в неоднородном исходном потоке или скачки j_i искривлены, то к традиционным условиям на разрыве τ добавляются дифференциальные [1]: 1) равенство кривизн линий тока, смежных с разрывом τ ; 2) равенство взятых вдоль разрыва τ производных статического давления на его сторонах. Помимо неоднородности исходного потока на решение задачи влияют взаимосвязанные кривизны скачков уплотнения в окрестности тройной точки.

Одиночные скачки уплотнения и составленные из них системы обладают особыми свойствами и могут быть оптимальными по различным критериям [2–5]. Следует ожидать, что эти особенности проявляются и в неоднородном течении за ТК. В литературе, за исключением работ [6, 7], этот вопрос практически не рассматривался, хотя он имеет большое значение в прикладных задачах транс- и сверхзвуковой аэродинамики, в теории сверхзвуковых струйных течений, используемых в различных технических объектах и технологиях. Неоднородность потоков, в том числе за ТК, нередко является причиной возникновения отрывных и возвратных течений, неустойчивостей, автоколебаний и сильных акустических полей, в частности автоколебательных режимов взаимодействия сверхзвуковых струй с преградами [7] и обтекания затупленного тела с иглой [8]. Смещение потоков вдоль теоретической (особенно искривленной) линии скольжения способно привести к образованию сильных вихрей и даже к возвратному течению за маховским диском сверхзвуковой струи с нерасчетностью, существенно отличающейся от единицы.

Принцип обратимости движения позволяет использовать теорию стационарных ТК при расчете аналогичных структур бегущих ударных волн [9], анализ которых важен в нестационарной гидрогазодинамике и физике взрыва.

Далеко не полный перечень задач расчета и анализа тройных конфигураций показывает актуальность проблемы управления параметрами неоднородного течения за ними. Решение проблемы состоит в выборе определенной, зависящей от числа Маха и от показателя адиабаты γ исходного потока интенсивности приходящего скачка уплотнения j_1 , которая обеспечит необходимые для решения данной прикладной задачи параметры неоднородности $I_f(M, \gamma, J_1)$ и $\Delta \bar{f}_\tau(M, \gamma, J_1)$. Анализ особенностей и экстремальных значений параметров неоднородности течения за ТК посвящена данная работа.

2. Основные соотношения. Условия динамической совместности на разрыве τ связывают интенсивности J_i скачков уплотнения j_i , число Маха потока перед тройной точкой и показатель адиабаты γ соотношениями [1, 6, 10]

$$J_1 J_2 = J_3; \quad (2.1)$$

$$\beta_1 + \beta_2 = \beta_3. \quad (2.2)$$

Интенсивность J_i каждого скачка уплотнения связана с углом его наклона σ_i (см. рис. 1, *a*) соотношением

$$J_i = (1 + \varepsilon) M_k^2 \sin^2 \sigma_i - \varepsilon,$$

где M_k — число Маха перед скачком j_i ; $\varepsilon = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$.

Углы β_i поворота потока на соответствующих скачках определяются их интенсивностями J_i и числами Маха потоков перед ними:

$$|\beta_i| = \arctg \left(\sqrt{\frac{(1 + \varepsilon) M_k^2 - \varepsilon - J_i}{J_i + \varepsilon}} \frac{(1 - \varepsilon)(J_i - 1)}{(1 + \varepsilon) M_k^2 - (1 - \varepsilon)(J_i - 1)} \right).$$

Число Маха M_i за скачком j_i также определяется числом Маха перед ним и интенсивностью скачка:

$$M_i = \sqrt{\frac{(J_i + \varepsilon) M_k^2 - (1 - \varepsilon)(J_i^2 - 1)}{J_i(1 + \varepsilon J_i)}}.$$

С использованием значения $\Lambda_i = \ln J_i$ условие (2.1) записывается в форме

$$\Lambda_1 + \Lambda_2 = \Lambda_3, \quad (2.3)$$

которая допускает отображение скачка j_i в виде вектора (β_i, Λ_i) на плоскости интенсивностей волн (рис. 2). Решение системы (2.1), (2.3) представляется пересечением сердцевидных кривых (например, точкой a_1 пересечения кривых I и II).

На сердцевидных кривых выделяются точки, соответствующие особым значениям интенсивностей скачков. Особыми являются следующие значения интенсивности:

— интенсивность прямого скачка уплотнения

$$J_m(M_k) = (1 + \varepsilon) M_k^2 - \varepsilon;$$

— интенсивность скачка, замедляющего поток до критической скорости:

$$J_*(M_k) = (M_k^2 - 1)/2 + \sqrt{((M_k^2 - 1)/2)^2 + \varepsilon(M_k^2 - 1) + 1};$$

— интенсивность скачка с наибольшим углом поворота течения по сравнению со всеми скачками, реализующимися в потоке с данным числом Маха:

$$J_l(M_k) = (M_k^2 - 2)/2 + \sqrt{((M_k^2 - 2)/2)^2 + (1 + 2\varepsilon)(M_k^2 - 1) + 2}.$$

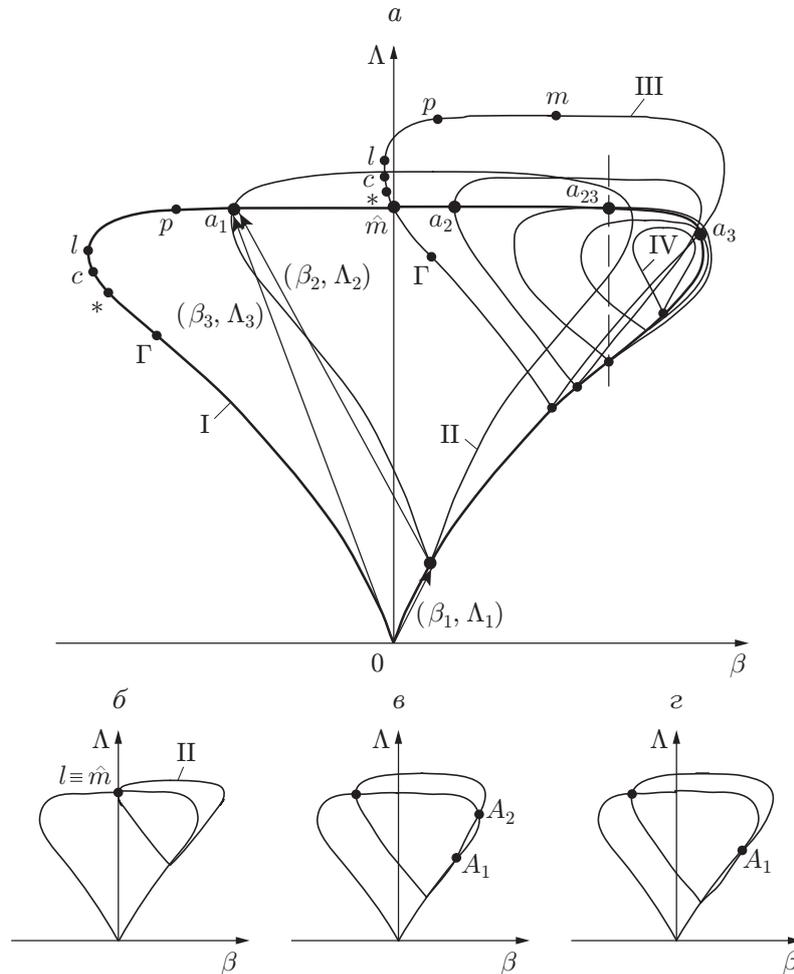


Рис. 2. Тройные конфигурации скачков уплотнения на плоскости (β, Λ) :
 а — общий случай графического решения с указанием особых точек на сердцевидных кривых I и III; б — образование СМК фон Неймана; в — два “альтернативных” решения; з — единственное “альтернативное” решение

При анализе дифференциальных условий совместности на скачках уплотнения [1] выделяют значения интенсивности

$$J_p(M_k) = \frac{3J_m - 2 - 3\varepsilon + \sqrt{9J_m^2 + 2\varepsilon(17 + 8\varepsilon)J_m + 16 + 16\varepsilon + 9\varepsilon^2}}{2(3 + \varepsilon)}$$

(точка постоянного давления) и $J_c(M_k)$ (точка Крокко). Последняя интенсивность определяется уравнением

$$\sum_{n=0}^3 A_n J_c^n = 0,$$

где

$$A_3 = (1 + \varepsilon)(1 + 3\varepsilon), \quad A_2 = 4 + 7\varepsilon + \varepsilon^2 - (1 + 3\varepsilon)J_m,$$

$$A_1 = 1 - 3\varepsilon - (3 + 3\varepsilon + 4\varepsilon^2)J_m, \quad A_0 = -2(1 + \varepsilon J_m).$$

При интенсивности $J_i = J_p(M_k)$ производная $\partial \ln p / \partial s$ (неизобаричность потока) за скачком j_i равна нулю. Интенсивность $J_i = J_c(M_k)$ соответствует нулевой геометрической

кривизне линии тока за искривленным скачком в равномерном потоке. При всех $M_k > 1$ справедливо неравенство

$$1 < J_*(M_k) < J_c(M_k) < J_l(M_k) < J_p(M_k) < J_m(M_k).$$

При $M_k > \sqrt{2}$ выделяют особую интенсивность

$$J_\Gamma = M_k^2 - 1,$$

соответствующую огибающей семейства сердцевидных кривых [10]. Угол поворота потока на скачке с интенсивностью $J_k = J_\Gamma(M_k)$ максимален по сравнению со всеми скачками той же интенсивности, возникающими в потоке с другими числами Маха. Течение за таким скачком является сверхзвуковым ($J_\Gamma(M_k) < J_*(M_k)$, $M_i > 1$).

Одни и те же особые значения интенсивностей достигаются на скачках с противоположными направлениями поворота потока. На сердцевидных кривых I и III (рис. 2, а) точками Γ , $*$, c , l , p и m отмечены особые интенсивности скачков уплотнения с отрицательным (по часовой стрелке) направлением поворота течения ($\beta_1 < 0$, $\beta_2 < 0$). В зависимости от направления поворота потока на скачках ТК относят к третьему (ТК-3, $\beta_1\beta_2 > 0$, рис. 1, а), второму (ТК-2, $\beta_1\beta_2 < 0$, $\beta_1\beta_3 > 0$, рис. 1, в) или первому (ТК-1, $\beta_1\beta_2 < 0$, $\beta_1\beta_3 < 0$, рис. 1, д) типу. Образующаяся при $\beta_2 = 0$ тройная конфигурация с прямым скачком j_2 (ТКП, рис. 1, б) и стационарная маховская конфигурация (СМК) фон Неймана с прямым скачком j_3 ($\beta_3 = 0$, рис. 1, г) являются переходными между структурами ТК-3 и ТК-2, ТК-2 и ТК-1 соответственно.

Конфигурации ТК-2 обычно образуются при нерегулярном (маховском) отражении скачка j_1 , а ТК-1 и ТК-3 — в частных случаях пересечения встречных и догоняющих скачков соответственно. При дозвуковом течении за скачками j_2 и j_3 маховское отражение иногда приводит к образованию конфигураций первого или третьего типа [11–13].

Графические решения, соответствующие ТК разных видов, показаны на рис. 2, а точками пересечения сердцевидных кривых. Точки a_i ($i = 1, 2, 3$) соответствуют конфигурациям i -го типа, точка a_{23} — переходной ТКП, а точка \hat{m} пересечения кривых I и III — конфигурации СМК.

Значения I_f и $\Delta \bar{f}_T$, характеризующие неоднородность течения за ТК, однозначно определяются интенсивностями скачков j_i , числом Маха невозмущенного потока и показателем адиабаты газа. В данной работе для каждого числа Маха потока газа находятся экстремальные ТК, соответствующие максимуму параметров неоднородности.

3. Особые тройные конфигурации. Тройные конфигурации с отмеченными значениями (J_m , J_* , J_l , J_p , J_c , J_Γ) интенсивностей отдельных скачков называются далее особыми. К особым случаям относятся также предельные решения системы (2.1), (2.2) при вырождении одного из скачков в слабый разрыв ($J_1 \rightarrow 1$ или $J_2 \rightarrow 1$). Эти решения соответствуют пересечению скачка уплотнения со слабым разрывом того же или противоположного направления без образования другого (исходящего) слабого разрыва.

Поскольку течение за скачком j_1 является сверхзвуковым, поиск особых ТК на плоскости (M, σ_1) ведется в области между кривыми 1 и 2 (рис. 3, 4). Первая из них соответствует интенсивности $J_1 = J_*(M)$, а вторая — вырождению скачка j_1 в слабый разрыв ($J_1 \rightarrow 1$, $\sigma_1 \rightarrow \alpha(M)$, где $\alpha(M) = \arcsin(1/M)$ — угол Маха). Кроме того, в области IV между кривыми 1 и f_1 система (2.1), (2.2) не имеет решения [1] и стационарные ТК не образуются. На рис. 2, а отсутствие решения показано непересекающимися сердцевидными кривыми I и IV. Для анализа отражения скачков, соответствующих области IV на рис. 3, используют четырехволновую модель [11, 15] с дополнительной волной разрежения, центрированной в точке T , а также модель [16] с двумя тангенциальными разрывами, исходящими из этой точки.

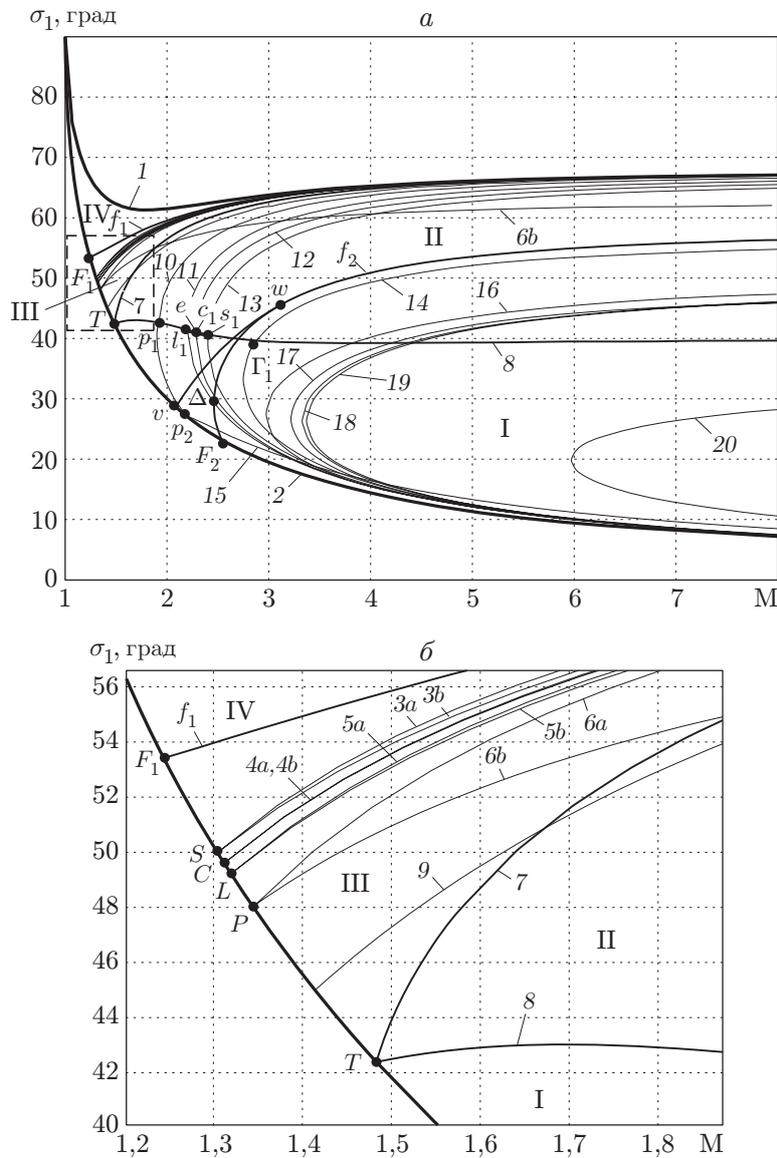


Рис. 3. Особые тройные конфигурации скачков уплотнения на плоскости (M, σ_1) :
 б — фрагмент, выделенный на рис. 3,а штриховой линией, в увеличенном масштабе

Кривые f_i ($i = 1, 2$) соответствуют конфигурациям ТК-3 со скачком j_2 , вырождающимся в слабый разрыв ($J_2 \rightarrow 1$). Эти кривые, описываемые зависимостью [4]

$$M = \sqrt{[A(B \mp C) - 1 + \varepsilon]/\varepsilon},$$

где

$$A = (1 + \varepsilon J_1)/[(1 + \varepsilon)(J_1(1 - 3\varepsilon) - 4\varepsilon^2)],$$

$$B = J_1(1 - 2\varepsilon - \varepsilon^2) - 2\varepsilon^2, \quad C = 2\varepsilon\sqrt{\varepsilon(1 + \varepsilon J_1)(J_1 + \varepsilon)},$$

начинаются в точках F_i ($M_{F_1} = 1,245, M_{F_2} = 2,540$), где

$$M_{F_{1,2}} = \sqrt{2(1 \pm \sqrt{\varepsilon})/(1 \pm 2\sqrt{\varepsilon})}.$$

В области III существует единственное решение системы (2.1), (2.2), описывающее ТК-3. При удалении от кривой f_1 интенсивность скачка j_2 в образующихся ТК-3 быстро

возрастает и последовательно превышает особые значения $J_*(M_1)$, $J_c(M_1)$, $J_l(M_1)$ и $J_p(M_1)$ на кривых $3a-6a$ (рис. 3) соответственно. При этом интенсивность J_3 главного скачка также увеличивается и принимает значения $J_*(M)$, $J_c(M)$, $J_l(M)$ и $J_p(M)$ на кривых $3b-6b$. Интенсивности скачков j_2 и j_3 в ТК-3 превышают особое значение J_Γ : $J_2 > J_\Gamma(M_1)$ при $M_1 > \sqrt{2}$, $J_3 > J_\Gamma(M)$ при $M > \sqrt{2}$.

Конфигурации ТК-3, возникающие при вырождении скачка j_1 в слабый разрыв ($J_1 \rightarrow 1$), соответствуют участку F_1T кривой 2 на рис. 3. Интенсивности $J_2 = J_3 = J$ других скачков в этих ТК удовлетворяют уравнению

$$\sum_{n=0}^3 B_n M^{2n} = 0, \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} B_3 &= (1 + \varepsilon)^2 J^2 - 4\varepsilon(J + \varepsilon)^2, \\ B_2 &= 4\varepsilon(1 - \varepsilon)(J^2 - 1) - 2(1 - \varepsilon^2)J^2(J - 1) - 4(1 - 2\varepsilon)(J + \varepsilon)^2, \\ B_1 &= (1 - \varepsilon)[4(1 - 2\varepsilon)(J^2 - 1)(J + \varepsilon) + 4(J + \varepsilon)^2 + (1 - \varepsilon)J^2(J - 1)^2], \\ B_0 &= -4(1 - \varepsilon)^2(J + \varepsilon)(J^2 - 1), \end{aligned}$$

описывающему также последовательности скачков уплотнения и волн Прандтля — Майера с экстремумами статического давления за ними [5].

При вырождении скачка j_1 в слабый разрыв интенсивности других скачков равны ($J_2 = J_3$) и достигают особых значений одновременно. Поэтому кривые $3a-6a$ и $3b-6b$ начинаются в попарно общих точках S , C , L и P . Число Маха $M_S = 1,305$ определяется соотношением

$$4\varepsilon M_S^6 + (3 + 2\varepsilon - 9\varepsilon^2) M_S^4 + 4(1 - 8\varepsilon + 6\varepsilon^2) M_S^2 - 16(1 - \varepsilon)^2 = 0,$$

значение $M_L = 1,320$ — один из корней уравнения

$$(1 + 4\varepsilon^2) M_L^6 - (1 - 2\varepsilon)(1 - 10\varepsilon) M_L^4 + 8(1 - \varepsilon)(1 - 4\varepsilon) M_L^2 - 16(1 - \varepsilon)^2 = 0,$$

а значения $M_C = 1,313$ и $M_P = 1,345$ — корни аналогичных алгебраических уравнений седьмой и пятой степени соответственно.

В точке T ($M_T = \sqrt{(2 - \varepsilon)/(1 - \varepsilon)} = 1,483$) скачки j_2 и j_3 становятся прямыми ($J_2 = J_3 = J_m(M)$), что соответствует переходу к ТК-2 или ТК-1. Кривые 7 и 8 (см. рис. 3, 4), исходящие из точки T , соответствуют переходным ТКП ($J_2 = J_m(M_1)$) и СМК ($J_3 = J_m(M)$). Переходная ТКП описывается соотношением (см. [1])

$$M^4 - r M^2 + (J_1 - 1)(J_1 + 2 - \varepsilon)/(1 - \varepsilon) = 0,$$

где

$$r = (J_1 - 1)(J_1 + 2 - \varepsilon)/(J_1 + \varepsilon) + (J_1 + \varepsilon)/(1 + \varepsilon) + (1 + \varepsilon J_1)^2/[(1 - \varepsilon)(J_1 + \varepsilon)^2].$$

Интенсивность J_3 сильного ($J_3 > J_l(M)$) скачка j_3 в ТКП становится особой ($J_3 = J_p(M)$) при $M = M_a = 1,887$. Ветвящийся скачок j_1 обладает интенсивностью $J_1 = J_\Gamma(M)$ при $M = (1 - \varepsilon)\sqrt{2/(1 - 3\varepsilon)} = 1,667$ (точка пересечения кривых 7 и 9, на последней из которых $J_1 = J_\Gamma(M)$). Скачок уплотнения j_2 в ТКП является прямым, однако интенсивность скачка j_1 превышает значение J_2 при $M > 1,645$. Более того, в пределе ($M \rightarrow \infty$) интенсивность прямого скачка j_2 уменьшается и стремится к единице. Интенсивность J_1 ветвящегося скачка с точностью до бесконечно малых порядка $1/M^2$ описывается зависимостью

$$J_1 = M^2 - 1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon^2/(1 - \varepsilon).$$

Тот же (относительно M^2) порядок значений особых интенсивностей

$$J_*(M) \rightarrow M^2 - 1 + \varepsilon, \quad J_{f_1}(M) \rightarrow M^2 - 1 + \varepsilon$$

показывает, что области III и IV при больших числах Маха становятся бесконечно тонкими на плоскости (M, σ_1) . Числа Маха M_i за всеми скачками данной асимптотической ТКП стремятся к единице: с точностью до величин более высокого порядка малости

$$M_1 \rightarrow 1 + \varepsilon / [(1 - \varepsilon) M^2], \quad M_2 \rightarrow 1 + \varepsilon(1 - 2\varepsilon) / [(1 - \varepsilon) M^2], \\ M_3 \rightarrow 1 + (1 - 2\varepsilon) / [(1 - \varepsilon) M^2].$$

В асимптотической ТКП выполняется соотношение

$$J_3 - J_1 = J_1 J_2 - J_1 = (p_2 - p_1) / p \rightarrow 2\varepsilon,$$

которое показывает, что при $\gamma = 1,4$ прямой скачок j_2 (см. рис. 1, б) повышает статическое давление лишь на $1/3$ давления невозмущенного потока.

В конфигурациях ТК-2 (область II на рис. 3, а) интенсивность скачка j_2 становится меньше особых значений $J_p(M_1)$, $J_l(M_1)$, $J_c(M_1)$, $J_*(M_1)$ и $J_\Gamma(M_1)$ на кривых 10–14 соответственно. При этом интенсивность скачка j_2 не снижается, но увеличивается число Маха M_1 в потоке перед ним. Интенсивность скачка j_3 также возрастает и достигает значения $J_m(M)$ на кривой 8 (рис. 3), соответствующей СМК.

Конфигурации СМК описываются соотношением

$$M^2 = (a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}) / (2a_2),$$

где

$$a_2 = (1 - \varepsilon^2)(1 + \varepsilon J_1), \\ a_1 = (1 + \varepsilon - \varepsilon^2 + \varepsilon^3) J_1^2 + \varepsilon(1 + 3\varepsilon - 2\varepsilon^2) J_1 + (1 - \varepsilon)(1 + 2\varepsilon), \\ a_0 = (1 - \varepsilon)(J_1 - 1)(J_1^2 + \varepsilon(1 - \varepsilon) J_1 - \varepsilon).$$

Образование СМК соответствует критерию фон Неймана смены способа отражения скачка j_1 от поверхности. При наименьшем числе Маха перед СМК ($M = M_T$) интенсивности отраженного и главного скачков равны: $J_2 = J_3 = 2 / (1 - \varepsilon) = 2,4$, как и значения числа Маха за ними: $M_2 = M_3 = 1 / \sqrt{2}$. С увеличением числа Маха перед СМК интенсивности J_1 и $J_3 = J_m(M)$ монотонно возрастают, а значение J_2 достигает минимума ($J_2 = 2,278$) при $M = 1,788$.

Отраженный скачок j_2 в конфигурации СМК является особым при $M = M_{p_1} = 1,908$ ($J_2 = J_p(M_1) = 2,289$), $M = M_{l_1} = 2,202$ ($J_2 = J_l(M_1) = 2,378$), $M = M_{c_1} = 2,287$ ($J_2 = J_c(M_1) = 2,415$), $M = M_{s_1} = 2,404$ ($J_2 = J_*(M_1) = 2,470$), $M = M_{\Gamma_1} = 2,822$ ($J_2 = J_\Gamma(M_1) = 2,692$). При числе Маха $M = M_{l_1}$, определяемом уравнением

$$\sum_{n=0}^4 C_n M^{2n} = 0$$

с коэффициентами $C_4 = (1 - \varepsilon)(2 - 4\varepsilon + 2\varepsilon^3 - \varepsilon^4)$, $C_3 = -10 + 20\varepsilon - 10\varepsilon^2 - 10\varepsilon^3 + 12\varepsilon^4 - 4\varepsilon^5$, $C_2 = 12 - 24\varepsilon + 10\varepsilon^2 + 16\varepsilon^3 - 18\varepsilon^4 + 6\varepsilon^5$, $C_1 = -2(1 + \varepsilon)(3 - 4\varepsilon + 2\varepsilon^2)(1 - \varepsilon)^2$, $C_0 = (1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon)^4$, СМК одновременно удовлетворяет другому известному критерию смены способа отражения [14], соответствующему точке касания сердцевидной кривой II исходящего скачка и оси ординат на рис. 2, б). Число Маха $M = M_{s_1}$ соответствует критической скорости течения за отраженным скачком в СМК и является корнем уравнения

$$\sum_{n=0}^3 D_n M^{2n} = 0.$$

Здесь $D_3 = (1-\varepsilon)(1-\varepsilon-2\varepsilon^2+\varepsilon^4)$; $D_2 = -4+6\varepsilon^2-2\varepsilon^3-5\varepsilon^4+3\varepsilon^5$; $D_1 = \varepsilon(4-4\varepsilon-3\varepsilon^2+7\varepsilon^3-3\varepsilon^4)$; $D_0 = -\varepsilon^2(1-\varepsilon)^3$. При $M = M_e$ интенсивности падающего и отраженного скачков равны. Точка e определяется соотношениями

$$M_e = \sqrt{4-3\varepsilon+\varepsilon^2}/(1-\varepsilon) = 2,254, \quad J_1 = J_2 = 2/(1-\varepsilon). \quad (3.2)$$

При $M > M_e$ падающий скачок сильнее отраженного. В пределе ($M \rightarrow \infty$) только отраженный скачок имеет конечную интенсивность:

$$J_2 = F(\varepsilon) = (1+\varepsilon-\varepsilon^2+\varepsilon^3+\sqrt{D})/[2\varepsilon(1-\varepsilon)] = 7,271, \quad (3.3)$$

$$D = (1+\varepsilon)^2 - \varepsilon(1-\varepsilon)[2(1+\varepsilon)(2-\varepsilon) - \varepsilon^3(1-\varepsilon)],$$

а интенсивности J_1 и J_3 других скачков стремятся к бесконечно большим значениям. Числа Маха за скачками, составляющими СМК, при $M \rightarrow \infty$ имеют конечные пределы:

$$M_1 = \frac{1-\varepsilon+\varepsilon^2+3\varepsilon^3-2\varepsilon^4+\sqrt{D}}{2\varepsilon(1-\varepsilon^2)} = 5,691, \quad M_2 = 3,506, \quad M_3 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} = 0,378.$$

Число Маха M_2 увеличивается, стремясь к указанному значению, M_3 уменьшается, а значение M_1 минимально ($M_1 = 1,484$) при $M = 1,626$.

В конфигурациях ТК-1 (область I на рис. 3) скачок j_2 обладает особой интенсивностью ($J_p(M_1)$, $J_l(M_1)$, $J_c(M_1)$, $J_*(M_1)$ и $J_\Gamma(M_1)$) на нижних ветвях кривых 10–14. Интенсивность сильного ($J_3 > J_l(M)$) главного скачка принимает значение $J_3 = J_p(M)$ на кривой 15.

Вырожденные ТК-1 ($J_1 \rightarrow 1$) соответствуют участку кривой 1 правее точки T (см. рис. 3). Несмотря на различные направления поворота потока, интенсивности $J_2 = J_3 = J$ скачков j_2 и j_3 в этих конфигурациях определяются из того же уравнения (3.1), что и в вырожденных ТК-3. При $M = M_{p_2} = 2,190$ (точка p_2 на рис. 3) эти интенсивности соответствуют точке постоянного давления: $J_2 = J_3 = J_p(M)$.

Наряду с непрерывным в областях I–III “основным” решением в области за кривыми vw и f_2 (см. рис. 3, 4) существуют “альтернативные” решения системы (2.1), (2.2) при тех же значениях M и J_1 . Этим решениям соответствуют ТК-3 со сверхзвуковым течением за всеми скачками. Иная, чем у существующих при тех же значениях M и J_1 “основных” ТК, причина их образования (взаимодействие догоняющих скачков) исключает проблему выбора решения.

“Альтернативные” решения возникают на кривой vw ($M_v = 2,089$, $M_w = 3,117$, $J_{1w} = 5,611$) при распаде точки касания сердцевидных кривых на плоскости интенсивностей волн. В криволинейном треугольнике vF_2w существует два таких решения с невырожденным ($J_2 > 1$) скачком j_2 , показанным точками A_1 и A_2 на рис. 2, в. Скачок j_2 , соответствующий одному из этих решений (точке A_2), вырождается в слабый разрыв на участке F_2w кривой f_2 . В результате в области за кривой f_2 существует единственная “альтернативная” ТК-3 (см. рис. 2, г) со скачком j_2 , вырождающимся на участке этой кривой правее точки w . Интенсивность J_3 главного скачка j_3 в этой конфигурации принимает особые значения $J_\Gamma(M)$, $J_*(M)$, $J_c(M)$, $J_l(M)$ и $J_p(M)$ на кривых 16–20 (см. рис. 3, а), имеющих горизонтальные асимптоты.

Координаты $M_\Delta = 2,462$, $J_{1\Delta} = 1,515$ крайней левой точки Δ на кривой f_2 определяются уравнениями

$$(1-3\varepsilon)J_{1\Delta}^3 + \varepsilon(1-11\varepsilon)J_{1\Delta}^2 - \varepsilon(4+\varepsilon+9\varepsilon^2)J_{1\Delta} - \varepsilon(1+5\varepsilon) = 0,$$

$$(1-3\varepsilon)^2 M_\Delta^6 - (3-7\varepsilon)(1-2\varepsilon+5\varepsilon^2) M_\Delta^4 + \dots$$

$$\dots + (1-\varepsilon)(3-23\varepsilon+25\varepsilon^2+27\varepsilon^3) M_\Delta^2 - (1-10\varepsilon-27\varepsilon^2)(1-\varepsilon)^2 = 0.$$

4. Экстремальные соотношения параметров течения за тройными конфигурациями. Коэффициент полного давления I_i (отношение давлений торможения за скачком j_i и перед ним) определяется интенсивностью J_i :

$$I_i = (J_i E_i^\gamma)^{-(1-\varepsilon)/(2\varepsilon)},$$

где $E_i = (1 + \varepsilon J_i)/(J_i + \varepsilon)$ — отношение плотностей газа перед скачком и за ним согласно адиабате Ренкина — Гюгонио. С учетом условия совместности (2.1) отношение I_{p_0} полных давлений на сторонах разрыва τ равно

$$I_{p_0} = \frac{p_{02}}{p_{03}} = \frac{I_1 I_2}{I_3} = \left(\frac{E_3}{E_1 E_2} \right)^{(1+\varepsilon)/(2\varepsilon)}.$$

Отношения I_f некоторых других параметров f течения за тройной конфигурацией находятся в степенной зависимости от I_{p_0} :

$$I_f = I_{p_0}^\zeta. \quad (4.1)$$

В частности, $\zeta = 2\chi$ ($\chi = \varepsilon/(1 + \varepsilon)$) при $f = \rho$ (отношение плотностей газа), $\zeta = -2\chi$ при $f = T$ (отношение температур), $\zeta = -\chi$ при $f = a$ (отношение скоростей звука) и $\zeta = \chi$ при $f = z = \rho a$ (отношение акустических импедансов на тангенциальном разрыве).

Отношения параметров, явно зависящих от скорости течения, определяются также числами Маха за скачками:

$$I_v = \frac{v_2}{v_3} = \frac{M_2}{M_3} I_{p_0}^{-\varepsilon/(1+\varepsilon)}, \quad I_d = \frac{\rho_2 v_2^2}{\rho_3 v_3^2} = \frac{M_2^2}{M_3^2},$$

$$I_q = \frac{\rho_2 v_2}{\rho_3 v_3} = \frac{M_2}{M_3} I_{p_0}^{\varepsilon/(1+\varepsilon)}, \quad I_w = \frac{p_2 + \rho_2 v_2^2}{p_3 + \rho_3 v_3^2} = \frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_3^2}.$$

Здесь $q = \rho v$ — массовый расход газа через единицу площади поверхности; $d = \rho v^2/2$ — скоростной напор; $w = p + \rho v^2$ — импульс потока.

На верхней границе (кривая f_1 на рис. 4, $J_2 \rightarrow 1$) и нижней границе (кривая 2, $J_1 \rightarrow 1$) области I–III существования “основного” решения все рассматриваемые функции стремятся к единице. При каждом фиксированном числе Маха $M \geq M_{F_1}$ для каждой из функций I_{p_0} , I_v , I_q , I_d , I_w существует единственное значение J_1 интенсивности ветвящегося скачка, определяющее их максимумы. Параметры таких (экстремальных) конфигураций показаны соответственно кривыми 9–13 на рис. 4, а, б. Из (4.1) очевидно, что в конфигурациях, экстремальных по I_{p_0} , также реализуются максимумы отношений плотностей и акустических импедансов и минимумы отношений температур и скоростей звука.

При числах Маха, близких к M_{F_1} , экстремальны ТК-3. С увеличением числа Маха экстремальными становятся конфигурации ТК-2. Точки G_{p_0} , G_v , G_q , G_d , G_w на рис. 4, б соответствуют экстремальным переходным ТКП. Переходные ТКП экстремальны по различным отношениям параметров течения за ними при $M = 1,567$ ($I_v = 1,085$), $M = 1,569$ ($I_d = 1,201$), $M = 1,571$ ($I_q = 1,107$), $M = 1,584$ ($I_w = 1,090$) и $M = 1,596$ ($I_{p_0} = 1,076$). Интенсивности J_{1f} ветвящихся скачков в экстремальных по различным отношениям I_f конфигурациях ТК-2 и ТК-3 удовлетворяют неравенству

$$J_{1v} < J_{1d} < J_{1q} < J_{1w} < J_{1p_0}. \quad (4.2)$$

Точка e , определяемая соотношением (3.2), является общей для кривых 9–13 на рис. 4, а, б и соответствует СМК, экстремальной одновременно для всех рассматриваемых отношений I_f . Экстремальная СМК удовлетворяет как условию ($J_1 = J_2$ [2, 3]) максимума полного давления за последовательностью двух скачков $\{j_1, j_2\}$ с фиксированным

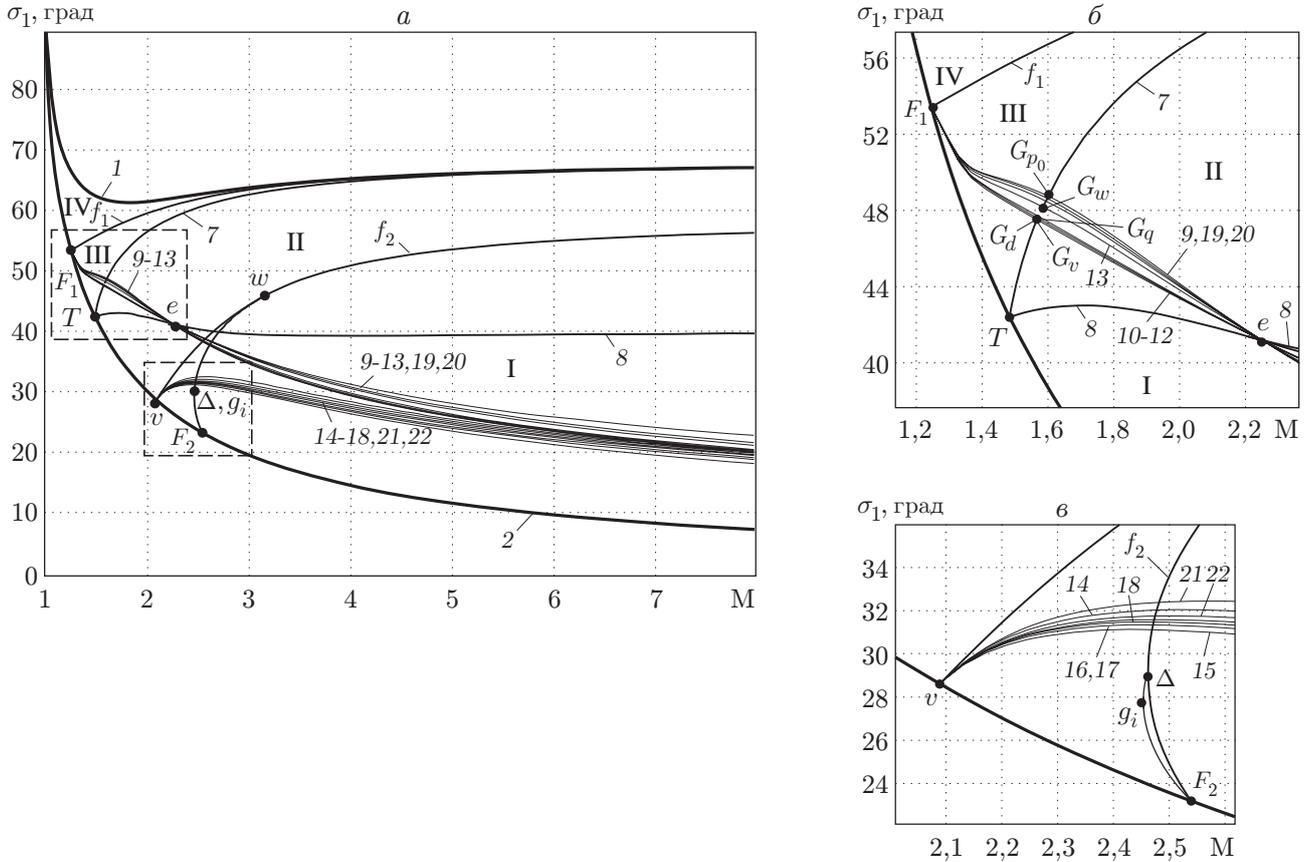


Рис. 4. Экстремальные тройные конфигурации скачков уплотнения на плоскости (M, σ_1) : б, в — фрагменты, выделенные на рис. 4, а штриховыми линиями, в увеличенном масштабе

произведением интенсивностей, так и условию ($J_3 = J_m(M)$) его минимума за одиночным скачком j_3 . Значения функций I_f в экстремальной СМК следующие: $I_v = 1,649$, $I_q = 1,833$, $I_d = 3,024$, $I_w = 1,587$, $I_{p_0} = 1,448$. При $M > M_e$ экстремальные ТК принадлежат первому типу, а расположение кривых 9–13 соответствует выполнению неравенства

$$J_{1p_0} < J_{1w} < J_{1q} < J_{1d} < J_{1v}.$$

На рис. 5 приведены отношения параметров течения за экстремальными и переходными конфигурациями (масштабы отношения скоростей (кривые 2а, 2б, 2д) увеличены в 100 раз, отношения расходных функций (кривые 3а, 3б, 3д) и импульсов потока (кривые 5а, 5б, 5д) — в 10 раз). В пределе ($M \rightarrow \infty$) отношения I_f параметров течения за экстремальными ТК иногда достаточно медленно (см. кривые 1а–5а на рис. 5,а) приближаются к конечным значениям:

$$I_{p_0} = \varepsilon^{-(1+\varepsilon)/(2\varepsilon)} = 529,1, \quad I_v = 5,261, \quad I_q = 30,41, \quad I_d = 155,8, \quad I_w = 30,22. \quad (4.3)$$

В конфигурациях, экстремальных по отношению полных давлений, интенсивности скачков описываются пределами

$$\frac{J_1}{M} \rightarrow \sqrt{H}, \quad \frac{J_2}{M} \rightarrow \sqrt{H}, \quad \frac{J_3}{M^2} \rightarrow H, \quad H = \frac{1 + \varepsilon - \sqrt{(1 - \varepsilon)^2 + 4\varepsilon^3}}{2\varepsilon(1 - \varepsilon)}.$$

В других экстремальных ТК интенсивности J_1 и J_3 имеют порядок M^2 , а значения J_2 стремятся к большим, но конечным пределам. Таким образом, конфигурации, экстремальные

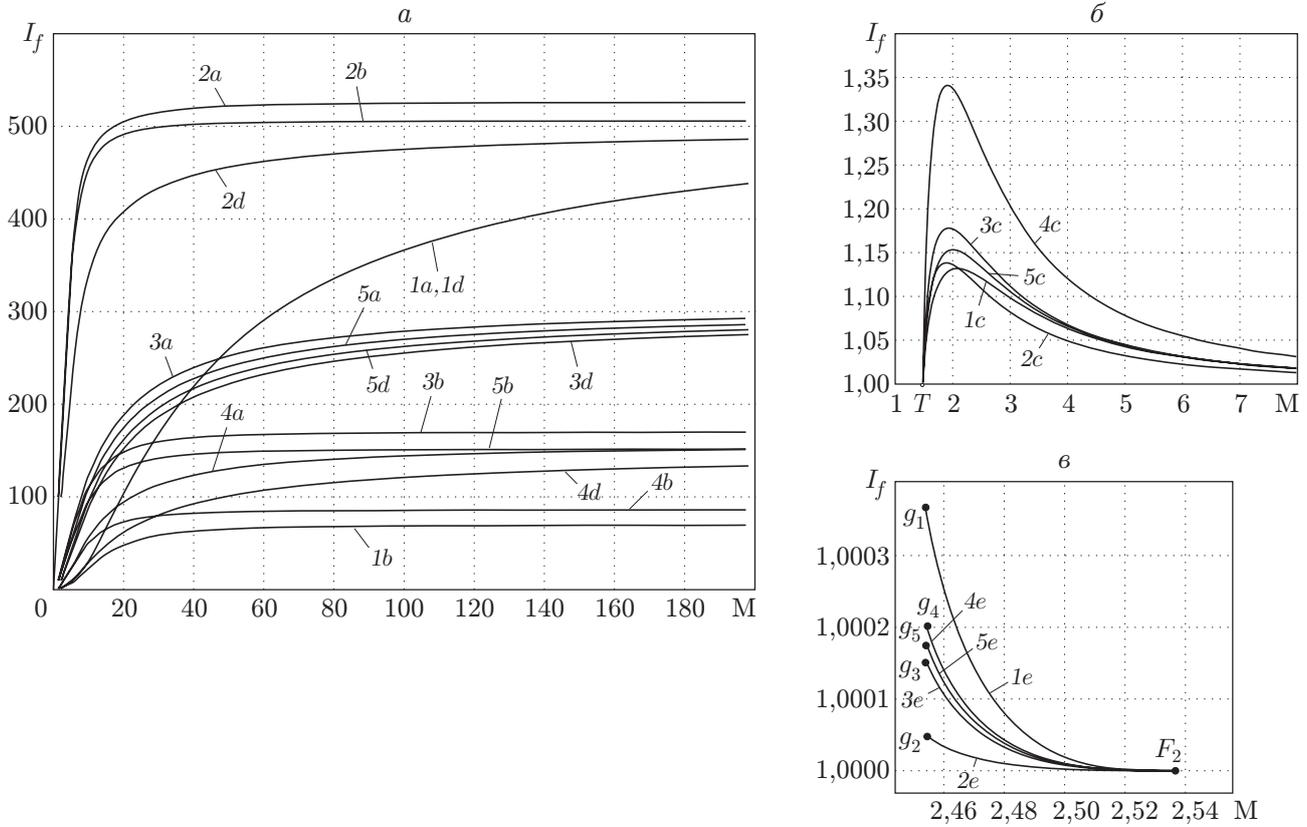


Рис. 5. Отношения параметров течения за экстремальными и переходными конфигурациями:

a — экстремальные “основные” и “альтернативные” конфигурации, SMK; *б* — конфигурации ТКП; *в* — “альтернативные” конфигурации, существующие только в криволинейном треугольнике vF_2w (см. рис. 4)

по отношениям различных параметров, также различны. Однако значения I_f за конфигурациями, экстремальными только по I_{p0} , близки к оптимальным (4.3):

$$\begin{aligned}
 I_v &= \sqrt{\frac{K + N}{2\varepsilon^2}} = 5,033, & I_q &= \sqrt{\frac{K + N}{2\varepsilon^4}} = 30,20, \\
 I_d &= \frac{I_v^2}{\varepsilon} = 152,0, & I_w &= \sqrt{\frac{K + N}{2\varepsilon^4}} = 30,20,
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

где $K = (1 - \varepsilon)^2 + 2\varepsilon^3$; $N = (1 - \varepsilon)\sqrt{(1 + \varepsilon)(1 - 3\varepsilon + 4\varepsilon^2)}$.

Отношения параметров течения за переходными ТК существенно отличаются от экстремальных. Например, за SMK (см. кривые $1b-5b$ на рис. 5, *a*) при $M \rightarrow \infty$ они стремятся к значениям

$$\begin{aligned}
 I_{p0} &= \left(\frac{1 + 2\varepsilon - 2\varepsilon^3 + \varepsilon^4 + (1 - \varepsilon)D}{2\varepsilon(2 - \varepsilon)} \right)^{(1+\varepsilon)/(2\varepsilon)} = 69,72, \\
 I_v &= \sqrt{\frac{(1 - \varepsilon)^2 + 4\varepsilon^3 - \varepsilon^4 - 2\varepsilon^5 + \varepsilon^6 + (1 - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2)D}{2\varepsilon^2}} = 5,059, \\
 I_q &= \sqrt{\frac{1 - 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3(1 - \varepsilon)^2 + (1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon^2)D}{2\varepsilon^4(2 - \varepsilon)^2}} = 17,01,
 \end{aligned}$$

$$I_d = \frac{1 - 2\varepsilon + 2\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3 - \varepsilon^4 + (1 - \varepsilon)D}{2(2 - \varepsilon)\varepsilon^3} = 86,05,$$

$$I_w = \frac{1 - 2\varepsilon + 6\varepsilon^2 - 4\varepsilon^3 + \varepsilon^4 + (1 - \varepsilon)D}{2(2 - \varepsilon)\varepsilon^2} = 15,17$$

(коэффициент D определен формулой (3.3)).

В переходных ТКП отношения параметров достигают максимумов ($I_v = 1,138$ при $M = 1,892$, $I_q = 1,178$ при $M = 1,927$, $I_d = 1,341$ при $M = 1,911$, $I_w = 1,153$ при $M = 2,005$, $I_{p_0} = 1,132$ при $M = 2,083$), после чего асимптотически приближаются к единице (кривые I_{c-5c} на рис. 5, б) в результате вырождения скачка j_2 в слабый разрыв при больших числах Маха.

Конфигурации ТК-3, соответствующие решению системы (2.1), (2.2), существующему только в области справа от кривых vw и f_2 (см. рис. 4), также могут быть экстремальными. Наибольшие отношения параметров течения I_{p_0} , I_v , I_q , I_d , I_w за этими “альтернативными” ТК-3 достигаются на кривых 14–18 (см. рис. 4) соответственно. Расположение этих кривых на плоскости (M, σ_1) удовлетворяет неравенству (4.2). Интенсивности скачков уплотнения в экстремальных “альтернативных” ТК-3 при больших числах Маха стремятся к бесконечным значениям (J_1 и J_2 — порядка M , J_3 — порядка M^2). Углы β_i поворота потока во всех этих ТК-3 соответствуют следующим пределам: $\beta_1 \rightarrow 0$, $|\beta_2| \rightarrow 19,78^\circ$, $|\beta_3| \rightarrow 19,78^\circ$. Экстремальное отношение давлений торможения (кривая $1d$ на рис. 5, а) стремится к тому же значению

$$I_{p_0} = \varepsilon^{-(1+\varepsilon)/(2\varepsilon)} = 529,1, \quad (4.5)$$

что и в “основных” ТК. Максимальные отношения других параметров течения показаны кривыми 2d–5d на рис. 5, а. При $M \rightarrow \infty$ пределы этих отношений совпадают с пределами (4.4), которые несколько уступают аналогичным значениям (4.3) для экстремальных “основных” ТК.

Другое “альтернативное” решение системы (2.1), (2.2), существующее только в криволинейном треугольнике vF_2w (см. рис. 4), соответствует конфигурациям ТК-3, которые также могут быть экстремальными. Максимумы функций $I_f(J_1)$ достигаются на верхней границе области существования этого решения (кривая vw). Почти сливающиеся кривые $g_i\Delta$ и $g_i f_2$ ($i = 1 \div 5$) на рис. 4, в характеризуют внутренние локальные минимумы и максимумы функций I_{p_0} , I_q , I_v , I_d и I_w соответственно. Локальные экстремумы возникают в результате распада точек перегиба функций I_f при $M_{g_1} = 2,453$ (функция I_{p_0}), $M_{g_2} = 2,455$ (функция I_v) и примерно одинаковых значениях $M_{g_3} - M_{g_5} \approx 2,454$ (функции I_q , I_d и I_w). Различия параметров течения за описываемыми ТК-3 в точках локальных максимумов очень малы (см. кривые 1e–5e на рис. 5, в). При $M < M_{g_i}$ все функции $I_f(J_1)$ монотонно возрастают от единицы на нижней границе до некоторого значения на верхней границе (кривая vw) рассматриваемого криволинейного треугольника.

Отношения $I_f = f_2/f_3$ параметров неоднородного потока за ТК не всегда дают полное представление о его свойствах. Например, несмотря на большие значения отношений $I_{p_0} = p_{02}/p_{03}$ (4.5), достигаемые при больших числах Маха, оба значения p_{02} и p_{03} в этих случаях очень малы по сравнению с давлением торможения невозмущенного потока, поскольку коэффициенты полного давления на всех скачках j_i стремятся к нулю.

Анализ ТК дополняется исследованием перепадов $\Delta \bar{f}_\tau = (f_2 - f_3)/f$ параметров течения на тангенциальном разрыве τ . Далее рассматриваются функции $\Delta \bar{p}_{0\tau} = (p_{02} - p_{03})/p_0$ и $\Delta \bar{T}_\tau = (T_2 - T_3)/T$, первая из которых представляет собой разность давлений торможения двух потоков и может быть использована для анализа возникновения автоколебательных режимов при взаимодействии струй с преградой, а вторая характеризует температурный напор на слой смешения, соответствующий разрыву τ .

Функции $\Delta\bar{p}_{0\tau} = I_1 I_2 - I_3 = I_3(I_{p_0} - 1)$ и $\Delta\bar{T}_\tau = \Theta_1 \Theta_2 - \Theta_3 = \Theta_3(I_T - 1)$ равны нулю на верхней границе (кривая f_1 на рис. 4) и нижней границе (кривая 2) области существования “основного” решения. Здесь $\Theta_i = E_i J_i$ — отношение температур газа на сторонах скачка j_i .

При каждом значении числа Маха $M > M_{F_1}$ в области I–III существования “основного” решения имеется единственная экстремальная ТК, за которой перепады полного давления и температуры на тангенциальном разрыве максимальны. На рис. 4, а, б конфигурации с максимальными значениями $\Delta\bar{p}_{0\tau}$ и $|\Delta\bar{T}_\tau|$ показаны кривыми 19 и 20. Интенсивность J_1 ветвящегося скачка в конфигурациях, экстремальных по $\Delta\bar{p}_{0\tau}$, при $M < M_e$ больше, а при $M > M_e$ меньше, чем в конфигурациях, экстремальных по отношениям I_f различных параметров f на разрыве τ . Переход экстремальных ТК от третьего типа ко второму происходит при $M = 1,601$, $\sigma_1 = 48,742^\circ$ и $M = 1,594$, $\sigma_1 = 48,492^\circ$ для полных давлений и температур соответственно, а от второго типа к первому — в точке e (см. рис. 4, б), которая соответствует СМК, экстремальной для всех рассматриваемых отношений и разностей параметров течения.

Значение $\Delta\bar{p}_{0\tau}$ в экстремальных ТК увеличивается от нуля при $M = M_{F_1}$ до $\Delta\bar{p}_{0\tau} = 0,423$ при $M = 3,516$, после чего вновь уменьшается, стремясь к нулю при $M \rightarrow \infty$ в силу больших потерь полного давления на скачках. Экстремальная разность температур $\Delta\bar{T}_\tau$ отрицательная. При $M \rightarrow \infty$ она монотонно и неограниченно уменьшается.

“Альтернативные” ТК-3 с экстремальными разностями полных давлений и температур на тангенциальном разрыве показаны кривыми 21 и 22 на рис. 4, а, в. Значение $\Delta\bar{p}_{0\tau}$ в этих конфигурациях увеличивается от нуля при $M = M_v$ до $\Delta\bar{p}_{0\tau} = 0,423$ при $M = 3,787$, а затем вновь уменьшается, асимптотически стремясь к нулю. Начиная с $M = 3,661$ экстремальные значения $\Delta\bar{p}_{0\tau}$ в “альтернативных” ТК больше, чем в “основных”. Разность температур $\Delta\bar{T}_\tau$ отрицательная, уменьшается монотонно и неограниченно, но несколько медленнее, чем в “основных” ТК.

Второе “альтернативное” решение, существующее только в криволинейном треугольнике vF_2w , характеризуется незначительными (не более $10^{-4} \div 10^{-5}$) безразмерными перепадами полного давления и температуры потока на сторонах разрыва τ .

Заключение. Параметры неоднородного течения за тройными конфигурациями скачков уплотнения в сверхзвуковом потоке с известными газодинамическими переменными определяются (возможно, неоднозначно) только интенсивностью J_1 скачка уплотнения, приходящего в тройную точку. При некоторых значениях числа Маха исходного течения и интенсивности J_1 параметры потоков, разделенных линией скольжения (тангенциальным разрывом), принимают особые значения (например, становятся критическими), а отношения некоторых из них имеют экстремумы. Аналитически установленные особые интенсивности таких приходящих скачков уплотнения можно использовать для оптимального газодинамического проектирования технических объектов (сверхзвуковых воздухозаборников, аппаратов струйных технологий, стартовых ракетных комплексов). При этом целью оптимального проектирования может быть создание или исключение особых и экстремальных тройных конфигураций и связанных с ними автоколебательных и отрывных режимов течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Адрианов А. Л., Старых А. Л., Усков В. Н. Интерференция стационарных газодинамических разрывов. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1995.
2. Петров Г. И. Аэромеханика больших скоростей и космические исследования: Избр. тр. М.: Наука, 1992.

3. **Омельченко А. В., Усков В. Н.** Оптимальные ударно-волновые системы // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1995. № 6. С. 118–126.
4. **Омельченко А. В., Усков В. Н.** Оптимальные ударно-волновые системы при ограничениях на суммарный угол поворота потока // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1996. № 4. С. 142–150.
5. **Омельченко А. В., Усков В. Н.** Экстремальная система волна разрежения — скачок уплотнения в стационарном потоке газа // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 2. С. 40–47.
6. **Tao Gang, Uskov V. N., Chernyshov M. V.** Optimal triple configurations of stationary shocks // Proc. of the 24th Intern. symp. on shock waves, Peking, 2004. Beijing (China): Tsinghua Univ. Press: Springer-Verlag, 2005. V. 1. P. 499–504.
7. **Горшков Г. Ф., Усков В. Н.** Автоколебания в сверхзвуковых струйных системах с соударением // Успехи механики. 2003. Т. 2, № 1. С. 47–67.
8. **Бабарыкин К. В., Кузьмина В. Е., Угрюмов Е. А., Цветков А. И.** Автоколебания при натекании равномерного сверхзвукового потока на преграду “цилиндр — игла с диском” // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2000. № 4. С. 54–64.
9. **Омельченко А. В., Усков В. Н.** Интерференция нестационарных косых ударных волн // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28, вып. 12. С. 5–12.
10. **Усков В. Н.** Ударные волны и их взаимодействие. Л.: Изд-во Ленингр. мех. ин-та, 1980.
11. **Гудерлей К. Г.** Теория околосзвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
12. **Курант Р., Фридрихс К.** Сверхзвуковое течение и ударные волны. М.: Изд-во иностр. лит., 1950.
13. **Henderson L. F., Lozzi A.** Experiments on transition to Mach reflection // J. Fluid Mech. 1975. V. 68, pt 1. P. 139–155.
14. **Hornung H. G.** Regular and Mach reflection of shock waves // Annu. Rev. Fluid Mech. 1986. V. 18. P. 33–58.
15. **Васильев Е. И., Крайко А. Н.** Численное моделирование дифракции слабых скачков на клине в условиях парадокса Неймана // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1999. Т. 39, № 8. С. 1393–1404.
16. **Ляхов В. Н., Подлубный В. В., Титаренко В. В.** Воздействие ударных волн и струй на элементы конструкций. М.: Машиностроение, 1989.

*Поступила в редакцию 4/VII 2005 г.,
в окончательном варианте — 16/IX 2005 г.*
